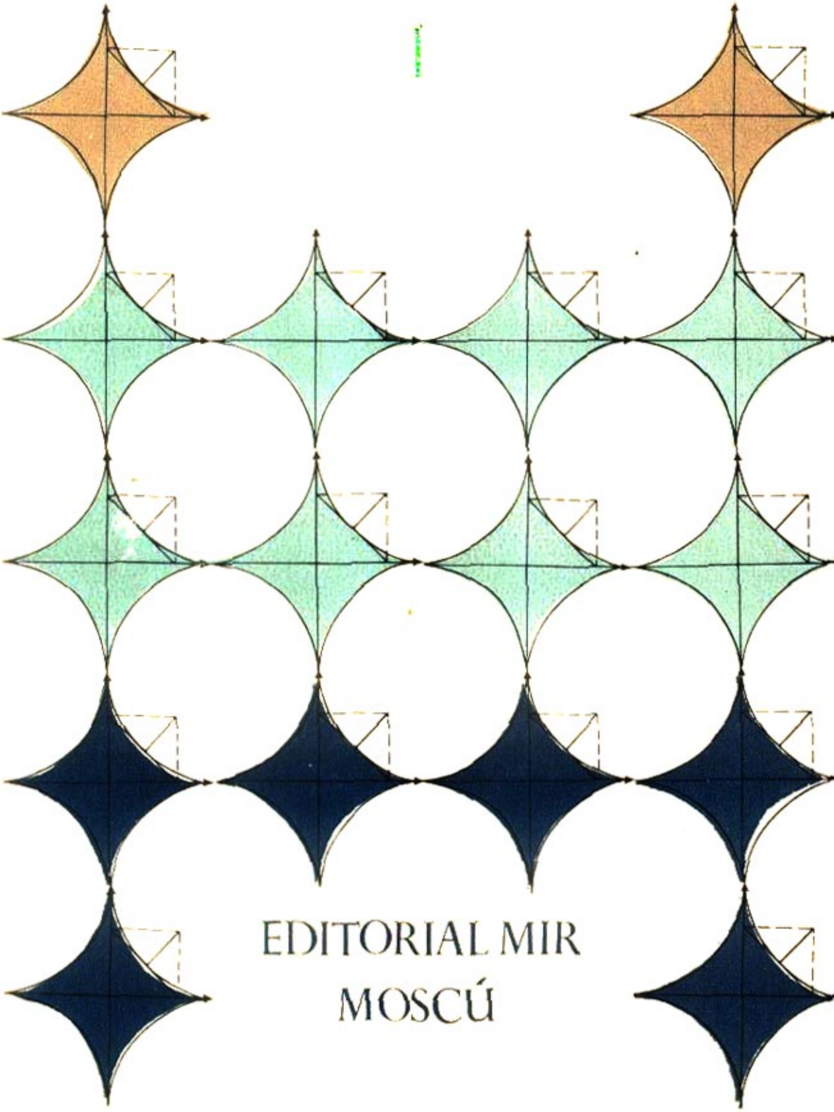
PROBLEMAS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES



EDITORIAL MIR
MOSCÚ

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

В. БОЛГОВ, Б. ДЕМИДОВИЧ, В. ЕФИМЕНКО,
А. ЕФИМОВ, А. КАРАКУЛИН, С. КОГАН,
Г. ЛУНЦ, Е. ПОРШНЕВА, А. ПОСПЕЛОВ,
С. ФРОЛОВ, Р. ШОСТАК, А. ЯНПОЛЬСКИЙ

СБОРНИК
ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И ОСНОВЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
АНАЛИЗА

Под редакцией
А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

V. BOLGOV, B. DEMIDÓVICH, V. EFIMENKO.
A. EFIMOV, A. KARAKULIN, S. KOGAN
G. LUNTS, E. PORSHNEVA, A. POSPELOV,
S. FROLOV, R. SHOSTAK
Y. A. YAMPOLSKI

PROBLEMAS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES

PARA LOS CENTROS
DE ENSEÑANZA
TÉCNICA SUPERIOR

ALGEBRA LINEAL Y BASES DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

REDACTORES
A. EFIMOV, B. DEMIDOVICH

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por el ingeniero
K. Medkov

Impreso en la URSS. 1983

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», I Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

На испанском языке

INDICE

PRÓLOGO 9

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS 11

§ 1. Números reales. Conjuntos. Lógica simbólica . . . 11
1. Concepto de número real (11). 2. Conjuntos y operaciones sobre ellos (13). 3. Cotas superiores e inferiores (17). 4. Lógica simbólica (19).

§ 2. Funciones de una variable real 22
1. Concepto de función (22). 2. Funciones elementales y sus gráficas (26).

§ 3. Límite de una sucesión de números reales 30
1. Concepto de sucesión (30). 2. Límite de una sucesión (31).

§ 4. Límite de una función. Continuidad 33
1. Límite de una función (33). 2. Infinitésimos e infinitos (39). 3. Continuidad de la función en un punto. Clasificación de los puntos de discontinuidad (41). 4. Continuidad en un conjunto. Continuidad uniforme (43).

§ 5. Números complejos 45
1. Operaciones algebraicas con los números complejos (45). 2. Polinomios y ecuaciones algebraicas (52) 3. Límite de la sucesión de números complejos (54).

Respuestas 57

CAPÍTULO 2. ALGEBRA VECTORIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA 69

§ 1. Algebra vectorial 69
1. Operaciones lineales con los vectores (69). 2. Base y las coordenadas de un vector (72). 3. Coordenadas rectangulares cartesianas de un punto. Problemas elementales de la geometría analítica (75). 4. Producto escalar de vectores (78). 5. Producto vectorial de vectores (82). 6. Producto mixto de vectores (84).

§ 2. Objetos geométricos lineales 86
1. La recta en un plano (86). 2. El plano y la recta en el espacio (91).

§ 3. Curvas en el plano 98
1. Ecuación de la curva en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas (98). 2. Curvas algebraicas de segundo orden (100). 3. Ecuación de una curva en el sistema polar de coordenadas (110). 4. Ecuaciones paramétricas de una curva (114). 5. Algunas curvas que se encuentran en las matemáticas y en sus aplicaciones (116).

§ 4. Superficies y curvas en el espacio 121
1. Ecuaciones de la superficie y de la curva en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas (121). 2. Superficies algebraicas de segundo grado (125). 3. Clasificación de las superficies según el tipo de transformaciones de la simetría (129).
Respuestas 134

CAPÍTULO 3. DETERMINANTE Y MATRICES. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 144

§ 5. Determinantes 144
1. Determinantes de segundo y tercer órdenes (144). 2. Determinantes de n-ésimo orden (147). 3. Métodos principales de cálculo de los determinantes de n-ésimo orden (150).
§ 2. Matrices 154
1. Operaciones con las matrices (154). 2. Matriz inversa (157).
§ 3. Espacio de vectores aritméticos. Rango de una matriz 160
1. Vectores aritméticos (160). 2. Rango de una matriz (163).
§ 4. Sistemas de ecuaciones lineales . . . .
1. Regla de Cramer. (168). 2. Solución de los sistemas arbitrarios (170). 3. Sistemas homogéneos (174). 4. Método de Jordan—Gauss de eliminaciones sucesivas (178).
§ 5. Algunos problemas de cálculo del álegbra lineal . . . 180
1. Operaciones sobre las matrices (180). 2. Cálculo de los determinantes (183). 3. Sistemas de ecuaciones lineales (185).

Respuestas 188

CAPÍTULO 4. ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL . . . 199

§ 1. Espacios vectoriales lineales y espacios provistos de producto escalar 199
1. Espacio vectorial lineal (199). 2. Subespacios y variedades lineales (207). 3. Espacios provistos de un producto escalar (209).
§ 2. Operadores lineales 213
1. Algebra de los operadores lineales (213). 2. Números propios y vectores propios de un operador lineal (219). 3. Operadores lineales en los espacios provistos de un producto escalar (222). 4. Reducción de la matriz de un operador lineal a la forma diagonal (226).
§ 3. Formas bilineales y cuadráticas 228
1. Formas lineales (228). 2. Formas bilineales (229). 3. Formas cuadráticas (230). 4. Curvas de segundo orden y superficies de segundo grado (233).
Respuestas 237

CAPÍTULO 5. CÁLCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE 249
§ 1. Derivada 249
1. Definición de la derivada. Derivación de las funciones definidas explícitamente (249). 2. Derivación de las funciones definidas en forma paramétrica o implícita (257). 3. Derivadas de órdenes superiores (261). 4. Aplicaciones geométricas y mecánicas de la derivada (265).
§ 2. Diferencial 269
1. Diferencial de primer orden (269). 2. Diferenciales de órdenes superiores (272).
§ 3. Teoremas de las funciones derivables. Fórmula de Taylor 272
1. Teoremas del valor medio (272). 2. Regla de L'Hospital-Bernoulli (274). 3. Fórmula de Taylor (279).
§ 4. Investigación de las funciones y construcción de las gráficas 282
1. Crecimiento y decrecimento de las funciones. Extremo (282). 2. Dirección de la convexidad. Puntos de inflexión (287). 3. Asíntotas (289). 4. Construcción de las gráficas de las funciones (290).
§ 5. Funciones vectoriales y complejas de una variable real 295
1. Definición de la función vectorial de una variable real (295). 2. Derivación de la función vectorial (296). 3. Tangente a una curva espacial y a un plano normal (298). 4. Segunda derivada de la función vectorial (299). 5. Características diferenciales de las curvas espaciales (302). 6. Funciones complejas de una variable real (308).
§ 6. Métodos numéricos de la función de una sola variable 309
1. Resolución numérica de las ecuaciones (309). 2. Interpolación de las funciones (316). 3. Diferenciación numérica (324).
Respuestas 327
CAPÍTULO 6. CÁLCULO INTEGRAL DE LAS FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE 354
§ 1. Métodos principales de cálculo de la integral indefinida 354
1. Función primitiva e integral indefinida (354). 2. Integración por cambio de variable (357). 3. Integración por partes (362).
§ 2. Integración de las clases principales de funciones elementales 364
1. Integrales simples que contienen un trinomio de segundo grado (364). 2. Integración de las fracciones racionales (366). 3. Integración de las funciones trigonométricas e hiperbólicas (370). 4. Integración de ciertas funciones irracionales (376).
§ 3. Problemas mixtos de integración 379
§ 4. Integral definida y métodos de su cálculo 380

1. Integral definida como límite de una suma integral (380). 2. Cálculo de las integrales más simples con ayuda de la fórmula de Newton—Leibniz (383). 3. Propiedades de la integral definida (385). 4. Cambio de una variable en la integral definida (389). 5. Integración por partes (391).
§ 5. Integrales impropias 393
1. Integrales con límites infinitos (393). 2. Integrales de las funciones no acotadas (395).
§ 6. Aplicaciones geométricas de la integral definida . . . 398
1. Area de una figura plana (398). 2. Longitud del arco de una curva (404). 3. Area de la superficie de revolución (407). 4. Volumen de un cuerpo (410).
§ 7. Aplicación de la integral definida a la resolución de ciertos problemas de mecánica y física 414
1. Momentos y centros de masas de las curvas planas (414). 2. Problemas físicos (417).
§ 8. Integración numérica de las funciones de una variable 422
Respuestas 429
CAPÍTULO 7. CÁLCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES 447
§ 1. Conceptos fundamentales 447
1. Concepto de función de varias variables (447). 2. Límite y continuidad de la función (450). 3. Derivadas parciales (453). 4. Diferencial de una función y sus aplicaciones (457).
§ 2. Derivación de las funciones compuestas o implícitas 461
1. Funciones compuestas de una y de varias variables independientes (461). 2. Funciones implícitas de una y de varias variables independientes (464). 3. Sistemas de las funciones implícitas y de las definidas en forma paramétrica (467). 4. Cambio de variables en las expresiones diferenciales (470).
§ 3. Aplicaciones de las derivadas parciales 475
1. Fórmula de Taylor (475). 2. Extremo de una función (478). 3. Extremo condicionado (480). 4. Valores máximo y mínimo de una función (483). 5. Aplicaciones geométricas de las derivadas parciales (486).
§ 4. Números aproximados y operaciones con ellos . . . 492
1. Errores absoluto y relativo (492). 2. Operaciones con números aproximados (495).
Respuestas 497
APÉNDICE. DESCRIPCIÓN BREVE DEL LENGUAJE FORTRAN-IV 507

PRÓLOGO

Es a B. P. Demidóvich a quien se debe la idea de crear un manual de «Problemas de las matemáticas superiores para los centros técnicos de enseñanza superior» que contenga problemas de todas las partes del curso matemático concernientes a las especialidades técnicas de ingeniería. No obstante, la muerte prematura del profesor Demidóvich le impidió realizar este trabajo. La versión de «Problemas» que se ofrece al lector fue preparada para la edición por un colectivo de autores que poseen una gran experiencia pedagógica en los centros de enseñanza técnica superior y es, precisamente, la encarnación de la idea de B. P. Demidóvich.

La estructura general del libro fue propuesta por A. V. Efímov, el redactor, y refleja el contenido del programa de matemáticas para las especialidades de ingeniería en los centros de enseñanza superior, calculado para 510 horas de estudio. Se ha tomado en consideración la experiencia del profesorado del Instituto de Técnica Electrónica de Moscú.

En el manual están incluidos los problemas y ejemplos de todas las partes del curso matemático para los centros técnicos de enseñanza superior, salvo la teoría de las probabilidades y algunas ramas especiales. Con el fin de reafirmar los conocimientos referentes al programa escolar se ha introducido, además, una serie de problemas que permiten repasar con una profundidad mayor las partes fundamentales del análisis y del álgebra vectorial que se estudian en los centros de enseñanza media.

Una de las peculiaridades principales del manual consiste en que la mayoría de los capítulos contiene problemas de cálculo, cuya resolución requiere el empleo de las máquinas calculadoras.

La primera parte del libro llamada «Algebra lineal y bases del análisis matemático» incluye aquellas partes de las matemáticas que, como regla, se estudian en el primer año. Entre ellos figuran el álgebra vectorial con elementos de geometría analítica, el álgebra lineal, como también el cálculo diferencial de las funciones de una variable y de varias variables y, además, el cálculo integral de las funciones de una sola variable.

El material citado se expone en los capítulos repartidos en párrafos y puntos. La enumeración de los problemas viene dada individualmente en cada capítulo por párrafos. Al final de cada capítulo se dan las respuestas a todos los problemas de cálculo, con la particularidad de que, los problemas marcados con un asterisco vienen acompañados, en las respuestas, de indicaciones para resolverlos; para los problemas marcados con dos asteriscos las respuestas contienen un modelo de su resolución.

Cada parte del libro está provista de una introducción breve que contiene, tanto los conocimientos teóricos indispensables (definiciones, fórmulas, teoremas), como un gran número de ejemplos resueltos detalladamente. El comienzo de la resolución de los ejemplos, como también de los problemas con dos asteriscos, se indica con el signo ◀ , y el fin, con el signo ▶. Las indicaciones para la resolución se distinguen mediante el signo ●.

El apéndice llamado «Descripción breve del lenguaje FORTRAN-IV» está escrito, a petición del redactor del libro, por el docente Tereschenko A. M.

El manuscrito del manual se discutió en las cátedras de matemáticas en los Institutos de Moscú de Ingeniería Física, de Acero y Aleaciones y de Energía. Como resultado surgió toda una serie de observaciones valiosas y consejos que contribuyeron a reforzar el carácter práctico del libro. El colectivo de autores agradece a los profesores Prilepko A. I., Trenoguin V. A. y Pojozhaev S. I., como también a todos los docentes de las cátedras, encabezadas por ellos, que tomaron parte en la discusión.

Una gratitud cordial se expresa a Lapenko L. B. y Fominá S. A., colaboradores de la cátedra de matemáticas superiores del Instituto de Técnica Electrónica de Moscú, por la ayuda que ellos prestaron en el proceso de preparación del manual para la edición.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS

§ 1. Números reales. Conjuntos. Lógica simbólica

1. Concepto de número real. Por el curso de la escuela secundaria sabemos que todo *número real* no negativo x se representa mediante una fracción decimal infinita

$$[x],\ x_1x_2,\ \ldots, \tag{1}$$

donde $[x]$ es el número entero mayor que no sobrepasa x y se denomina *parte entera* del número x, $x_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

En este caso, las fracciones en las cuales $x_n = 9$ para todo $n \geqslant n_0$ (n_0 es cierto número natural) se excluyen comúnmente de la consideración en virtud de las siguientes igualdades:

$$[x],\ 999\ \ldots = [x] + 1,$$

$$[x],\ x_1x_2\ \ldots\ x_{n_0-1}999\ \ldots\ = [x],\ x_1x_2\ \ldots$$
$$\ldots\ (x_{n_0-1}+1)\ (n_0 \geqslant 1,\ x_{n_0-1} \neq 9).$$

Un número real x es *racional*, es decir, puede ser representado en forma de la razón $\dfrac{m}{n}$, m, $n \in \mathbb{Z}$ cuando, y sólo cuando, la fracción (1) es periódica. En el caso contrario el número x es *irracional*.

Se llama *valor absoluto* o *módulo* del número real x un número no negativo

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se supone que las reglas de comparación de los números reales, como también las operaciones aritméticas sobre los mismos se conocen por el curso de enseñanza secundaria.

1.1. Demuéstrese que el número

$$0{,}1010010001\ \ldots\ 1\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{n}1\ \ldots$$

es irracional. Escríbanse los primeros tres términos de cada una de las sucesiones de fracciones decimales finitas que aproximan el número citado por defecto y por exceso.

1.2. Represéntense en forma de fracciones propias racionales los números que siguen:

a) 1, (2); b) 3,00(3); c) 0,110(25).

1.3. Demuéstrese que el número lg 5 es irracional.

◀ Supongamos que lg 5 es un número racional, es decir,

$$\lg 5 = \frac{m}{n}; \quad m, n \ni \mathbb{Z}.$$

Entonces:

$$10^{\frac{m}{n}} = 5,$$
$$10^m = 5^n,$$
$$2^m, 5^m = 5^n.$$

Pero la última igualdad no es posible: el número 2 figura en la descomposición del primer miembro en factores primo y no interviene en la descomposición análoga para el segundo miembro, lo que contradice la unicidad de la descomposición de los números enteros en factores primo. Por esta razón, la suposición de partida no es cierta y, por tanto, el número lg 5 es irracional. ▶

Demuéstrese que los números que siguen son irracionales:

1.4. $\sqrt{3}$. **1.5.** $\sqrt[n]{p}$, p es un número primo, $n > 1$.

1.6. $2 + \sqrt{3}$. **1.7.** $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

1.8. $\log_3 p$, p es un número primo.

1.9. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, si se sabe que π es irracional.

En los problemas 1.10—1.13 compárense los números.

1.10. $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ y $\sqrt{3} - 2$.

◀ Supongamos que se verifica la desigualdad

$$\sqrt{2} - \sqrt{5} < \sqrt{3} - 2 \tag{2}$$

Entonces:

$$\sqrt{2} + 2 < \sqrt{5} + \sqrt{3},$$
$$6 + 4\sqrt{2} < 8 + 2\sqrt{15}$$
$$2\sqrt{2} < 1 + \sqrt{15},$$
$$8 < 16 + 2\sqrt{15}.$$

Puesto que la última igualdad se verifica, entonces, debido a la equivalencia de las transformaciones realizadas, es verídica también la desigualdad inicial (2). ▶

1.11. $\log_{1/2}\frac{1}{3}$ y $\log_{1/3}\frac{1}{2}$.

1.12. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg\frac{1}{7}}$ y $\left(\frac{1}{7}\right)^{\lg\frac{1}{5}}$. **1.13.** $\log_{\log_3 2}\frac{1}{2}$ y 1.

Sin recurrir a las tablas, demuéstrense las siguientes desigualdades numéricas:

1.14. $\log_3 10+4\lg 3>4$. **1.15.** $\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}>2$.

1.16. $\log_4 26>\log_6 17$.

1.17. Demuéstrese que el módulo de un número real posee las siguientes propiedades:

a) $|x|=\max\{x,\ -x\}$;

b) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$ y $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$;

c) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ y $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$ (*desigualdades triangulares*);

d) $\sqrt{x^2}=|x|$.

Resuélvanse las ecuaciones:

1.18. $|3x-4|=\frac{1}{2}$. **1.19.** $\sqrt{x^2}+x^3=0$.

1.20. $|-x^2+2x-3|=1$, **1.21.** $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|=1$.

1.22. $\sqrt{(x-2)^2}=-x+2$.

Resuélvanse las desigualdades:

1.23. $|x-2|\geqslant 1$. **1.24.** $|x^2-7x+12|>x^2-7x+12$.

1.25. $x^2+2\sqrt{(x+3)^2}-10\leqslant 0$.

1.26. $\frac{1}{|x-1|}<4-x$. **1.27.** $\sqrt{(x+1)^2}\leqslant -x-1$.

2. Conjuntos y operaciones sobre ellos. Por *conjunto* se entiende cualquier totalidad de objetos, llamados elementos del conjunto.

La notación $a\in A$ significa que el objeto a es un elemento del conjunto A (pertenece al conjunto A); en el caso contrario se escribe $a\notin A$. Un conjunto que no contiene ningún elemento, se denomina *vacío* y se designa por el símbolo ϕ. La notación $A\subset B$ (A está contenido en B) quiere decir que todo elemento del conjunto A es un elemento del conjunto B; en este caso el conjunto A lleva el nombre de *subconjunto* del conjunto B. Los conjuntos A y B se llaman *iguales* ($A=B$), si $A\subset B$ y $B\subset A$.

Existen dos métodos principales para definir (escribir) los conjuntos.

a) El conjunto A se determina por enumeración directa de todos sus elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, es decir, se escribe en la forma

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}.$$

b) El conjunto A se determina como una totalidad de aquellos, y sólo de aquellos, elementos de cierto conjunto básico T, que poseen la propiedad común α. En este caso se emplea la designación

$$A = \{x \in T \mid \alpha(x)\},$$

donde la notación $\alpha(x)$ significa que el elemento x posee la propiedad α.

EJEMPLO 1. Descríbase por enumeración de elementos el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x-3)(x^2-1) = 0 \quad \text{y} \quad x \geqslant 0\}.$$

◀ A es un conjunto de todas las raíces enteras no negativas de la ecuación $(x-3)(x^2-1) = 0$. Por consiguiente, $A = \{1, 3\}$. ▶

Se llama *unión* de los conjuntos A y B el conjunto

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{ó} \quad x \in B\}.$$

Se llama *intersección* de los conjuntos A y B el conjunto

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}.$$

Se llama *diferencia* de los conjuntos A y B el conjunto

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \quad \text{y} \quad x \notin B\}.$$

Si, en particular, A es un subconjunto de cierto conjunto universal T, entonces la diferencia $T \setminus A$ se designa por el símbolo $\bar{A}$ y se denomina *complemento del conjunto* A (hasta que se obtenga el conjunto T).

1.28. Establézcase cuál de las dos notaciones es cierta:
a) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ ó $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$;
b) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$ ó $\{1, 2\} \subset \{1, 2\{1, 2\}\}$.

En los problemas 1.29—1.34 descríbanse los conjuntos dados por enumeración de todos sus elementos.

1.29. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$.

1.30. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + \frac{1}{x} \leqslant 2$ y $x > 0$.

1.31. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x - 4 \leqslant 0\}$.

1.32. $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1}{4} \leqslant 2^x < 5\right\}$.

1.33. $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \log_{1/2} \frac{1}{x} < 2\right\}$.

1.34. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos^2 2x = 1$ y $0 < x \leqslant 2\pi\}$.

Expónganse en un plano de coordenadas los siguientes conjuntos:

1.35. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 2 = 0\}$.

1.36. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 0\}$.

1.37. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 1)(y + 2) = 0\}$.

1.38. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \sqrt{2x+1}$ y $2x + 1 \geqslant 0\}$.

1.39. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 > 2x + 1\}$.

1.40. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2^{x+1} = y^2 + 4$ y $2^{x-1} \leqslant y\}$.

1.41. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos 2x = \cos 2y\}$.

1.42. $\left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{x} > \frac{1}{y},\ \ x \neq 0,\ y \neq 0\right\}$.

1.43. Descríbanse por enumeración de todos los elementos los conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ y $B \setminus A$, si

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 20 = 0\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 12 = 0\}.$$

La notación $m \mid n$, donde $m,\ n \in \mathbb{Z}$, significa que el número m es el divisor del número n. Descríbanse los siguientes conjuntos:

1.44. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 8$ y $x \neq 1\}$. **1.45.** $\{x \in \mathbb{Z} \mid 8 \mid x\}$.

1.46. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 12\} \cap \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 8\}$.

1.47. $\{x \in \mathbb{N} \mid 12 \mid x\} \cap \{x \in \mathbb{N} \mid 8 \mid x\}$.

1.48. Demuéstrese que:

a) la igualdad $A \cap B = B$ se verifica cuando, y sólo cuando, $B \subset A$;

b) la igualdad $A \cup B = B$ se verifica cuando, y sólo cuando, $A \subset B$.

1.49. Sean $A = (-1,\ 2]$ y $B = [1,\ 4)$. Hállense los conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ y represéntense éstos en un eje numérico.

Considerando el segmento $T = [0,\ 1]$ como un conjunto universal, hállense y expónganse en un eje numérico los complementos de los siguientes conjuntos:

1.50. $\{0,\ 1\}$. **1.51.** $(1/4,\ 1/2)$. **1.52.** $(0,\ 1/2]$.

1.53. $\{1/4\} \cup [3/4,\ 1)$.

1.54. Demuéstrese que la operación de toma del complemento posee la propiedad de *reflexividad*:

$$\overline{(\overline{A})} = A,$$

y está ligada también con la relación de inclusión $\subset$ y las operaciones $\cup$ y $\cap$ mediante las siguientes *leyes de dualidad*:

$$\text{si } A \subset B, \text{ entonces } \overline{A} \supset \overline{B};$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{y} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

1.55. Demuéstrese que las operaciones $\cup$ y $\cap$ están entrelazadas por las *leyes distributivas*:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Haciendo uso de los resultados de los problemas 1.54 y 1.55, demuéstrense las siguientes igualdades:

1.56. $\overline{A \setminus B} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \bar{A}$.

◀ Puesto que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, entonces el primer miembro de la igualdad que se demuestra adquiere la forma

$$(\overline{A/B}) \cap (\overline{\overline{A \cap B}}) = \overline{(A/B) \cup (A \cap B)} = \bar{A}. \blacktriangleright$$

1.57. $A \setminus B = A \cap \bar{B}$. **1.58.** $\overline{A \setminus B} = \bar{A} \cup B$.

1.59. $A \cap (\overline{A \setminus B}) = A \cap B$.

Las operaciones $\cup$ y $\cap$ se generalizan de un modo natural para el caso de una familia arbitraria (finita o infinita) de conjuntos. Por ejemplo, sea dada una familia de conjuntos A_n, $n \in \mathbb{N}$. La *unión* de los conjuntos de esta familia se denota por el símbolo $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y se determina como un conjunto de todos aquellos elementos, cada uno de los cuales pertenece por lo menos a uno de los conjuntos A_n. La *intersección* $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ se determina como conjunto de todos aquellos elementos que pertenecen a cada uno de los conjuntos A_n.

Para las familias dadas de conjuntos A_n, $n \in \mathbb{N}$, hállense $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$:

1.60. $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leqslant x \leqslant n\}$.

1.61. $A_n = \{3n - 2,\ 3n - 1\}$.

1.62. $A_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$.

1.63. Sea A un conjunto de todos los puntos de un plano que forman los lados de cierto triángulo inscrito en una circunferencia dada. Descríbanse la unión y la intersección de todos los conjuntos de este tipo, si:

a) los triángulos son arbitrarios;

b) los triángulos son regulares;

c) los triángulos son rectangulares.

Un conjunto X se denomina *numerable*, si puede establecerse una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto mencionado y los del conjunto $\mathbb{N}$ de todos los números naturales.

Ejemplo 2. Pruébese que el conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los números enteros es numerable.

◀ Establezcamos una correspondencia biunívoca entre los elementos de este conjunto y los números naturales, ordenando, por ejemplo, el conjunto $\mathbb{Z}$ del modo siguiente:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots,$$

y asignando, a continuación, a todo número entero su número de orden en dicha sucesión. ▶

Demuéstrese que son numerables los siguientes conjuntos:

1.64. $\{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

1.65. $\{n \in \mathbb{N} \mid n = k^2,\ k \in \mathbb{N}\}$.

1.66. $\{n \in \mathbb{N} \mid n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}\}$

1.67. Demuéstrese que si el conjunto X es numerable y $A \subset X$ es su subconjunto infinito, entonces el conjunto A es también numerable.

Haciendo uso de este resultado, demuéstrese que el conjunto

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n = k^2 - k + 1, \quad k \in \mathbb{N}\}$$

es numerable.

1.68. Sean $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ conjuntos numerables. Demuéstrese que su unión $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es un conjunto numerable.

● Sea $X_n = x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,l}, \ldots\}$. En este caso los elementos del conjunto $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ pueden escribirse en forma de la tabla siguiente:

$$\begin{array}{l}
x_{1,1},\ x_{1,2},\ \ldots,\ x_{1,l},\ \ldots,\\
x_{2,1},\ x_{2,2},\ \ldots,\ x_{2,l},\ \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n,1},\ x_{n,2},\ \ldots,\ x_{n,l},\ \ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Con el fin de demostrar la numerabilidad del conjunto $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$, resulta suficiente ahora enumerar de uno u otro modo todos los elementos de esta tabla.

Utilizando el resultado del problema 1.68, demuéstrese que son numerables los siguientes conjuntos:

1.69. $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{m}{n}$ para ciertos $m, n \neq 0$ de $\mathbb{Z}\}$, es un conjunto de todos los números racionales.

1.70. Un conjunto de todos los puntos de un plano con las coordenadas racionales.

1.71. Un conjunto de todos los polinomios de coeficientes racionales.

3. Cotas superiores e inferiores. Sea X un conjunto arbitrario no vacío de números reales. El número $M = \max X$ se denomina *elemento mayor* (*maximal*) del conjunto X, si $M \in X$ y para todo $x \in X$ se verifica la desigualdad $x \leqslant M$. Análogamente se determina el concepto de *elemento menor* (*minimal*) $m = \min X$ del conjunto X.

El conjunto X se llama *acotado superiormente*, si existe un número real a de tal índole que $x \leqslant a$ para cualquier $x \in X$. Todo número que posee dicha propiedad lleva el nombre de *cota superior* del conjunto X. Para el conjunto dado X acotado superiormente, el conjunto de todas sus cotas superiores tiene un elemento menor, que se denomina *cota superior exacta* del conjunto X y se designa mediante el símbolo $\sup X$.

Análogamente se determinan los conceptos de conjunto *acotado inferiomente*, de *cota inferior* y de *cota inferior exacta* del conjunto X; esta última se designa mediante el símbolo $\inf X$.

El conjunto X se denomina *acotado*, si está acotado superior e inferiormente.

EJEMPLO 3. Hállense las cotas superior e inferior exactas del conjunto $[0, 1)$.

◀ Este conjunto no tiene elemento maximal, puesto que para todo $x \in [0, 1)$ se encontrará un $y \in [0, 1)$ tal que sea $y > x$. El conjunto de las cotas superiores para el semi-intervalo $[0, 1)$ es el conjunto $[1, \infty)$ cuyo elemento menor es igual a 1. Por ello

$$\sup [0, 1) = 1,$$

además $1 \notin [0, 1)$.

Por otra parte, el elemento menor para el conjunto en consideración $[0, 1)$ existe y es igual a 0. El conjunto de las cotas inferiores está representado por el semi-intervalo $(-\infty, 0]$ cuyo elemento mayor es igual a cero y constituye precisamente la cota inferior exacta del semi-intervalo $[0, 1)$. De este modo,

$$\text{mín}\, [0, 1) = \inf [0, 1) = 0,$$

con la particularidad de que $0 \in [0, 1)$. ▶

1.72. Demuéstrese que la definición de la cota superior exacta aducida anteriormente es equivalente a lo siguiente:

El número M es la cota superior exacta del conjunto X, si, y sólo si:

1) $x \leqslant M$ para cualquier $x \in X$;

2) para todo $\varepsilon > 0$ existe un elemento $x \in X$ tal que $x > M - \varepsilon$.

1.73. Sea $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$.

a) Indíquense los elementos menor y mayor de este conjunto, si existen.

b) ¿Cuáles son los conjuntos de las cotas superiores e inferiores para el conjunto X? Hállense $\sup X$ e $\inf X$.

Hállense, si existen, el $\text{máx}\, X$, $\text{mín}\, X$, $\sup X$ e $\inf X$ para los conjuntos siguientes:

1.74. $X = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

1.75. $X = [-1, 1]$. **1.76.** $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leqslant x < 0\}$.

1.77. $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$. **1.78.** $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{m}{n}$; $m, n \in \mathbb{N}$ y $m < n\}$.

1.79. Sea X un conjunto de todos los números racionales que satisfacen la condición $r^2 < 2$. Muéstrese que el conjunto X no tiene un elemento mayor. Hállese $\sup X$.

1.80. Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado arbitrario. Demuéstrese que el conjunto $-X = \{x \mid -x \in X\}$ está también acotado y se verifican las igualdades

$$\sup(-X) = -\inf X, \quad \inf(-X) = -\sup X.$$

1.81. Sean X, $Y \subset \mathbb{R}$ conjuntos arbitrarios acotados superiormente. Demuéstrese que el conjunto
$X + Y = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x + y, \quad x \in X, \quad y \in Y\}$
está acotado superiormente y

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y.$$

1.82. Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente y sea $Y \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado inferiormente. Demuésrese que el conjunto

$$X - Y = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x - y, \quad x \in X, \quad y \in Y\}$$

está acotado superiormente y

$$\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y.$$

4. Lógica simbólica. Al anotar los razonamientos matemáticos resulta razonable aplicar ciertos símbolos económicos usados en la lógica. He aquí algunos símbolos de los más sencillos utilizados con mayor frecuencia.

Sean α, β ciertas *declaraciones* o *afirmaciones*, es decir, oraciones narratorias, con respecto a cada una de las cuales podemos decir si es cierta o falsa.

La notación $\overline{\alpha}$ significa «no α», es decir, negación de la afirmación α.

La notación $\alpha \Longrightarrow \beta$ significa: «de la afirmación α resulta la afirmación β» ($\Longrightarrow$ es el símbolo de *implicación*).

La notación $\alpha \Longleftrightarrow \beta$ significa: «la afirmación α es equivalente a la afirmación β», es decir, de α proviene β y de β se deduce α ($\Longleftrightarrow$ es el símbolo de *equivalencia*).

La notación $\alpha \wedge \beta$ significa «α y β» ($\wedge$ es el símbolo de *conjunción*).

La notación $\alpha \vee \beta$ significa «α ó β» ($\vee$ es el símbolo de *disyunción*).

La notación

$$\forall x \in X \alpha(x)$$

significa: «para todo elemento $x \in X$ la afirmación $\alpha(x)$ es verídica» ($\forall$ es el *cuantificador universal*).

La notación

$$\exists x \in X \alpha(x)$$

significa: «existe tal elemento $x \in X$, para el cual la afirmación $\alpha(x)$ es verídica» ($\exists$ es el *cuantificador existencional*).

Si un elemento $x \in X$, para el cual la afirmación $\alpha(x)$ es verídica no sólo existe, sino que es único, se escribe:

$$\exists! x \in X \alpha(x).$$

Ejemplo 4. Haciendo uso de los símbolos lógicos, escríbase la afirmación: «el número M es la cota superior exacta del conjunto X».

◀ La afirmación $M = \sup x$ quiere decir que se han cumplido las condiciones:

a) $\forall x \in X\ (x \leqslant M)$ (es decir, M es la cota superior del conjunto X);

b) $\forall A \in \mathbb{R}\ (\forall x \in X\ (x \leqslant A) \Rightarrow A \geqslant M)$ (es decir, M es la menor de las cotas superiores del conjunto X).

La condición b) puede escribirse, además, en la siguiente forma equivalente (véase el problema 1.72):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X\ (x > M - \varepsilon). \ ▶$$

Ejemplo 5. Haciendo uso de los símbolos lógicos, enúnciese el principio de la inducción matemática.

◀ Sea α cierta afirmación que tiene sentido para todo $n \in \mathbb{N}$. Introduzcamos un conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n)\},$$

es decir, el conjunto de todos aquellos números naturales, para los cuales la afirmación α es verídica. Entonces el principio de la inducción matemática puede enunciarse del modo siguiente:

$$((1 \in A) \wedge (n \in A \Rightarrow (n+1) \in A)) \Rightarrow A = \mathbb{N}. \qquad (3)$$

Por cuanto la notación $\alpha(n)$ significa que la afirmación α es verídica para el número $n \in \mathbb{N}$, la afirmación (3) puede ser escrita también en otra forma:

$$(\alpha(1) \wedge \alpha(n) \Rightarrow \alpha(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \alpha(n). \ ▶$$

Ejemplo 6. Escríbanse las negaciones de las declaraciones: $\forall x \in X \alpha(x)$ y $\exists x \in X \alpha(x)$.

◀ La negación de la declaración $\forall x \in X \alpha(x)$ tiene la forma $\exists x \in X \overline{\alpha(x)}$ (existe un elemento $x \in X$ tal que para él la afirmación $\alpha(x)$ es falsa). En otras palabras, para cualquier afirmación α resulta verídica la siguiente declaración:

$$\overline{\forall x \in X \alpha(x)} \Leftrightarrow \exists x \in X \overline{\alpha(x)}.$$

Análogamente

$$\overline{\exists x \in X \alpha(x)} \Leftrightarrow \forall x \in X \overline{\alpha(x)}. \ ▶$$

EJEMPLO 7. Haciendo uso de los símbolos lógicos escríbase la afirmación: «la función $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, es continua en el punto $a \in X$», como también la negación de esta afirmación.

◀ La afirmación inicial:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x \in X\ (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

La negación de esta afirmación:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta \exists x \in X\ (|x-a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon)$$

(existe tal $\varepsilon > 0$ que para cualquier δ se encontrará un número $x \in X$ que satisface las condiciones $|x - a| < \delta$ y $|f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon$). ▶

Léanse las declaraciones que vienen abajo, aclárese el sentido de ellas y establézcase si son verídicas o falsas (los símbolos x, y, z, a, b, c se emplean para denotar los números reales, siempre que no se diga lo contrario).

1.83. a) $\forall x \exists y\ (x + y) = 3$; b) $\exists y \forall x\ (x + y) = 3)$; c) $\exists x, y\ (x + y) = 3)$; d) $\forall x, y\ (x + y) = 3)$.

1.84. $\exists x, y\ (x > y > 0 \wedge x + y = 0)$.

1.85. $\forall x, y\ (x < y) \Leftrightarrow \exists z\ (x < z < y)$.

1.86. $\forall x, y\ (x^2 \neq 2y^2)$.

1.87. $\forall x\ (x^2 > x \Leftrightarrow x > 1 \vee x < 0)$.

1.88. $\forall x\ (x > 2 \wedge \overline{x > 3} \Leftrightarrow 2 < x \leqslant 3)$.

1.89. $\exists x\ (\sqrt{x^2} < x)$.

1.90. a) $\forall a, b, c\ (\exists x\ (ax^2 + bx + c = 0) \Leftrightarrow b^2 - 4Ac \geqslant 0)$;

b) $\forall a, b, c\ (\forall x\ (ax^2 + bx + c > 0) \Leftrightarrow b^2 - 4Ac < 0 \wedge \wedge a > 0)$.

1.91. a) $\forall b \exists a \forall x\ (x^2 + ax + b > 0)$;

b) $\exists b \forall a \exists x\ (x^2 + ax + b = 0)$;

c) $\exists a \forall b \exists x\ (x^2 + ax + b = 0)$.

Establézcase el sentido exacto de las declaraciones expuestas más abajo y escríbanse, haciendo uso de los símbolos lógicos. Enúnciense y escríbanse las negaciones de estas declaraciones.

1.92. a) El número x_0 es la solución de la ecuación $f(x) = 0$.

b) El número x_0 es la única solución de la ecuación $f(x) = 0$.

c) La ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución real única.

1.93. a) El conjunto $X \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente.

b) El número m es el elemento menor del conjunto X.

c) El conjunto X tiene un elemento minimal.

1.94. a) El número $m \in \mathbb{Z}$ es el divisor del número $n \in \mathbb{Z}$, ó, en la forma más breve: $m \mid n$.

b) Si el número $n \in \mathbb{Z}$ se divide por 2 y por 3, se dividirá por 6.

c) El número $p \in \mathbb{N}$ es primo.

§ 2. Funciones de una variable real

1. Concepto de función. Sea D un conjunto arbitrario de números reales. Si a todo número $x \in D$ se le ha puesto en correspondencia cierto número real bien determinado $f(x)$, se dice que en el conjunto D está definida una *función numérica* f. El conjunto D se denomina *campo de definición* y el conjunto

$$E = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), \quad x \in D\},$$

conjunto de valores de la función numérica f. La función se escribe simbólicamente en la forma $f: D \to E$, o bien $y = f(x)$.

El método analítico de definir una función es el más usado. Consiste en que por medio de una fórmula se establece de modo concreto el algoritmo de cálculo de los valores de la función $y = f(x)$ para cualquiera de los valores del *argumento* x. En este caso no se indica, comúnmente, el campo de definición de la función, entendiendo por éste el conjunto de valores del argumento x, para el cual la fórmula dada tiene sentido (campo *natural* de definición de la función).

Ejemplo 1. Hállense el campo de definición y el conjunto de valores de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

◀ El campo natural de definición de esta función es el conjunto $D = \{x \mid |x| < 1\} = (-1, 1)$, mientras que el conjunto de valores está representado por el conjunto $E = \{y \mid y \geqslant 1\} = [1, \infty)$. ▶

Supongamos que la función $f: D \to E$ es tal que para cualesquiera $x_1, x_2 \in D$ de la condición $x_1 \neq x_2$ se deduce que $f(x_1) \neq f(x_2)$. En este caso a todo número $y \in E$ se le puede asignar cierto número bien determinado $x \in D$ tal que $f(x) = y$; de este modo queda definida una nueva función $f^{-1}: E \to D$, llamada *inversa* de la función dada f.

Sean dadas las funciones $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$. Se denomina *composición* de estas funciones (o *función compuesta* obtenida por composición de las funciones f y g) la función $h = g \circ f: X \to Z$, definida por la igualdad

$$h(x) = g(f(x)), \quad x \in X.$$

2.1. Hállese la dependencia funcional entre el radio R de un cilindro y su altura H, para el volumen dado $V = 1$.

2.2. Escríbase la expresión para el volumen V de un cono en función de su superficie lateral S, dada la generatriz $l = 2$.

2.3. Escríbase la expresión para el área S de un trapecio isósceles, de bases $a = 2$ y $b = 1$, como función del ángulo α entre la base a y un lado.

2.4. A partir del instante de reposo t_0 un cuerpo se mueve con una aceleración constante a. Hállense las dependencias de la velocidad y del camino recorrido en función del tiempo de movimiento. ¿Cómo están ligados entre sí el camino recorrido y la velocidad en un instante de tiempo dado t?

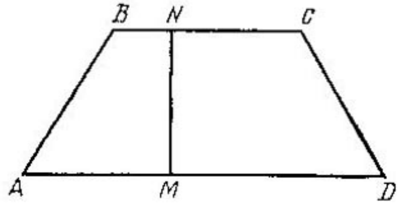


Fig. 1

2.5. En el trapecio isósceles $ABCD$ (fig. 1) de bases a y b y altura h está trazada una recta MN, perpendicular respecto de las bases, distante del vértice A a la magnitud $|AM| = x$. Exprésese el área S de la figura $ABNM$ como función de la variable x.

2.6. En una bola de radio R está inscrito un cilindro. Escríbase la dependencia funcional del volumen V del cilindro en función de la altura H de éste. Hállese el dominio de definición de esta función.

2.7. En una bola de radio R está inscrito un cono circular recto. Escríbase la dependencia funcional del área de la superficie lateral S del cono en función:

a) de su generatriz l;

b) del ángulo α en el vértice del cono en su sección axial;

c) del ángulo β formado por la generatriz y la base del cono.

Hállense los campos de definición de cada una de las funciones obtenidas.

2.8. Hállense $f(-1)$, $f(-0,001)$, $f(100)$, si $f(x) = \lg x^2$.

2.9. Hállense $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, si

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & -\infty < x \leqslant 0 \\ 2^x, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

2.10. Hállense $f(1)$, $f(a)$, $f(a+1)$, $f(a-1)$, $2f(2a)$, $f(x) = x^3 - 1$.

2.11. Hállense $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$ si $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,

Hállense el campo natural de definición D y el conjunto de valores E de cada una de las siguientes funciones:

2.12. $y=\ln(x+3)$. **2.13.** $y=\sqrt{5-2x}$.

2.14. $y=\sqrt{\operatorname{sen}\sqrt{x}}$. **2.15.** $y=\arccos\frac{1-2x}{4}$.

2.16. $y=\ln(1-2\cos x)$. **2.17.** $y=\sqrt{1-|x|}$.

2.18. $y=\lg(5x-x^2-6)$. **2.19.** $y=\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}$.

2.20. $y=2^{\arccos(1-x)}$. **2.21.** $y=e^{x^2-2}$.

Hállese el conjunto G, sobre el cual la función dada aplica el conjunto F:

2.22. $y=x^2$, $F=[-1, 2]$.

2.23. $y=|x|$, $F=\{x \mid 1\leqslant |x| \leqslant 2\}$.

2.24. $y=\frac{x}{2x-1}$, $F=(0, 1)$.

2.25. $y=\sqrt{x-x^2}$, $F=(0, 1)$.

2.26. $y=\log_3 x$, $F=(3, 27)$.

2.27. $y=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}$, $F=[0, 1/2)$.

Hállense el *conjunto de ceros* $D_0=\{x \mid f(x)=0\}$, el *dominio de valores positivos* $D_+=\{x/f(x)>0\}$ y *el de valores negativos* $D_-=\{x|\{f(x)<0\}$ para cada una de las funciones dadas:

2.28. $f(x)=1+x$. **2.29.** $f(x)=2+x-x^2$.

2.30. $f(x)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$. **2.31.** $f(x)=1-e^{\frac{1}{x}-1}$.

Pruébese que la función $y=f(x)$ satisface la ecuación funcional correspondiente:

2.32. $f(x+2)-2f(x+1)+f(x)=0$, $f(x)=kx+ b$.

2.33. $f(x)+f(x+1)=f(x(x+1))$, $f(x)=\log_a x$.

2.34. $f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_1)$, $f(x)=a^x$.

2.35. $f(x_1)+f(x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$, $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$.

En los problemas 2.36 — 2.39 hállese la función $y=f(x)$ que satisface la condición dada.

2.36. $f(x+1)=x^2-3x+2$.

◀ Sea $x+1=t$, es decir, $x=t-1$. Entonces $x^2-3x+2=t^2-5t+6$, por lo cual $f(t)=f(x+1)=x^2-3x+2=t^2-5t+6$. ▶

2.37. $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0$.

2.38. $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$, $x>0$.

2.39. $f(x_1+x_2)=\operatorname{sen} x_1 \cos x_2+\cos x_1 \operatorname{sen} x_2$.

La función $f(x)$ se llama *par* (*impar*), si su campo de definición es simétrico respecto al punto $x=0$ y $f(-x)=f(x)$, $(f(-x)=-f(x))$.

¿Cuáles de las funciones citadas en los problemas 2.40—2.45 son pares, cuáles impares y cuáles no son ni pares ni impares?

2.40. $f(x)=x^4+5x^2$. **2.41.** $f(x)=x^2+x$.

2.42. $f(x)=\frac{x}{2^x-1}$. **2.43.** $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$.

2.44. $f(x)=\operatorname{sen} x-\cos x$. **2.45.** $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$.

2.46. Demuéstrese que el producto de dos funciones pares o dos impares es una función par, y el producto de una función par por otra impar es una función impar.

Una función $f(x)$ se llama *periódica*, si existe un número positivo T (período de la función) tal que $\forall x\in D\ (f(x+T)=f(x))$.

Aclárese cuáles de las funciones dadas son periódicas y determínese su período mínimo T:

2.47. $f(x)=5\cos 7x$. **2.48.** $f(x)=\cos^2 2x$.

2.49. $f(x)=x\operatorname{sen} x$. **2.50.** $f(x)=\cos x+\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)$,

2.51. $f(x)=\operatorname{sen} x^2$, **2.52.** $f(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

Establézcase cuáles de las funciones indicadas más abajo tienen sus inversas, hállense las funciones inversas correspondientes y sus campos de definición:

2.53. $y=ax+b$. **2.54.** $y=(x-1)^3$, **2.55.** $y=\cos 2x$.

2.56. $y=\ln 2x$. **2.57.** $y=2^{\frac{x}{2}}$. **2.58.** $y=\frac{1-x}{1+x}$.

2.59. $y=x^2+1$.

◀ Para la función $y=x^2+1$ el campo natural de definición será toda la recta numérica $D=(-\infty,+\infty)$ y el conjunto de valores, el rayo $E=[1,+\infty)$. Dado que para cualquier $a\in E$ la ecuación $x^2+1=a$ tiene dos soluciones diferentes, $x_1(a)=\sqrt{a-1}$ y $x_2(a)=-\sqrt{a-1}$, entonces la función dada no tiene inversa.

No obstante, cada una de las funciones

$$y_1 = x^2 + 1, \quad D_1 = [0, +\infty),$$

o

$$y_2 = x^2 + 1, \quad D_2 = (-\infty, 0],$$

tiene su inversa igual a

$$x_1(y) = \sqrt{y-1}$$

$$x_2(y) = -\sqrt{y-1}, \text{ respectivamente. } \blacktriangleright$$

Hállense la función inversa y su campo de definición, si la función inicial viene definida en el intervalo indicado:

2.60. $y = x^2 - 1$: a) $x \in (-\infty, -1/2]$;
b) $x \in [1/2, +\infty)$.

2.61. $y = \operatorname{sen} x$: a) $x \in [-\pi/2, \pi/2]$;
b) $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$,

2.62 $y = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0], \\ 2x, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$

2.63. $y = \cos^2 x$: a) $x \in [0, \pi/2]$; b) $x \in [\pi/2, \pi]$;
c) $x \in [\pi, 3\pi/2]$.

Hállense las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ de las siguientes funciones:

2.64. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

◀ Tenemos:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

y

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|. \blacktriangleright$$

2.65. $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x^2$.

2.66. $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$.

2.67. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in [-\pi, \pi]$, $g(x) = \operatorname{arcsen} x$.

2.68. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ x, & x \in (0, +\infty), \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ -x^2, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$

2.69. Hállese $f \circ f \circ f$, si:

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. Funciones elementales y sus gráficas. Se llaman *funciones elementales fundamentales* las siguientes:

1. Función *potencial*: $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$.

2. Función *exponencial*: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

3. Función *logarítmica*: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

4. Funciones *trigonométricas*: $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

5. Funciones *trigonométricas inversas*: $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Se denomina *elemental* toda función que puede ser obtenida de un número finito de funciones elementales fundamentales con ayuda de las operaciones aritméticas y una operación de composición.

Se llama *gráfica* de la función $y = f(x)$ al conjunto

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D, \quad y = f(x)\},$$

donde $\mathbb{R}^2$ es un conjunto de puntos de un plano.

En un plano con un sistema fijo de coordenadas rectangulares cartesianas Oxy la gráfica de una función se representa mediante un conjunto de puntos $M(x, y)$, cuyas coordenadas satisfacen la relación $y = f(x)$ (representación gráfica de la función).

Al construir las gráficas a menudo se emplean los siguientes razonamientos geométricos sencillos. Si Γ es la gráfica de una función $y = f(x)$, entonces:

1) la gráfica de la función $y_1 = -f(x)$ es una imagen especular de Γ respecto al eje Ox;

2) la gráfica de la función $y_2 = f(-x)$ es una imagen especular de Γ respecto al eje Oy;

3) la gráfica de la función $y_3 = f(x - a)$ es un desplazamiento de Γ a lo largo del eje Ox en una magnitud a;

4) la gráfica de la función $y_4 = b + f(x)$ es un desplazamiento de Γ a lo largo del eje Oy en una magnitud b;

5) la gráfica de la función $y_5 = f(ax)$, $a > 0$, $a \neq 1$, es una contracción en a veces (para $a > 1$) o un estiramiento en $1/a$ veces (para $a < 1$) de Γ a lo largo del eje Ox;

6) la gráfica de la función $y_6 = bf(x)$, $b > 0$, $b \neq 1$, es un estiramiento en b veces (para $b > 1$) o una contracción en $1/b$ veces (para $b < 1$) de Γ a lo largo del eje Oy.

Al construir la gráfica de una función resulta racional, a veces, dividir el campo de definición de la misma en unos cuantos intervalos que no se intersecan y construir, luego, la gráfica en cada uno de éstos.

EJEMPLO 2. Constrúyase la gráfica de la función $y = |x| + |x^2 - 1|$.

◀ Suprimiendo los módulos, podemos escribir:

$$y = \begin{cases} x^2 - x - 1, & x \in (-\infty, -1], \\ -x^2 - x + 1, & x \in (-1, 0], \\ -x^2 + x + 1, & x \in (0, 1], \\ x^2 + x - 1, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

La gráfica de la función dada es una unión de las gráficas (parábolas) que representan dicha función en cada uno de los cuatro intervalos (fig. 2). ▶

Escríbanse en forma de una composición de funciones elementales fundamentales las siguientes funciones elementales:

2.70. $f(x) = |x|$.

2.71. $f(x) = \operatorname{sen}(\cos\sqrt{x})$.

2.72. $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x^2}$.

2.73. $f(x) = \operatorname{arcsen}(e^{\sqrt[3]{x}})$.

2.74. $f(x) = \operatorname{sen}(2^{x^2})$.

2.75. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 \log_3 x}}$.

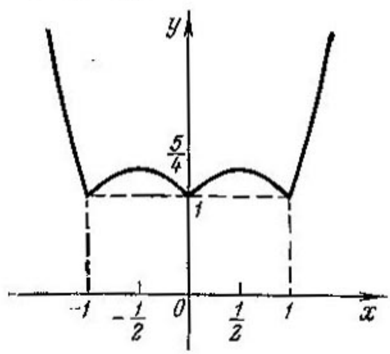


Fig. 2

Hállese la gráfica para cada una de las siguientes funciones:

2.76. $y = \sqrt{\ln \operatorname{sen} x}$.

◀ El campo natural de definición de la función dada es un conjunto

$$D = \{x \mid \operatorname{sen} x = 1\} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Por esta razón

$$\Gamma = \left\{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ 0\right) \middle|\ k \in \mathbb{Z}\right\}. ▶$$

2.77. $y = x + \sqrt{1 - |\operatorname{cosec} x|}$. **2.78.** $y = \sqrt{-|x^2 - 1|} + 2$.

2.79. $y = \sqrt{\cos x - 1} + \dfrac{x}{2}$.

2.80. $y = 1 + \sqrt{\operatorname{sen} x} + \sqrt{-\operatorname{sen} x}$.

Constrúyanse las gráficas de las siguientes funciones elementales:

2.81. $y = kx + b$, si:
a) $k = 2$, $b = 0$; b) $k = 0$, $b = -2$; c) $k = -1$, $b = -\frac{1}{3}$.

2.82. $y = y_0 + a(x - x_0)^2$, si:
a) $a = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = -1$;
b) $a = 2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$;
c) $a = -\frac{1}{2}$, $x_0 = -2$, $y_0 = \frac{3}{2}$.

2.83. $y = y_0 + \frac{k}{x - x_0}$, si:
a) $k = 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = -1$;
b) $k = -2$, $x_0 = -1$, $y_0 = -\frac{1}{2}$.

2.84. $y = a \operatorname{sen}(kx + \alpha)$, si:
a) $a = 1$, $k = 2$, $\alpha = \pi/3$;
b) $a = -2$, $k = 1/2$, $\alpha = -\pi/3$.

2.85. $y = a \operatorname{tg}(kx + \alpha)$, si:
a) $a = 3$, $k = 1/3$, $\alpha = \pi/4$;
b) $a = -1/2$, $k = 2$, $\alpha = 3\pi/2$.

2.86. $y = p \arcsin(x + q)$, si:
a) $p = 4$, $q = -1$; b) $p = -2/3$, $q = 1/2$.

2.87. $y = p \operatorname{arctg}(x + q)$, si:
a) $p = -3$, $q = 5/2$; b) $p = 2/5$, $q = -6$.

2.88. $y = a^{kx+b}$, si:
a) $a = 2$, $k = -1$, $b = 1$;
b) $a = 1/2$, $k = 2$, $b = -2$.

2.89. $y = \log_a(kx + b)$, si:
a) $a = 10$, $k = 10$, $b = -1$;
b) $a = 1/10$, $k = 1/2$, $b = 2$.

2.90. $y = |2 - x| + |2 + x|$. **2.91.** $y = x^2 + x - |x|$.

2.92. $y = x^2 - 6|x| + 9$. **2.93.** $y = |6x^2 + x| - 1$.

2.94. $y = (x^2 + 2x)\frac{|x-1|}{x-1}$.

2.95. $y = x - 1 - \sqrt{(x-1)^2}$. **2.96.** $y = \left|\frac{2x-3}{x+2}\right|$.

2.97. $y = \frac{|x| - 1}{|x+2|}$. **2.98.** $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

2.99. $y = [x]$, donde $[x]$ es la parte entera de x.

2.100. $y = \{x\}$, donde $\{x\} = x - [x]$ es la parte fraccionaria de x.

2.101. $y = 2^{|x|} - 1$. **2.102.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x+1|} + 2$.

2.103. $y = \log_{1/2} |x - 3|$. **2.104.** $y = |\log_2 (x + 1)|$.

2.105. $y = \arcsen\left(\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2.106. $y = \arccos(\cos 3x)$.

2.107. $y = \cos x + |\operatorname{sen} x|$. **2.108.** $y = |\operatorname{arctg}(x - 1)|$.

2.109. $y = x \operatorname{sgn}(\cos x)$. **2.110.** $y = \left|\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

2.111. $y = \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$. **2.112.** $y = \operatorname{sen}\left(\arcsen \frac{x+2}{5}\right)$.

Represéntense en el plano Oxy los conjuntos de puntos cuyas coordenadas satisfacen las ecuaciones dadas:

2.113. $xy = 0$. **2.114.** $|y| = |x^2 - 2|x| - 3|$.

2.115. $|x| + |y| = 1$. **2.116.** $|x + y| + |x - y| = 1$.

2.117. $||x| - |y|| = 1$.

2.118. $|2y - 1| + |2y + 1| + \frac{4}{\sqrt{3}} |x| = 4$.

§ 3. Límite de una sucesión de números reales

1. Concepto de sucesión. Se llama *sucesión* de números reales a la función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto de todos los números reales. El número $f(n)$ lleva el nombre de n-ésimo término de la sucesión y se denota por el símbolo x_n; $x_n = f(n)$ se denomina *fórmula del término general* de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Escríbanse los primeros cinco términos de la sucesión:

3.1. $x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}$. **3.2.** $x_n = n(1 - (-1)^n)$.

3.3. $x_n = \frac{3n+5}{2n-3}$. **3.4.** $x_n = (-1)^n \arcsen \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$.

Escríbase la fórmula del término general de la sucesión:

3.5. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ **3.6.** $0, 2, 0, 2, \ldots$

3.7. $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \ldots$

3.8. 1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, 0, ...

3.9. $-3,\ \frac{5}{3},\ -\frac{7}{5},\ \frac{9}{7},\ -\frac{11}{9},\ \ldots$

3.10. $0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},$
0 ...

En los problemas 3.11—3.17 se pide hallar el término mayor (menor) de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, acotada superiormente (inferiormente).

3.11. $x_n = 6n - n^2 - 5$. **3.12.** $x_n = e^{10n-n^2-24}$.

3.13. $x_n = \frac{\sqrt{n}}{9+n}$. **3.14.** $x_n = 3n^2 - 10n - 14$.

3.15. $x_n = 2n + \frac{512}{n^2}$. **3.16.** $x_n = -\frac{n^2}{2^n}$.

2. Límite de una sucesión. Se llama *límite* de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ el número a, es decir, el $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, siempre que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $N(\varepsilon)$ tal que para $n > N(\varepsilon)$ se verifica la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$. La propia sucesión se denomina en este caso *convergente*.

CRITERIO DE CAUCHY. *Para que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tenga un límite, es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un número $N(\varepsilon)$ tal que, siendo $n > N(\varepsilon)$ se cumpla la desigualdad $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, cualquiera que sea $p \in \mathbb{N}$.*

La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama *infinita decreciente*, si el $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama *infinita creciente* (convergente hacia el infinito), lo que se anota formalmente en la forma $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, siempre que para cualquier número $E > 0$ existe un número $N(E)$ tal que, siendo $n > N(E)$ se verifica la desigualdad $|x_n| > E$. Si en este caso, a partir de cierto número, todos los términos de la sucesión son positivos (negativos), se emplea la notación

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \ (\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty).$$

El número a se denomina *punto límite* de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si para todo $\varepsilon > 0$ se encuentra un número infinito de términos de dicha sucesión que satisfacen la condición $|x_n - a| < \varepsilon$.

PRINCIPIO DE BOLZANO—WEIERSTRASS. *Toda sucesión acotada tiene al menos un punto límite.*

Mayor (menor) de los puntos límites de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lleva el nombre de límite *superior* (*inferior*) de dicha sucesión y se designa por el símbolo $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \right)$.

3.17. Empleando los símbolos lógicos, escríbanse las siguientes declaraciones, como también las negaciones de ellas:

a) la sucesión está acotada;

b) la sucesión crece de modo monótono;

c) el número a es el límite de una sucesión;

d) la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es infinita creciente;

e) el número a es un punto límite de una sucesión.

3.18. Hállese $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ y determínese tal número $N(\varepsilon)$ que $|x_n - a| < \varepsilon$ sea para todo $n > N(\varepsilon)$, si:

a) $x_n = \underbrace{0{,}33\ \ldots\ 3}_{n}$, $\varepsilon = 0{,}001$;

b) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, $\varepsilon = 0{,}005$;

c) $x_n = \dfrac{1}{n}\operatorname{sen}\dfrac{\pi n}{2}$, $\varepsilon = 0{,}001$;

d) $x_n = \dfrac{5n^2+1}{7n^2-3}$, $\varepsilon = 0{,}005$.

Calcúlense los límites

3.19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+1}{7-9n}$. **3.20.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-7n+1}{2-5n-6n^2}$.

3.21. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-1}{5n+7} - \dfrac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)$.

3.22. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$. **3.23.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$.

3.24. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

3.25. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$. **3.26.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\operatorname{sen}(n^2)}{n-1}$

3.27. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

3.28. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{25} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{5^n}\right)$.

3.29. Demuéstrese que si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es infinita decreciente y $\forall n \in \mathbb{N}\ (x_n \neq 0)$, entonces la sucesión $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es infinita creciente.

Establézcase cuáles de las sucesiones dadas son infinitas crecientes:

3.30. $x_n = 2^{\sqrt{n}}$. **3.31.** $x_n = n^{(-1)^n}$.

3.32. $x_n = n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{2}$. **3.33.** $x_n = \lg(\lg n)$, $n \geqslant 2$.

Hállense todos los puntos límites de una sucesión;

3.34. $x_n = \frac{2+(-1)^n}{2-(-1)^n}$. **3.35.** $x_n = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$.

3.36. $x_n = \operatorname{arcsen} \frac{(-1)^n}{2}$.

3.37. Demuéstrese:

a) $\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$;

b) $\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$.

Para cada una de las sucesiones que siguen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hállense $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\varliminf_{n\to\infty} x_n$ y $\varlimsup_{n\to\infty} x_n$:

3.38. $x_n = 1 + \frac{1}{n}$. **3.39.** $x_n = \frac{n+1}{n} \cos^2 \frac{\pi n}{4}$.

3.40. $x_n = (-1)^n (2n+1)$.

3.41. $x_n = \frac{n+2}{n-1} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{3}$, $n \geqslant 2$.

3.42. $x_n = \frac{2+(-1)^n}{2} - \frac{1}{n}$.

3.43. Demuéstrese que la igualdad $\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n$ es una condición necesaria y suficiente para que exista el límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

§ 4. Límite de una función. Continuidad

1. Límite de una función. Sea $y = f(x)$ una función definida en el conjunto D. El número a se denomina *límite de la función* $y = f(x)$ *en el punto* x_0 y se anota $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, cualquiera que sea $x \in D$, de la condición $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ se desprende la desigualdad $|f(x) - a| < \varepsilon$.

CRITERIO DE CAUCHY. *Para que la función* $y = f(x)$ *tenga un límite en el punto* x_0, *es necesario y suficiente que para todo* $\varepsilon > 0$ *exista* $\delta(\varepsilon) > 0$

tal que se verifique $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, *siempre que* $|x' - x_0| < \delta(\varepsilon)$ *y* $|x'' - x_0| < \delta(\varepsilon)$.

Suele decirse que el número a es el *límite de la función* $x = f(x)$ *para* x *que tiende al infinito*, y se escribe $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe el número $A(\varepsilon) > 0$ tal que $|f(x) - a| < \varepsilon$, siempre que $|x| > A(\varepsilon)$.

En lo sucesivo se utilizan los siguientes *límites notables*:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e. \tag{2}$$

donde $e = 2{,}71828\ldots$ es la base de los logaritmos naturales.

A la par con el concepto de límite de una función introducido anteriormente, se emplea también el siguiente concepto de límite *unilateral*. El número a se denomina *límite de la función* $y = f(x)$ *en el punto* x_0 *por la derecha* (*por la izquierda*) y se anota $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = a$ ($\lim_{x\to x_0-0} f(x) = a$), si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que de la condición $0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)$ $(-\delta(\varepsilon) < x - x_0 < 0)$ proviene $|f(x) - a| < \varepsilon$. Análogamente se introduce el concepto de límite unilateral en el infinito $\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ y } \lim_{x\to-\infty} f(x)\right)$.

Empleando sólo el concepto de límite de una función, demuéstrese en los problemas 4.1—4.3 que el $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, y llénese la siguiente tabla:

ε	0,1	0,01	0,001
$\delta(\varepsilon)$			

4.1. $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$, $a = 4$.

4.2. $f(x) = 1/x$, $x_0 = 1$, $a = 1$.

4.3. $f(x) = \lg x$, $x_0 = 1$, $a = 0$.

Haciendo uso de los símbolos lógicos, escríbanse las siguientes afirmaciones:

4.4. $\lim_{n\to 0} f(x) = \infty$. **4.5.** $\lim_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$.

4.6. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, **4.7.** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4.8. $\lim_{x\to 0+0} f(x) = 0$. **4.9.** $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$.

4.10. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$. **4.11.** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$.

Calcúlense los límites de las siguientes expresiones racionales:

4.12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2}{3x^2-5x+1}$. **4.13.** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+3}{x^2-3}$.

4.14. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{3}{8-x^3}\right)$.

4.15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

4.16. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$; $m, n \in \mathbb{N}$.

4.17. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$. **4.18.** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1} - \dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

4.21. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

4.22. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x+1)^5+(x+2)^5+\ldots+(x+n)^5}{x^5+n^5}$, $n \in \mathbb{N}$.

4.23. Demuéstrese que si $P_n(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$, $Q_m(x) = b_0x^m + \ldots + b_m$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0 & \text{para } n < m, \\ a_0/b_0 & \text{para } n = m, \\ \infty & \text{para } n > m. \end{cases}$$

Al calcular los límites que contienen expresiones irracionales se emplean frecuentemente los siguientes procedimientos: a) introducción de la nueva variable para obtener una expresión racional; b) traslación de la irracionalidad del denominador al numerador y viceversa.

Ejemplo 1. Calcúlese el $\lim\limits_{x\to 81} \dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$.

◀ Sea $t = \sqrt[4]{x}$. En este caso

$$\lim_{x\to 81} \frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}} = \lim_{t\to 3} \frac{3-t}{9-t^2} = \lim_{t\to 3} \frac{1}{3+t} = \frac{1}{6}. \ ▶$$

EJEMPLO 2. Calcúlese el $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7}$.

◀ $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7})=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7})(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7})}{\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14}{\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7}}=0.$$ ▶

Calcúlense los límites:

4.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{5x+\sqrt[3]{x}}$. **4.25.** $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$.

4.26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

4.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x}}}}$.

4.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$.

4.29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$; $m,\ n\in\mathbb{N}$.

4.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

4.31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}$.

4.32. $\lim\limits_{x\to a}(\sqrt{x-a}-\sqrt{x})$.

4.33. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

4.34. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{(4x^2-7x+4}-2x)$.

4.35. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{3/2}(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2})$.

Haciendo uso del límite notable (1), calcúlense:

4.36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$. **4.37.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{sen} 7x}{\operatorname{tg} 3x}$.

4.38. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} \pi x$. 4.39. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3 \arcsen x}{4x}$.

4.40. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$. 4.41. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$, $\alpha \neq \beta$.

4.42. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{ctg} x\right)$.

4.43. $\lim\limits_{x\to \alpha} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2\alpha} \operatorname{sen} \frac{x-\alpha}{2}$.

4.44. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi-4x}$.

4.45. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$.

Demuéstrese las siguientes relaciones:

4.46**. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e$.

4.47*. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$.

4.48*. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a$.

Al calcular los límites del tipo $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}$, donde el $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \infty$, se utiliza el límite notable (2).

EJEMPLO 3. Calcúlese el $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}$.

◀ Tenemos

$$\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x} = \left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{3x} = \left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}\left(\frac{-2}{2+x}\cdot 3x\right)}.$$

Puesto que

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}} = \lim_{t=\frac{-2}{2+x}\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{2+x}\cdot 3x = -6,$$

entonces

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}=e^{-6}$$

(se ha utilizado aquí la continuidad de la composición de funciones continuas). ▶

Al hacer uso del límite notable (2), así como también de los resultados de los problemas 4.45—4.47, calcúlense los límites:

4.49. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$. **4.50.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$.

4.51. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. **4.52.** $\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{3}{x}}$.

4.53. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(2+x)-\ln x)$.

4.54. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. **4.55.** $\lim\limits_{x\to\infty} x(a^{\frac{1}{x}}-1)$.

4.56. $\lim\limits_{x\to1}\frac{a^x-a}{x-1}$. **4.57.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\log_a x-1}{x-a}$.

4.58. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$.

4.59. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ cuando, y sólo cuando, para cualquier sucesión de argumentos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente hacia x_0, la sucesión correspondiente $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de los valores de la función converge hacia a.

Usando los resultados del problema 4.59, demuéstrese que no existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ para las siguientes funciones:

4.60. $f(x)=\cos x$, $x_0=\infty$.

4.61. $f(x)=\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $x_0=0$.

4.62. $f(x)=x-[x]$, $x_0=\infty$.

Hállense los límites unilaterales:

4.63. $\lim\limits_{x\to3\pm0}\frac{x-3}{|k-3|}$. **4.64.** $\lim\limits_{x\to2\pm0}\frac{2+x}{4-x^2}$.

4.65. $\lim\limits_{x\to0\pm0}(2+x)^{\frac{1}{x}}$. **4.66.** $\lim\limits_{x\to2\pm0}7^{\frac{1}{2-x}}$.

4.67. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg} x$. **4.68.** $\lim\limits_{x\pm\infty}\left[\frac{1}{x}\right]$,

4.69. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}\pm 0} \dfrac{|\operatorname{tg}(4x-\pi)|}{2x-\frac{\pi}{2}}$. **4.70.** $\lim\limits_{x\to 2\pi\pm 0} \dfrac{x^2}{\cos x-1}$.

4.71. Demuéstrese que el límite de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 existe cuando, y sólo cuando, en dicho punto existen los límites izquierdo y derecho y, además, coinciden.

2. Infinitésimos e infinitos. Una función $\alpha(x)$ se llama *infinitésima* para $x \to x_0$, si el $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Los infinitésimos $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se denominan *comparables*, si existe por lo menos uno de los límites

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \quad \text{o bien} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Sean $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ unos infinitésimos comparables para $x \to x_0$, y supongamos, para concretar, que existe $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$. Entonces:

a) si $C \neq 0$, $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se llamarán infinitésimos del mismo orden. En particular, cuando $C = 1$, los infinitésimos $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se denominan *equivalentes* y se escribe $a \sim b$.

b) Si $C = 0$, entonces el infinitésimo $\alpha(x)$ se dice que es infinitésimo de *orden superior* con relación a $\beta(x)$, y se escribe $\alpha = o(\beta)$. Si, en este caso, existe un número real $r > 0$ tal que el $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^r} \neq 0$, $\alpha(x)$ se llamará infinitésimo de *orden* r con relación a $\beta(x)$.

Una función $\alpha(x)$ se denomina *infinito* para $x \to x_0$, si el $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = \infty$. Por analogía a como se hizo anteriormente para los infinitésimos, se introduce también el concepto de infinitos comparables y la clasificación de ellos.

4.72. Demuéstrese que si el $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, se encontrarán tal número $\delta > 0$ y las constantes C_1 y C_2 que se verifique

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow C_1\beta(x) \leqslant \alpha(x) \leqslant C_2\beta(x).$$

4.73. Demuéstrese que $\alpha \sim \beta$ cuando, y sólo cuando, $\alpha - \beta = 0(\alpha)$ o bien $\alpha - \beta = 0(\beta)$.

Determínese el orden de infinitud de $\alpha(x)$ con relación a $\beta(x) = x$, para $x \to 0$:

4.74. $\alpha(x) = \dfrac{3\sqrt{x^3}}{1-x}$. **4.75.** $\alpha(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$.

4.76. $\alpha(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$. **4.77.** $\alpha(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$.

4.78. $\alpha(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})$.

4.79. $\alpha(x) = 3\operatorname{sen}^3 x - x^4$.

4.80. $\alpha(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x-1}}$.

4.81. $\alpha(x) = \sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}$.

4.82. $\alpha(x) = 3^{\sqrt{x}} - 1$. **4.83.** $\alpha(x) = 2^x - \cos x$.

4.84. Demuéstrese que $\alpha(x) - \beta(x)$ tiene segundo orden de infinitud con relación a x para $x \to 0$, si:

a) $\alpha(x) = \frac{1}{1+x}$, $\beta(x) = 1 - x$;

b) $\alpha(x) = \sqrt{a^2+x}$, $\beta(x) = a + \frac{1}{2a}x \ (a \neq 0)$;

c) $\alpha(x) = (1+x)^n$, $\beta(x) = 1 + nx \ (n \in \mathbb{N})$.

Calcúlense aproximadamente las siguientes expresiones:

4.85. $1/1{,}03$. **4.86.** $\sqrt{25{,}3}$. **4.87.** $(1{,}03)^5$.

4.88. $(0{,}97)^4$.

4.89. Demuéstrese que si

$\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ y $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ para $x \to x_0$,

entonces

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Utilizando los resultados del problema 4.89, calcúlense los límites:

4.90. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsen \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$.

◀ Por cuanto $\arcsen \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sim \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ y $\ln(1-x) \sim (-x)$ para $x \to 0$, entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsen \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{-x} = -1. \ ▶$$

4.91. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\lg x}$. **4.92.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x}$.

4.93. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{\arcsen(1-2x)}$.

4.94. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{\operatorname{arcsen} 3x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}$.

4.95. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{2 \operatorname{sen}^2 x + x \operatorname{tg} 7x}$.

4.96. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2\sqrt{2}-(\cos x + \operatorname{sen} x)^3}{1-\operatorname{sen} 2x}$.

Determínese el orden de crecimiento del infinito $A(x)$ con relación a $B(x) = x$ para $x \to \infty$:

4.97. $A(x) = x^3 + 150x + 10$.

4.98. $A(x) = \sqrt{x^2+3x+5} + |x|$.

4.99. $A(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

4.100. $A(x) = \sqrt[3]{x^2-x} + \sqrt{x}$.

4.101. $A(x) = \dfrac{5x^6}{3x^4+x^3+2}$. 4.102. $A(x) = \dfrac{x^{5/2}}{x^{7/3}+1}$.

3. Continuidad de la función en un punto. Clasificación de los puntos de discontinuidad. Una función $y = f(x)$ con un campo de definición D se llama *continua* en el punto x_0, si se cumplen las siguientes tres condiciones:

a) la función $y = f(x)$ está definida en el punto x_0, es decir, $x_0 \in D$;

b) existe el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

c) el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Cumplida la condición a), las condiciones b) y c) son equivalentes a lo siguiente:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0, \quad \Delta x) = 0,$$

donde

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

es el *incremento de la función* $y = f(x)$ en el punto x_0 que corresponde al *incremento del argumento* $\Delta x = x - x_0$.

Si en el punto x_0 se viola aunque sea una de las condiciones a), b) y c), el punto x_0 recibe el nombre de punto de discontinuidad de la función $y = f(x)$. En tal situación se observan tres casos:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe, pero la función no está definida en el punto x_0, o bien queda violada la condición $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. En este caso x_0 se llama *punto de discontinuidad evitable* de la función.

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ no existe. Si en este caso existen ambos límites unilaterales $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ (evidentemente, distintos uno del otro), entonces x_0 recibe el nombre de *punto de discontinuidad de primera especie*.

c) En los demás casos x_0 lleva el nombre de *punto de discontinuidad de segunda especie*.

4.103. Utilizando los símbolos lógicos, escríbanse en el lenguaje «ε-δ» las siguientes afirmaciones:

a) la función $y = f(x)$ que tiene D como campo de definición es continua en el punto $x_0 \in D$;

b) la función $y = f(x)$ no es continua en el punto $x_0 \in D$.

Demuéstrese que las funciones que siguen son continuas en cada punto de su campo natural de definición:

4.104. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

◀ Recurriendo a la fórmula del binomio de Newton, obtenemos

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^n - x_0^n = C_n^1 x_0^{n-1} \Delta x + C_n^2 x_0^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

De aquí $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0, \Delta x) = 0$. ▶

4.105. $f(x) = a$, $a > 0$.

4.106. $f(x) = \log_a x$; $a > 0$, $a \neq 1$.

4.107. $f(x) = \operatorname{sen} x$. **4.108.** $f(x) = \operatorname{arcsen} x$.

Sea dada la función $f(x)$. ¿Para qué elección de los parámetros que figuran en su definición, será continua $f(x)$?

4.109. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & x \neq 1, \\ A, & x = 1. \end{cases}$$

4.110. $$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leqslant 1, \\ ax^2 - 2, & x > 1. \end{cases}$$

4.111. $$f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \leqslant \pi/2, \\ \operatorname{sen} x + b, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Hállense los puntos de discontinuidad de la función, investíguese su carácter, defínase la función adicionalmente, en el caso de discontinuidad evitable, «según la continuidad»:

4.112. $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x-1)}$. **4.113.** $f(x) = \dfrac{|3x-5|}{3x-5}$.

4.114. $f(x) = \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$.

4.115. $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} x$. **4.116.** $f(x) = 1 - x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

4.117. $f(x) = 3^{\frac{x}{1-x^2}}$. **4.118.** $f(x) = (x+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

4.119. $f(x) = \frac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

4.120. $f(x) = \frac{3^{\frac{1}{x-2}} - 1}{3^{\frac{1}{x-2}} + 1}$. **4.121.** $f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}$.

4.122. $f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$. **4.123.** $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$.

4.124. $$f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 \leqslant x < 1, \\ x - 1, & 1 < x \leqslant 4, \\ 1 & x \; 1. \end{cases}$$

4.125. $f(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{1-x}} + 1}$.

4.126. $$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 4 - 2x, & 1 < x < 2{,}5, \\ 2x - 7, & 2{,}5 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$$

4.127. $$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{4}, \\ 1, & x \; \frac{\pi}{4}, \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16}, & \frac{\pi}{4} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

4.128. Demuéstrese que todos los puntos de discontinuidad de una función monótona acotada son puntos de discontinuidad de primera especie.

4. Continuidad en un conjunto. Continuidad uniforme. Una función $y = f(x)$ se denomina *continua en el conjunto D*, si es continua en todo punto $x \in D$. Se llama *uniformemente continua en el conjunto D*, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para cualesquiera x', $x'' \in D$ de la desigualdad $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ se deduce que $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Teorema de Cantor. *Si la función $y=f(x)$ es continua en cierto segmento $[a, b]$, será en éste uniformemente continua.*

4.129. Demuéstrese que si $y = f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces ella:

a) está acotada en $[a, b]$;

b) alcanza en $[a, b]$ sus cotas superior e inferior (*teorema de Weierstrasse*);

c) toma en cualquier intervalo $(a', b') \subset [a, b]$ todos los valores intermedios entre $f(a')$ y $f(b')$ (*teorema de Cauchy*).

4.130. Demuéstrese que si una función $y = f(x)$ es continua en $[a, \infty)$ y existe un límite finito $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, dicha función está acotada en $[a, \infty)$.

4.131. Muéstrese que la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

toma en cualquier segmento $[0, a]$ todos los valores intermedios entre $f(0)$ y $f(a)$, no obstante no es continua en $[0, a]$.

4.132. Demuéstrese que todo polinomio de grado impar tiene por lo menos una raíz real.

4.133. Enúnciese en el lenguaje «ε-δ» la afirmación: la función $y = f(x)$ es continua en el conjunto D, pero no es uniformemente continua en dicho conjunto. Examínense a título de ejemplo las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D = (0, 1]$;

b) $f(x) = \lg x$, $D = (0, 10]$;

c) $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}$, $D = (0, 1]$.

4.134. Demuéstrese que si una función $y = f(x)$ es continua en $[a, +\infty)$ y existe un límite finito $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, dicha función es uniformemente continua en $[a, +\infty)$.

4.135. Pruébese que una función no acotada $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ es uniformemente continua en todo el eje $-\infty < x < +\infty$.

Investíguese la continuidad uniforme en los conjuntos dados de las siguientes funciones:

4.136. $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$, $D = [-1, 1]$.

4.137. $f(x) = \ln x$, $D = (0, 1]$.

4.138. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $D = (0, \pi]$.

4.139. $f(x) = e^x \cos \dfrac{1}{x}$, $D = (0, 1]$.

4.140. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $D = \mathbb{R}$.

4.141. $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [1, +\infty)$.

4.142. $f(x) = x \operatorname{sen} x$, $D = [0, +\infty)$.

§ 5. Números complejos

1. Operaciones algebraicas con los números complejos. Se denominan *números complejos* toda clase de pares ordenados $z = (x, y)$ de los números reales, para los cuales las operaciones de adición y multiplicación vienen definidas del modo siguiente:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{1}$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \tag{2}$$

El conjunto de todos los números complejos se designa por el símbolo $\mathbb{C}$.

Los números reales x e y llevan el nombre de *partes real e imaginaria* del número complejo $z = (x, y)$ y se denotan mediante los símbolos Re z o Im z, respectivamente.

Dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ se dicen *iguales* cuando, y sólo cuando, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

De las definiciones (1) y (2) se deduce que todo número complejo (x, y) puede escribirse del modo siguiente:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0). \tag{3}$$

Si, ahora, identificamos los números complejos del tipo $(x, 0)$ con los números reales x [1]), y designamos el número $(0, 1)$ por el símbolo i, entonces la igualdad (3) tendrá la expresión

$$z = x + iy$$

y se denominará *forma algebraica* del número complejo $z = (x, y)$.

5.1. Demuéstrese que las operaciones de adición y multiplicación de los números complejos poseen las siguientes propiedades:

a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (*conmutatividad de la adición*);

b) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (*asociatividad de la multiplicación*).

---

[1]) Es decir, establecemos una correspondencia biunívoca $(x, 0) \leftrightarrow x$, entre los conjuntos $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ y $\mathbb{R}$. De (1) y (2) se deduce que dicha correspondencia «conserva las operaciones»:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \leftrightarrow x_1 + x_2,$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2, 0) \leftrightarrow x_1x_2.$$

c) $z_1z_2 = z_2z_1$ (*conmutatividad de la multiplicación*);
d) $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ (*asociatividad de la multiplicación*);
e) $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2+z_1z_3$ (*ley de la distributividad*).
5.2. Demuéstrese que:
a) $\forall z_1,\ z_2 \neq 0\ \exists z\ (z_2z = z_1)$.

(el número z se llama *cociente* de la división de z_1 por z_2 y se designa mediante el símbolo $\frac{z_1}{z_2}$);
b) si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

En los problemas 5.3—5.12 ejecútense las operaciones mencionadas, representando los resultados en forma algebraica.
5.3. $(1-2i)(2+i)^2+5i$.

◀ El problema consiste en que el número complejo dado sea representado en la forma

$$(1-2i)(2+i)^2+5i = x+iy.$$

Con este fin podemos aprovechar directamente las fórmulas (1) y (2), no obstante el mismo resultado lo obtendremos con mayor facilidad de la manera siguiente. Como muestran las propiedades de las operaciones enunciadas en el problema 5.1, al adicionar y multiplicar los números complejos, representados en la forma algebraica, podemos tratarlos igual que los binomios del tipo $a+ib$, teniendo en cuenta adicionalmente que $i^2 = (0,\ 1)(0,\ 1) = (-1,\ 0) = -1$. Por esto

$$(2+i)^2 = 4+4i+i^2 = 3+4i,$$

$$(1-2i)(2+i)^2 = (1-2i)(3+4i) = 3-2i-8i^2 = 11-2i,$$

de donde obtenemos en definitiva

$$(1-2i)(2+i)^2+5i = 11-2i+5i = 11+3i. \ ▶$$

5.4. $(2+3i)(3-i)$. **5.5.** $(1+2i)^2$.
5.6. $(1-i)^3-(1+i)^3$. **5.7.** $(2i-i^2)^2+(1-3i)^3$.
5.8. $\frac{2-i}{1+i}$.

◀ El resultado puede ser obtenido empleando directamente la fórmula del problema 5.2. Hemos de notar, sin embargo, que $(1+i)(1-i) = 2$ es un número real. Por eso, al multiplicar el numerador y denominador de la fracción dada por $1-i$, encontramos

$$\frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2}-\frac{3}{2}i. \ ▶$$

5.9. $\frac{1}{1+4i}+\frac{1}{4-i}$. **5.10.** $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$.

5.11. $\frac{(1+i)(3+i)}{3-i}-\frac{(1-i)(3-i)}{3+i}$.

5.12. $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$.

Híllense las soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

5.13. $(1+i)x+(-2+5i)y=-4+17i$.

5.14. $12((2x+i)(1+i)+(x+y)(3-2i))=$
$=17+6i$.

Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

5.15. $(3-i)z_1+(4+2i)z_2=1+3i,$
$(4+2i)z_1-(2+3i)z_2=7.$

5.16. $(2+i)z_1+(2-i)z_2=6,$
$(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8.$

Si en un plano se ha introducido un sistema de coordenadas rectangulares cartesianas Oxy, entonces a todo número complejo $z=x+iy$ se le puede asignar cierto punto $M(x, y)$ de abscisa x y ordenada y.

En este caso suele decirse que el punto $M(x, y)$ *representa* el número complejo $z=x+iy$. El plano, en el que se representan los números complejos, se denomina *plano complejo*, el eje Ox, *eje real* y el Oy, *eje imaginario*.

El número $r=\sqrt{x^2+y^2}$ se llama *módulo* del número complejo $z=x+iy$ y se denota por el símbolo $|z|$. El módulo del número z es igual a la distancia entre el punto M que representa este número y el origen de coordenadas.

Toda solución φ del sistema de ecuaciones

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \operatorname{sen}\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{4}$$

recibe el nombre de *argumento* del número complejo $z=x+iy\neq 0$. Todos los argumentos del número z difieren en números enteros múltiples de 2π y se designan por el símbolo único $\operatorname{Arg} z$. Cada valor del argumento coincide con la magnitud φ de cierto ángulo al cual se debe girar el eje $\widetilde{Ox}$ hasta que coincida con el radio vector $\overline{OM}$ del punto M (en este caso $\varphi>0$, si el giro se realiza en sentido antihorario, y $\varphi<0$, en el caso contrario). Se denomina *valor principal* del argumento al valor de $\operatorname{Arg} z$ que satisface la condición $0\leqslant \operatorname{Arg} z<$ $<2\pi$, y se denota mediante el símbolo $\arg z$.

En algunos casos se llama valor principal del argumento el valor de $\operatorname{Arg} z$ que satisface la condición $-\pi<\operatorname{Arg} z\leqslant\pi$.

De las correlaciones (4) se deduce que para todo número complejo z se verifica la igualdad

$$z=|z|(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi),$$

llamada *forma trigonométrica* del número z.

EJEMPLO 1. Represéntese en la forma trigonométrica el número complejo $z=-2+2i\sqrt{3}$.

◀ Tenemos

$$r=|z|=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=4,$$
$$\cos\varphi=-1/2, \quad \operatorname{sen}\varphi=\sqrt{3}/2,$$

por lo cual el valor principal del argumento $\arg z = 2\pi/3$ y, por ende, $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$. ▶

Represéntense en forma trigonométrica y exprésense mediante los puntos en un plano complejo los siguientes números complejos:

5.17. $-i$. **5.18.** $1 - i\sqrt{3}$. **5.19.** $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.20. $\frac{1-i}{1+i}$. **5.21*.** $-\cos\frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$.

5.22. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$. **5.23.** $1 + \cos\frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$.

El número complejo $x - iy$ se llama *conjugado* del número complejo $z = x + iy$ y se designa por el símbolo $\bar{z}$.

Demuéstrese las igualdades siguientes:

5.24. $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$ y $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

5.25. $\overline{(\bar{z})} = z$. **5.26.** $|\bar{z}| = |z|$.

5.27. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

5.28. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ y $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

5.29. $z\bar{z} = |z|^2$.

5.30. Calcúlense:

a) $z_1\bar{z}_2$ y $\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2$, si $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} + i$,

b) $z_1\bar{z}_2$ y $\frac{\bar{z}_1^2}{z_2}$, si $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 + 2i$.

5.31. Sea $p(z)$ un polinomio arbitrario de coeficientes reales. Demuéstrese que para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se verifica la igualdad $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$.

Resuélvanse las siguientes ecuaciones:

5.32. $|z| - z = 1 + 3i$. **5.33.** $|z| + z = 2 + i$.

5.34. Demuéstrese las igualdades y aclárese su significado geométrico:

a) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ y $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;

b) $\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg}(z_1 z_2)$ y $\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.

(las igualdades b) se entienden en el sentido de que los números que figuran en los primeros miembros coinciden con ciertos valores de los argumentos z_1z_2 y $\frac{z_1}{z_2}$).

Aclárese el significado geométrico de las siguientes transformaciones del plano complejo:

5.35. $z \to z - 2$. **5.36.** $z \to z + (3 - i)$.

5.37. $z \to iz$. **5.38.** $z \to \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)\,z$.

5.39. $z \to -z$. **5.40.** $z \to 2z$.

5.41. $z \to \frac{z}{1-i}$. **5.42.** $z \to \bar{z}$.

5.43. Demuéstrese que:

a) la magnitud $|z_1 - z_2|$ es igual a la distancia en el plano complejo entre los puntos M_1 y M_2, que representan los números complejos z_1 y z_2;

b) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ y $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$ (*desigualdad triangular*). ¿Cuál es el significado geométrico de estas desigualdades?

5.44. Demuéstrense las identidades:

a) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (¿cuál es el significado geométrico de esta igualdad?);

b) $^*|z_1| + |z_2| = \left|\frac{z_1+z_2}{2} + \sqrt{z_1z_2}\right| + \left|\frac{z_1+z_2}{2} - \sqrt{z_1z_2}\right|$.

Dése, en los problemas 5.45—5.55, la descripción geométrica de los conjuntos de todos los puntos de un plano complejo que satisfacen las siguientes condiciones:

5.45. $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. **5.46.** $0 \leqslant \operatorname{Im} z < 1$. **5.47.** $|\operatorname{Im} z| \leqslant 2$.

5.48. $|z| < 1$. **5.49.** $|z + i| = 2$.

5.50. $1 < |z + 2| \leqslant 2$. **5.51.** $|z| > 1 - \operatorname{Re} z$.

5.52. $|z - i| = |z + 2|$. **5.53.** $0 < \arg z \leqslant \pi/4$.

5.54. $|\pi - \arg z| < \pi/4$. **5.55.** $z = \bar{z}$.

5.56. Sea $z \neq -1$. Demuéstrese que $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1} = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$.

Sea φ un número real arbitrario. Mediante el símbolo $e^{i\varphi}$ se denota un número complejo $\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$. Con ayuda de esta designación todo número complejo $z = |z|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ puede escribirse en la *forma exponencial*

$$z = |z|\,e^{i\varphi}.$$

Represéntense en la forma exponencial los siguientes números complejos:

5.57. $\frac{7+24i}{5}$. **5.58.** $5-12i$. **5.59.** $-3-4i$.

5.60. $-2+i$. **5.61.** $\operatorname{sen}\alpha - i\cos\alpha$.

5.62. $\operatorname{sen}\alpha + i(1-\cos\alpha)$.

5.63. Demuéstrese que el símbolo $e^{i\varphi}$ posee las siguientes propiedades:

a) $\forall n \in \mathbb{Z}\ (e^{i2\pi n}=1)$; b) $\overline{e^{i\varphi}}=e^{-i\varphi}$;

b) $e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ y $\dfrac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

5.64. Represéntense los números dados z_1 y z_2 en la forma exponencial y realícense con ellos las operaciones indicadas:

a) z_1z_2, $\dfrac{z_1^2}{z_2}$, si $z_1=2\sqrt{3}-2i$, $z_2=3-3\sqrt{3}i$;

b) $z_1^2\bar{z}_2$, $\dfrac{\bar{z}_2}{z_1}$, si $z_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $z_2=\sqrt{8}-i\sqrt{8}$.

5.65. Demuéstrense las *fórmulas de Euler*

$$\cos = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

5.66. Demuéstrese la *fórmula de Moivre:* si $z=re^{i\varphi}$, entonces

$$z^n = r^n e^{in\varphi},$$

o bien, en la forma geométrica,

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\operatorname{sen} n\varphi).$$

Haciendo uso de la fórmula de Moivre, calcúlense las siguientes expresiones:

5.67. $(1+i)^{10}$. **5.68.** $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$. **5.69.** $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

5.70. $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$.

5.71. Demuéstrense las igualdades:

a) $(1+i)^n=2^{n/2}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{4}\right)$;

b) $(\sqrt{3}-i)^n=2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6}-i\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{6}\right)$.

5.72. Haciendo uso de las fórmulas de Euler, exprésense en términos de los senos y cosenos de los arcos múltiples las funciones:

a) $\cos^3 \varphi$; b) $\operatorname{sen}^3 \varphi$.

Haciendo uso de la fórmula de Moivre, exprésense en términos de $\cos \varphi$ y $\operatorname{sen} \varphi$ las siguientes funciones:

5.73. $\cos 3\varphi$. **5.74.** $\operatorname{sen} 3\varphi$.

5.75. $\cos 4\varphi$. **5.76.** $\operatorname{sen} 4\varphi$.

Sea $a = re^{i\varphi}$ un número complejo fijo. Entonces, la ecuación $z^n = a$, $n \in \mathbb{N}$, tiene exactamente n diferentes soluciones $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, con la particularidad de que dichas soluciones se determinan por la fórmula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} k\right)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

(aquí $\sqrt[n]{r}$ es un número positivo real). Los números z_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, se denominan *raíces de n-ésimo grado* del número complejo a y se designan por el símbolo $\sqrt[n]{a}$.

EJEMPLO 2. Hállense todas las raíces de tercer grado del número $a = -2 + 2i\sqrt{3}$.

◀ Puesto que $a = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right)$, entonces

$$(\sqrt[3]{a})_k = \sqrt[3]{4}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{4} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} k\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} k\right)\right),$$

donde $k = 0, 1, 2$.

Para $k = 0$: $(\sqrt[3]{a})_0 = \sqrt[3]{4}\left(\cos \frac{2\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{9}\right)$.

Para $k = 1$: $(\sqrt[3]{a})_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos \frac{8\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{8\pi}{9}\right)$.

Para $k = 2$: $(\sqrt[3]{a})_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos \frac{14\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{14\pi}{9}\right)$. ▶

5.77. Hállense y exprésense en un plano complejo todas las raíces de segundo, tercero y cuarto grados de la unidad.

Hállense todos los valores de las raíces:

5.78. $\sqrt{i}$. **5.79.** $\sqrt[4]{-1}$. **5.80.** $\sqrt[9]{-9}$.

5.81. $\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}$. **5.82.** $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i}$.

5.83. $\sqrt[5]{-1-i}$.

5.84. $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$. **5.85.** $\sqrt[5]{(2-2i)^4}$.

5.86. Demuéstrese que las raíces cuadradas de un número complejo pueden hallarse según la fórmula

$$\sqrt{z}=\sqrt{x+iy}=\pm\left(\sqrt{\frac{|z|+x}{2}}+i\operatorname{sen} y\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right).$$

El empleo de la forma exponencial de números complejos en muchos casos simplifica considerablemente los cálculos.

EJEMPLO 3. Calcúlese la suma

$S(\varphi)=\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}2\varphi+\ldots+\operatorname{sen}n\varphi,\quad \varphi\neq 2\pi m,\quad m\in\mathbb{Z}$.

◀ Puesto que $\operatorname{sen}\varphi=\operatorname{Im}e^{i\varphi}$, entonces, recurriendo a la fórmula para la suma de una progresión geométrica, obtenemos:

$$S(\varphi)=\operatorname{Im}e^{i\varphi}+\operatorname{Im}e^{i2\varphi}+\ldots+\operatorname{Im}e^{in\varphi}=$$

$$=\operatorname{Im}(e^{i\varphi}+e^{i2\varphi}+\ldots+e^{in\varphi})=\operatorname{Im}\frac{e^{i\varphi}(1-e^{in\varphi})}{1-e^{i\varphi}}=$$

$$=\operatorname{Im}\frac{e^{i\varphi+i\frac{n}{2}\varphi}\left(e^{-i\frac{n}{2}\varphi}-e^{i\frac{n}{2}\varphi}\right)}{e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{-i\frac{\varphi}{2}}-e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{n\varphi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}\operatorname{Im}e^{i\frac{n+1}{2}\varphi}=\frac{\operatorname{sen}\frac{n\varphi}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\varphi}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}.\ ▶$$

Calcúlense las sumas:

5.87. $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\ldots+\cos n\varphi$.

5.88. $\cos\varphi+\cos 3\varphi+\cos 5\varphi+\ldots+\cos(2n-1)\varphi$.

5.89. $\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}3\varphi+\operatorname{sen}5\varphi+\ldots+\operatorname{sen}(2n-1)\varphi$.

2. Polinomios y ecuaciones algebraicas. Se denomina *polinomio* (o *función racional entera*) de n-ésimo grado una función del tipo

$$p_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+z_0, \tag{5}$$

donde $z\in\mathbb{C}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son los coeficientes (generalmente complejos), con la particularidad de que $a_n\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$. La ecuación

$$a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=0,\quad a_n\neq 0, \tag{6}$$

se llama *ecuación algebraica* de n-ésimo grado. El número z_0, para el cual $p_n(z_0)=0$, lleva el nombre de raíz del polinomio (5) o de la ecuación (6).

TEOREMA DE GAUSS (teorema fundamental del álgebra). *Todo polinomio de grado no nulo tiene por lo menos una raíz* (generalmente compleja).

El número z_0 es una raíz del polinomio $p_n(z)$, si, y sólo si, $p_n(z)$ se divide sin resto por el polinomio $z - z_0$, es decir, si

$$p_n(z) = (z - z_0)\, q_{n-1}(z),$$

donde $q_{n-1}(z)$ es un polinomio de $(n-1)$-ésimo grado. Si $p_n(z)$ se divide sin resto por $(z - z_0)^k$, $k \geqslant 1$, pero no se divide por $(z - z_0)^{k+1}$, entonces z_0 se llama *raíz de multiplicidad* k del polinomio $p_n(z)$; en este caso

$$p_n(z) = (z - z_0)^k\, q_{n-k}(z),$$

donde $q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

El teorema de Gauss puede ser precisado de la manera siguiente: *un polinomio de n-ésimo grado tiene exactamente n raíces, si cada raíz se cuenta tantas veces cual es su multiplicidad.*

Si los coeficientes del polinomio (5) son números reales y $z_0 = x_0 + iy_0$ es su raíz compleja, entonces el número conjugado $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$ será también una raíz de dicho polinomio, con la particularidad de que las raíces z_0 y $\bar{z}_0$ son de multiplicidad igual (véase el problema 5.31).

Supongamos que el polinomio $p_n(z)$ tiene las raíces $z_1, z_2, \ldots, z_m$ $(m \leqslant n)$ cuyas multiplicidades son $k_1, k_2, \ldots, k_m$, respectivamente $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$ Podemos, en esto caso, descomponerlo en factores lineales, es decir, resulta válida la identidad

$$p_n(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2}, \ldots, (z - z_m)^{k_m}.$$

Si los coeficientes del polinomio son números reales, entonces, al reunir los paréntesis correspondientes a las raíces complejas conjugadas, podemos descomponer este polinomio en un producto de factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales.

Ejemplo 4. Hállense las raíces del polinomio $z^6 + 2z^3 + 1$ y desarróllese el mismo en factores.

◀ Puesto que $z^6 + 2z^3 + 1 = (z^3 + 1)^2$, entonces las raíces de este polinomio son las de tercer grado de -1:

$$z_1 = -1;$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_3 = \cos\frac{\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Cada raíz, además, tiene una multiplicidad de $k = 2$. La descomposición de este polinomio en factores lineales tiene por expresión

$$z^6 + 2z^3 + 1 = (z + 1)^2 \left(z - \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \left(z - \left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2.$$

Al reunir los dos últimos paréntesis en un factor, obtendremos una descomposición en factores con coeficientes reales

$$z^6 + 2z^3 + 1 = (z + 1)^2 (z^2 - z + 1)^2. \blacktriangleright$$

Resuélvanse las ecuaciones cuadráticas:
5.90. $z^2 + 2z + 5 = 0$. **5.91.** $4z^2 - 2z + 1 = 0$.
5.92. $z^2 + (5 - 2i) z + 5 (1 - i) = 0$.
5.93. $z^2 + (2i - 3) z + 5 - i = 0$.
Resuélvanse las ecuaciones binomias:
5.94. $z^3 - 1 = 0$. **5.95.** $z^3 + 1 = 0$.
5.96. $(z + 1)^4 - 16 = 0$. **5.97.** $(z + 1)^4 + 16 = 0$.
Resuélvanse las ecuaciones bicuadradas
5.98. $z^4 + 18z^2 + 81 = 0$. **5.99.** $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$.
5.100. $z^4 + 9z^2 + 20 = 0$.
5.101. $z^4 - (1 + i) z^2 + 2 (1 + i) = 0$.
Resuélvanse las ecuaciones trinomias:
5.102. $z^6 + 4z^3 + 3 = 0$. **5.103.** $z^8 + 15z^4 - 16 = 0$.
5.104.* Muéstrese que todas las raíces de la ecuación

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{(1+ia)}{(1-ia)} \quad (a \in \mathbb{R})$$

son reales y distintas.

Descompóngase en factores lineales y cuadráticos de coeficientes reales los polinomios siguientes:

5.105. $z^4 - 1$. **5.106.** $z^4 + 1$. **5.107.** $z^4 + z^2 + 1$.

5.108. $z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10$; se conoce la raíz $z_1 = -1 + i$.

5.109. $z^5 + z^4 + z^3 - z^2 - z - 1$; se conoce la raíz doble $z_1 = z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.110. $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100$; se conoce la raíz $z_1 = 1 + 2i$.

3. Límite de la sucesión de números complejos. El número a se denomina *límite* de la sucesión de números complejos $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $N(\varepsilon)$ tal que, siendo $n > N(\varepsilon)$, se cumple la desigualdad $|z_n - a| < \varepsilon$.

La sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se llama *convergente al infinito* y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, si para cualquier $E > 0$ existe un número $N(E)$ tal que, siendo $n > N(E)$, se verifica la desigualdad $|z_n| > E$.

5.111. Sea $x_n = \mathrm{Re}\, z_n$ e $y_n = \mathrm{Im}\, z_n$. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$ cuando, y sólo cuando, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \mathrm{Re}\, a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \mathrm{Im}\, a$.

5.112. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$, y $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = b \neq \infty$. Demuéstrese que:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n + w_n) = a + b$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n w_n = ab$.

5.113. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$, y $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = b \neq 0$. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{a}{b}$.

Calcúlense los límites:

5.114. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 - i + \frac{1}{n}(1+i)\right)$. **5.115.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-in}{1+in}$.

5.116. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{3n+2} \cdot \frac{in^2}{n^2+n-4i}$.

5.117. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2i)(3+7in)}{(2-i)n^2+1}$.

5.118. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i^n}{n}\right)$. **5.119.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} e^{in\frac{\pi}{4}}$.

5.120. $\lim\limits_{n\to\infty} (2i)^n$. **5.121.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2^n + i\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$.

5.122. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5i} - \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(5i)^n}\right)$.

1.123. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{i^k}{3^k}$. **5.124.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \operatorname{sen} \frac{1}{n} +\right.$
$\left. + i\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

5.125. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(2-3i)^k}$.

5.126. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3+2i}{n}\right)^n$.

Demuéstrese que las sucesiones que siguen son acotadas, pero divergen:

5.127. $z_n = i^n$. **5.128.** $z_n = (-1)^n + i\frac{2-n}{2+n}$.

5.129. $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{i\frac{n\pi}{2}}$.

5.130. $z_n = \frac{1}{2}(i^n + (-i)^n)$.

Pruébese que las sucesiones siguientes no están acotadas, pero no convergen al infinito:

5.131. $z_n = n(1 + i^n)$. **5.132.** $z_n = (e^{i\frac{\pi n}{2}} - i)\ln n$.

5.133. Sea $r_n = |z_n|$ y $\varphi_n = \arg z_n$. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ $(0 < |a| < \infty)$ cuando, y sólo cuando, el $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = |a|$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \arg\varphi$ (siendo eligido adecuadamente el campo de valores principales de argumentos).

El resultado del problema 5.133 se usa a menudo al calcular los límites de las sucesiones complejas.

Ejemplo 5. Sea φ un número real $(\varphi \neq 0)$. Demuéstrese que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n = \cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi = e^{i\varphi}.$$

◀ Analicemos dos sucesiones reales:

$$r_n = \left|\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n\right| = \left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{n/2},$$

$$\varphi_n = \arg\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n = n\arg\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right) = n\,\mathrm{arctg}\,\frac{\varphi}{n}.$$

Calculemos sus límites:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{\varphi^2}}\right)^{\frac{\varphi^2}{2n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi^2}{2n}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{arctg}\,\frac{\varphi}{n} = \varphi\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{arctg}\,\frac{\varphi}{n}}{\frac{\varphi}{n}} = \varphi.$$

De aquí obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n = 1\cdot(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi) = e^{i\varphi}. \ ▶$$

5.134. Sea $z = x + iy$. Demuéstrese (véase el ejemplo 5) que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y) = e^{x+iy} = e^z.$$

Demuéstrese la convergencia de las sucesiones a seguir y hállense sus límites:

5.135. $z_n = z^n$, $|z| < 1$. **5.136.** $z_n = nz^n$, $|z| < 1$.
5.137. $z_n = 1 + z + \ldots + z^n$, $|z| < 1$.

5.138. $z_n = \dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$, $|z| > 1$.

5.139. Calcúlese

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+z_1+\ldots+z_1^n}{1+z_2+\ldots+z_2^n},$$

si $|z_1| < 1$ y $|z_2| < 1$.

5.140. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$. Demuéstrese que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n} = a.$$

RESPUESTAS

1.1. La aproximación por defecto 0,1; 0,10; 0,101. La aproximación por exceso: 0,2; 0,11; 0,102. **1.2.** a) $\frac{11}{9}$; b) $\frac{901}{300}$; c) $\frac{2183}{19800}$. **1.11.** $\log_{1/2}\frac{1}{3}\log_{1/3}\frac{1}{2}$. **1.12.** $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg\frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\lg\frac{1}{5}}$. **1.13.** $\log_{\log_3 2}\frac{1}{2} > 1$. **1.18.** $\left\{\frac{7}{6}, \frac{3}{2}\right\}$. **1.19.** $\{-1, 0\}$. **1.20.** ϕ. **1.21.** $\{0, 2\}$. **1.22.** $(-\infty, 2]$. **1.23.** $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$. **1.24.** $(3, 4)$. **1.25.** $[1-\sqrt{17}, -1+\sqrt{5}]$. **1.26.** $\left(-\infty, \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$. **1.27.** $(-\infty, -1]$. **1.28.** a) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$; b) ambas notaciones son justas. **1.29.** $A = \{0, 1, 2\}$. **1.30.** $A = \{1\}$. **1.31.** $A = \{1, 2, 3, 4\}$. **1.32.** $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. **1.33.** $A = \{1, 2, 3\}$. **1.34.** $A = \{\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$. **1.35.** Véase la fig. 3. **1.36.** Véase la fig. 4 (la frontera de la región rayada no pertenece al conjunto). **1.37.** Véase la fig. 5. **1.38.** Véase la fig. 6 (la línea de trazos no pertenece al conjunto). **1.39.** Véase la fig. 7 (la frontera de la región rayada no pertenece al conjunto). **1.40.** El punto (2, 2). **1.41.** Véase la fig. 8. **1.42.** Véase la fig. 9 (la frontera de la región rayada no pertenece al conjunto). **1.43.** $A \cup B = \{-5, 3, 4\}$; $A \cap B = \{4\}$; $A \setminus B = \{-5\}$; $B \setminus A = \{3\}$. **1.44.** $\{2, 4, 8\}$. **1.45.** $\{8k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. **1.46.** $\{1, 2, 4\}$. **1.47.** $\{24k \mid k \in \mathbb{N}\}$. **1.49.** $A \cup B = (-1, 4)$; $A \cap B = [1, 2]$; $A \setminus B = (-1, 1)$; $B \setminus A = (1, 4)$. **1.50.** $(0, 1)$. **1.51.** $[0, {}^1/_4] \cup [{}^1/_2, 1]$. **1.52.** $\{0\} \cup ({}^1/_2, 1)$. **1.53.** $[0, 1/4) \cup (1/4, 3/4) \cup \{1\}$. **1.60.** $\mathbb{Z}$; $\{-1, 0, 1\}$. **1.61.** $\{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 3k, k \in \mathbb{N}\}$; $\varnothing$. **1.62.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1/n, n \in \mathbb{N}, \{1\}$. **1.63.** a) Todos los puntos del círculo dado; $\varnothing$; b) todos los puntos del anillo encerrado entre la circunferencia dada y una circunferencia concéntrica de radio dos veces menor; $\varnothing$; c) todos los puntos del círculo; el centro del círculo. **1.73.** a) mín X no existe; máx $X = 1$; b) $[1, +\infty)$; $(-\infty, 0]$; sup $X = 1$; inf $X = 0$. **1.74.** $^1/_2$; no existe; $^1/_2$; 0. **1.75.**

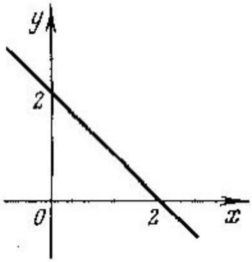


Fig. 3

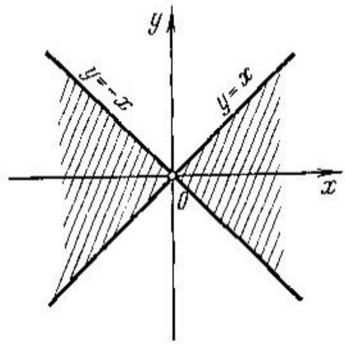


Fig. 4

1; —1; 1; —1. **1.76.** No existe; —5, 0; —5. **1.77.** No existe; no existe; 0; no existe. **1.78.** No existe; no existe; 1; 0. **1.79.** sup $X = \sqrt{2}$. **1.83.** a) Verídica; b) falsa; c) verídica; d) falsa. **1.84.** Falsa. **1.85.** Verídica. **1.86.** Falsa. **1.87.** Verídica. **1.88.** Verídica. **1.89.** Falsa. **1.90.** a) Verídica; b) falsa. **1.91.** a) Verídica; b) verídica; c) falsa. **1.92.** a) $f(x_0) = 0$; $f(x_0) \neq 0$. b) $f(x_0) = 0 \wedge \forall x\,(x \neq x_0 \Rightarrow f(x_0) \neq 0)$; $f(x_0) \neq 0 \vee (f(x_0) = 0 \wedge \exists x\,(x \neq x_0 \wedge f(x) = 0))$; c) $\exists x_0\,(f(x_0) = 0) \wedge (\forall x\,(x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \neq 0))$; $\forall x\,(f(x) \neq 0) \vee \exists (x_1, x_2\,(x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2) = 0))$. **1.93.** a) $\exists M \forall x \in X\,(x \leqslant M)$; $\forall M \exists x \in X\,(x > M)$. b) $(m \in X) \wedge (\forall x \in X\,(m \leqslant x))$; $(m \in X) \vee (\exists x \in X\,(x < m))$. c) $(\exists m \in X) \wedge (\forall x \in X\,(m \leqslant x))$; $\forall x' \in X \exists x \in X\,(x < x')$. **1.94.** a) $\exists k \in \mathbb{Z}\,(n = km)$; $\forall k \in \mathbb{Z}\,(n \neq km)$. b) $(2 \mid n \wedge 3 \mid n) \Rightarrow 6 \mid n$; $(2 \mid n \wedge 3 \mid n) \wedge 6 \nmid n$. (Observación: Puesto que la declaración inicial es verídica, la negación de ella es falsa). c) $\forall n \in \mathbb{N}\,(n \mid p \Rightarrow (n = 1 \vee n = p))$; $\exists n \in \mathbb{N}\,(n \mid p \wedge (n \neq 1 \wedge n \neq p))$.

2.1. $R = \sqrt{\frac{1}{\pi H}}$. **2.2.** $V = \frac{S^2 \sqrt{16\pi^2 - S^2}}{24\pi^2}$.

2.3. $S = \frac{3}{4} \operatorname{tg} \alpha$. **2.4.** $v = a(t - t_0)$; $s = \frac{a}{2}(t - t_0)^2$; $s = \frac{v^2}{2a}$, donde $t \geqslant t_0$.

$$
\textbf{2.5.}\quad S_{ABNM} = \begin{cases} \dfrac{x^2 h}{a-b}, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{a-b}{2}, \\[2mm] hx + \dfrac{(a-b)\,h}{4}, & \dfrac{a-b}{2} < x < \dfrac{a+b}{2}, \\[2mm] \dfrac{a+b}{2}\,h - \dfrac{(a-x)^2\,h}{a-b}, & \dfrac{a+b}{2} < x \leqslant a. \end{cases}
$$

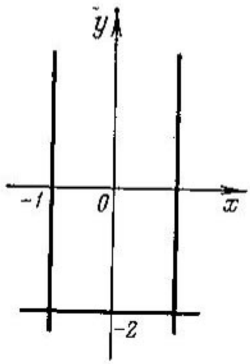


Fig. 5

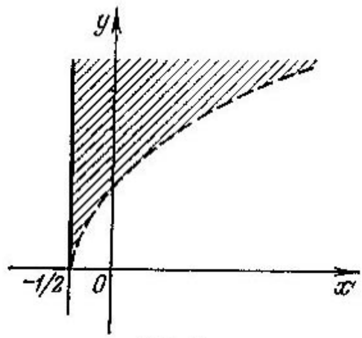


Fig. 6

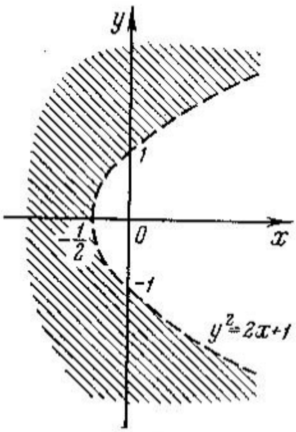


Fig. 7

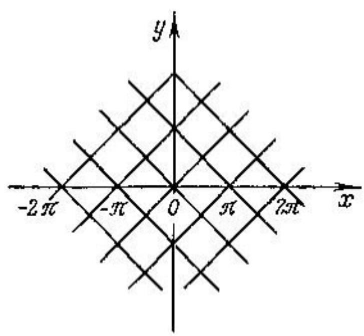


Fig. 8

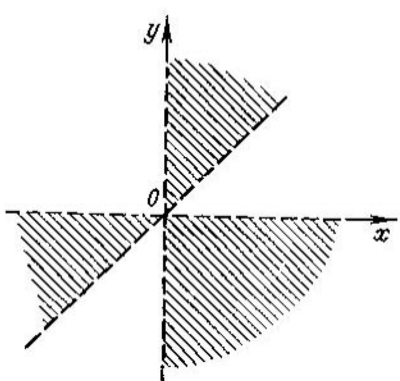


Fig. 9

2.6. $V=\frac{1}{4}\pi h(4R^2-h^2)$, $D=[0,2R]$. 2.7. a) $S=\frac{\pi l^2}{2R}\sqrt{4R^2-l^2}$, $D=[0, 2R]$; b) $S=4\pi R^2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$, $D=[0, \pi]$; c) $S=$ $=4\pi R^2\cos\beta\operatorname{sen}^2\beta$, $D=[0, \pi/2]$. 2.8. 0, $-6{,}4$. 2.9. -1, 0, 1, 2, 4. 2.10. 0, a^3-1, a^3+3a^2+3a, a^3-3a^2+3a-2, $16a^3-2$. 2.11. 1, $\frac{1+x}{1-x}$, $-\frac{x}{2+x}$, $\frac{2}{1+x}$, $\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{1+x}{1-x}$. 2.12. $D=(-3, \infty)$, $E=(-\infty, +\infty)$. 2.13. $D=(-\infty, 5/2)$, $E=$ $=[0, +\infty)$. 2.14. $D=\bigcup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}[4\pi^2k^2, \pi^2(2k+1)^2]$, $E=[0, \pi]$. 2.15. $D=\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$, $E=[0, \pi]$. 2.16. $D=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{2\pi}{3}\left(3k+\frac{1}{2}\right), \frac{2\pi}{3}\left(3k+\frac{5}{2}\right)\right)$, $E=[-\infty, \ln 3]$. 2.17. $D=[-1, 1]$, $E=[0, 1]$. 2.18. $E=(2, 3)$, $E=\left(-\infty, \lg\frac{1}{4}\right]$. 2.19. $D=[-1, 1]$, $E=[0, \pi/4]$. 2.20. $D=[0, 2]$, $E=[1, 2^{\pi}]$. 2.21. $D=(-\infty, +\infty)$, $E=[1/e^2, +\infty)$. 2.22. $G=[0, 4]$. 2.23. $G=[1, 2]$. 2.24. $G=$ $=(-\infty, 0)\cup(1, +\infty)$. 2.25. $G=(0, 1/2]$. 2.26. $G=(1, 3]$. 2.27. $G=$ $=[0, \sqrt{2}/2)$. 2.28. $D_0=\{-1\}$, $D_+=(-1, +\infty)$, $D_-=(-\infty, -1)$. 2.29. $D_0=\{-1, 2\}$, $D_+=(-1, 2)$, $D_-=(-\infty, -1)\cup(2, +\infty)$. 2.30. $D_0=\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$, $D_+=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n+1}\right)$, $D_-=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\times$ $\times\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2(n+1)}\right)$. 2.31. $D_0=\{1\}$, $D_+=(-\infty, 0)\cup(1, +\infty)$, $D_-=(0, 1)$. 2.37. $f(x)=x^2-2$. 2.38. $f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. 2.39. $f(x)=\operatorname{sen} x$. 2.40. Par. 2.41. Ni par ni impar 2.42. Ni par ni impar. 2.43. Impar. 2.44. Ni par ni impar. 2.45. Impar. 2.47. $T=$ $=2\pi/7$. 2.48. $T=\pi/2$. 2.49. No periódica. 2.50. No periódica. 2.51. No periódica. 2.52. $T=6\pi$. 2.53. Si $a=0$, la función inversa no existe; si $a\neq 0$, entonces $y=\frac{x-b}{a}$ es la función inversa y $D=$ $=(-\infty, +\infty)$. 2.54. La inversa

$$y=\begin{cases} -\sqrt[3]{-x}+1, & \text{si } x\leqslant 0, \\ \sqrt[3]{x}+1, & \text{si } x>0. \end{cases}\quad D=(-\infty, +\infty),$$

2.55. La función inversa no existe. 2.56. La función inversa $y=\frac{1}{2}e^x$, $D=(-\infty, +\infty)$. 2.57. La inversa $y=2\log_2 x$, $D=$ $=(0, +\infty)$. 2.58. La función inversa $y=\frac{1-x}{1+x}$, $x\neq-1$.

2.60. a) $y=-\sqrt{x+1}$, $D=\left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$; b) $y=\sqrt{x+1}$, $D=\left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$. **26.1.** a) $y=\operatorname{arcsen} x$, $D=[-1, 1]$; b) $y=\pi+\operatorname{arcsen} x$, $D=[-1, 1]$. **2.62.** $y=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ x/2, & x>0. \end{cases}$ **2.63.** a) $y=\frac{1}{2}\arccos(2x-1)$, $D=[0, 1]$; b) $y=\pi-\frac{1}{2}\arccos(2x-1)$, $D=[0, 1]$; c) $y=\pi+\frac{1}{2}\arccos(2x-1)$, $D=[0, 1]$. **2.65.** $f\circ g=1-x^2$, $g\circ f=(1-x)^2$. **2.66.** $f\circ g=x$, $x>0$; $g\circ f=x$. **2.67.** $f\circ g=x$, $g\circ f=\begin{cases} x+\pi, & x\in[-\pi, -\pi/2), \\ x & x\in[-\pi/2, \pi/2], \\ x-\pi, & x\in(\pi/2, \pi]. \end{cases}$

2.68. $f\circ g=0$, $g\circ f=g$. **2.69.** a) x; b) $x/\sqrt{1+3x^2}$. **2.70.** $f(u)=\sqrt{u}$, $u=x^2$. **2.71.** $f(u)=\operatorname{sen} u$, $u=\cos v$, $v=\sqrt{x}$. **2.72.** $f(u)=2^u$, $u=\operatorname{sen} v$, $v=x^2$. **2.73.** $f(u)=\operatorname{arcsen} u$, $u=e^v$, $v=\sqrt[3]{x}$. **2.74.** $f(u)=\operatorname{sen} u$, $u=2^v$, $v=x^2$. **2.75.** $f(u)=u^{-1/3}$, $u=v^2$, $v=\operatorname{tg} t$, $t=\log_3 x$.
2.77. $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right) \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$ **2.78.** $\{(-1, 2), (1, 2)\}$.
2.79. $\{(2k\pi, k\pi) \mid k\in\mathbb{Z}\}$. **2.80.** $\{(k\pi, 1) \mid k\in\mathbb{Z}\}$. **2.81.** a) Una recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto (1, 2); b) una recta paralela al eje Ox que pasa por el punto (0, −2); c) una recta que pasa por el punto $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ y es paralela a la bisectriz del segundo y cuarto ángulos coordenados. **2.82.** a) La parábola $y=x^2$ desplazada en 1 hacia abajo a lo largo del eje Oy; b) la parábola $y=x^2$, estirada en 2 veces a lo largo del eje Oy, desplazada en 1 a la derecha a lo largo del eje Ox; c) la parábola $y=x^2$ reflejada respecto al eje Ox, contraída en 2 veces a lo largo del eje Oy, desplazada en 2 a la izquierda a lo largo del eje Ox y en 3/2 hacia arriba a lo largo del eje Oy. **2.83.** a) La hipérbola $y=\frac{1}{x}$, desplazada en 1 hacia abajo a lo largo del eje Oy y en 1 a la derecha a lo largo del eje Ox; b) la hipérbola $y=\frac{1}{x}$, reflejada respecto al eje Ox, estirada en dos veces a lo largo del eje Oy, desplazada en $\frac{1}{2}$ hacia abajo a lo largo del eje Oy y en 1 a la izquierda a lo largo del eje Ox. **2.84.** a) La sinusoide $y=\operatorname{sen} x$, contraída en dos veces a lo largo del eje Ox y desplazada en $\pi/6$ a la izquierda a lo largo del eje Ox; b) la sinusoide $y=\operatorname{sen} x$, reflejada respecto del eje Ox, en dos veces estirada a lo largo del eje Oy, en dos veces estirada a lo largo del eje Ox y desplazada en $2\pi/3$ a la derecha a lo largo del eje Ox. **2.85.** a) la tangenzoide $y=\operatorname{tg} x$, en tres veces estirada a lo largo del eje Oy, en tres veces estirada a lo largo del eje Ox y desplazada en $3\pi/4$

a la izquierda a lo largo del eje Ox; b) la tangenzoide $y = \operatorname{tg} x$, reflejada respecto al eje Ox, contraída en dos veces a lo largo del eje Oy, contraída en dos veces a lo largo del eje Ox y desplazada en $3\pi/4$ a la izquierda a lo largo del ojo Ox. **2.86.** a) La gráfica de la función trigonométrica inversa $y = \arcsin x$, en 4 veces estirada a lo largo del eje Oy y desplazada en 1 a la derecha a lo largo del eje Ox; b) la gráfica de la función $y = \arcsin x$, reflejada respecto del eje Ox, en 3/2 veces contraída a lo largo del eje Oy y desplazada en 1/2 a lo largo del eje Ox a la izquierda. **2.87.** a) La gráfica de la función trigonométrica inversa $y = \operatorname{arctg} x$, reflejada respecto al eje Ox, en tres veces estirada respecto al eje Oy y desplazada en 5/2 a lo largo del eje Ox a la izquierda; b) la gráfica de la función $y = \operatorname{arctg} x$, en 5/2 veces contraída a lo largo del eje Oy y desplazada en 6 a la derecha a lo largo del eje Ox. **2.88.** La gráfica de la función exponencial $y = 2^x$, reflejada respecto del eje Oy y desplazada en 1 a lo largo del eje Ox a la derecha; b) gráfica de la función $y = 2^x$, reflejada respecto del eje Oy, dos veces contraída a lo largo del eje Ox y desplazada en 1 a la derecha a lo largo del eje Ox. **2.89.** a) La gráfica de la función logarítmica $y = \ln x$, desplazada en 1 hacia arriba a lo largo del eje Oy y en 1/10 a la derecha a lo largo del eje Ox; b) la gráfica de la función $y = \ln x$, reflejada respecto del eje Ox, desplazada en $\lg 2$ hacia arriba a lo largo del eje Oy y en 4, a la izquierda a lo largo del eje Ox.

2.90 [1]**.**

$$y=\begin{cases} -2x, & x\in(-\infty,\ -2],\\ 4, & x\in(-2,\ 2],\\ 2x, & x\in(2,\ +\infty)\end{cases}$$

2.91.

$$y=\begin{cases} (x+1)^3-1, & x\in(-\infty,0],\\ x^2, & x\in(0,\ +\infty)\end{cases}$$

2.92. $$y=\begin{cases} (x+3)^2, & x\in(-\infty,\ 0],\\ (x-3)^2, & x\in(0,\ +\infty).\end{cases}$$

2.93. $$y=\begin{cases} 6\left(x+\dfrac{1}{12}\right)^2-\dfrac{25}{24}, & x\in\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{6}\right]\cup[0,+\infty),\\ -6\left(x+\dfrac{1}{12}\right)^2-\dfrac{23}{24}, & x\in\left(-\dfrac{1}{6},0\right).\end{cases}$$

2.94. $$y=\begin{cases} -(x+1)^2+1, & x\in(-\infty,\ 1],\\ (x+1)^2-1, & x\in(1,\ +\infty).\end{cases}$$

2.95. $$y=\begin{cases} 2(x-1), & x\in(-\infty,\ 1],\\ 0, & x\in(1,\ +\infty).\end{cases}$$

2.96. $$y=\begin{cases} 2-\dfrac{7}{x+2}, & x\in(-\infty,\ -2)\cup[^3/_2,\ +\infty),\\ -2+\dfrac{7}{x+2}, & x\in(-2,\ ^3/_2).\end{cases}$$

---

[1]) Aquí y en lo que sigue, en las respuestas para todos los problemas análogos de este párrafo, de hecho se aduce el tipo de función inicial del cual se obtiene con facilidad la gráfica de la misma.

$$2.97.\quad y=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x+2}, & x\in(-\infty,\ -2),\\ -1+\dfrac{1}{x+2}, & x\in(-2,\ 0],\\ 1-\dfrac{3}{x+2}, & x\in(0,\ +\infty).\end{cases}$$

2.98. Si $x\in(-\infty,\ 0)$, la recta $y=-1$; si $x\in(0,\ +\infty)$, la recta $y=1$; si $x=0$, la recta $y=0$. **2.99.** Si $x\in[n,\ n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$, la recta $y=n$. **2.100.** Si $x\in[n,\ n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$, la recta $y=x-n$.

$$2.101.\quad y=\begin{cases} 2^{-x}-1, & x\in(-\infty,\ 0],\\ 2^{x}-1, & x\in(0,\ +\infty).\end{cases}$$

$$2.102.\quad y=\begin{cases} 3^{x+1}+2, & x\in(-\infty,\ -1],\\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+2, & x\in(-1,\ +\infty).\end{cases}$$

$$2.103.\quad y=\begin{cases} \log_{1/2}(3-x), & x\in(-\infty,\ 3),\\ \log_{1/2}(x-3), & x\in(3,\ +\infty).\end{cases}$$

$$2.104.\quad y=\begin{cases} -\log_2(x+1), & x\in(-1,\ 0],\\ \log_2(x+1), & x\in(0,\ +\infty).\end{cases}$$

2.105.

$$y=\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{4}-2k\pi & x\in\left[2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},\ \ 2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right], \qquad k\in\mathbb{Z}.\\ x+\dfrac{\pi}{4}-(2k+1)\,\pi, & \\ x\in\left((2k+1)\,\pi-\dfrac{3\pi}{4},\ \ (2k+1)\,\pi+\dfrac{\pi}{4}\right). & \end{cases}$$

2.106.

$$y=\begin{cases} 3x-2k\pi, & x\in\left[2k\dfrac{\pi}{3},\ (2k+1)\,\dfrac{\pi}{3}\right].\\ 3x-(2k+1)\,\pi, & x\in\left((2k+1)\,\dfrac{\pi}{3},\ 2\,(k+1)\,\dfrac{\pi}{3}\right),\end{cases}\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

2.107.

$$y=\begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right), & x\in[2k\pi,\ (2k+1)\,\pi],\\ \sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right), & x\in((2k+1)\,\pi,\ 2(k+1)\,\pi),\end{cases}\qquad (k\in\mathbb{Z})$$

$$2.108.\quad y=\begin{cases} -\operatorname{arctg}(x-1), & x\in(-\infty,\ 1],\\ \operatorname{arctg}(x-1), & x\in(1,\ +\infty),\end{cases}$$

2.109. $y=\begin{cases} x, & x\in\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \\ -x, & x\in\left((2k+1)\pi-\dfrac{\pi}{2},\ (2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}\right), \end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$.

2.110.

$$y=\begin{cases} \operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right), & x\in\left[k\pi-\dfrac{\pi}{4},\ k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right], \\ -\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right), & x\in\left(k\pi+\dfrac{\pi}{4},\ (k+1)\pi-\dfrac{\pi}{4}\right), \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

2.111. $y=\dfrac{1}{2}(1-\cos x)$. 2.112. El segmento de la recta $y=\dfrac{x}{5}+\dfrac{2}{5}$, $x\in[-7,\ 3]$. 2.113. Los ejes de coordenadas.

2.114. La curva, simétrica respecto a ambos ejes de coordenadas; en el primer cuadrante una parte de la parábola $y=-(x-1)^2+4$ para $x\in[0,\ 3]$ y una parte de la parábola $y=(x-1)^2-4$ para $x\in(0,\ +\infty)$. 2.115. El cuadrado de vértices $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(-1,\ 0)$, $(0,\ -1)$. 2.116. El cuadrado cuyos lados son $x=\pm 1/2$, $y=\pm\dfrac{1}{2}$.
2.117. La curva, simétrica respecto de ambos ejes de coordenadas y la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero; en la región $G=\{(x,\ y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x\geqslant y\}$, el rayo $y=x-1$. 2.118. La curva simétrica respecto de ambos ejes de coordenadas; en el primer cuadrante es un segmento de la recta $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cuando $y\leqslant\dfrac{1}{2}$, y un segmento de la recta $y=1-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ cuando $y>\dfrac{1}{2}$.

3.1. $0,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{4},\ \dfrac{4}{5},\ \ldots$ 3.2. $2,\ 0,\ 6,\ 0,\ 10,\ \ldots$ 3.3. $-8,\ 11,\ \dfrac{14}{3},\ \dfrac{17}{5},\ \dfrac{20}{7},\ \ldots$ 3.4. $\dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{7\pi}{3},\ \dfrac{8\pi}{3},\ \dfrac{13\pi}{3},\ \dfrac{14\pi}{3},\ \ldots$
3.5. $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$. 3.6. $x_n=1+(-1)^n$. 3.7. $x_n=\dfrac{2n}{2n-1}$. 3.8. $x_n=n\cos\dfrac{\pi(n-1)}{2}$. 3.9. $x_n=(-1)^n\dfrac{2n+1}{2n-1}$. 3.10. $x_n=\operatorname{sen}\dfrac{(n-1)\pi}{4}$.

3.11. El término mayor $x_3=4$. 3.12. El término mayor $x_5=e$. 3.13. El término mayor $x_9=1/6$. 3.14. El término menor $x_2=-22$. 3.15. El término menor $x_8=24$. 3.16. El término menor $x_3=-9/8$.
3.17. a) $\exists A>0\,\forall n\in\mathbb{N}\ (|x_n|\leqslant A)$; $\forall A>0\,\exists n\in\mathbb{N}\ (|x_n|>A)$. b) $\forall n\in\mathbb{N}\ (x_n<x_{n+1})$; $\exists n\in\mathbb{N}\ (x_n\geqslant x_{n+1})$. c) $\forall\varepsilon>0\,\exists N\in\mathbb{N}\,\forall n\in\mathbb{N}\ (n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon)$; $\exists\varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\,\exists n\in\mathbb{N}\times(n>N\wedge|x_n-a|\geqslant\varepsilon)$. d) $\forall E>0\,\exists N\in\mathbb{N}\,\forall n\in\mathbb{N}\ (n>N\Rightarrow$

$\Rightarrow |x_n| > E)$; $\exists E > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}$ $(n > N \wedge |x_n| \leqslant E)$. e) $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ $(|x_n - a| < \varepsilon)$; $\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ $(|x_n - a| \geqslant \geqslant \varepsilon)$. **3.18.** a) $a = 1/3$; $N = 3$; b) $a = 1$, $N = 10$; c) $a = 0$, $N = 999$; d) $a = 5/7$, $N = 3$. **3.19.** $-5/9$. **3.20.** $-1/2$. **3.21.** 0. **3.22.** 0. **3.23.** -1. **3.24.** $1/2$. **3.25.** $1/3$. **3.26.** 0. **3.27.** 1. **3.28.** $1/6$. **3.30.** Lo es. **3.31.** No lo es. **3.32.** No lo es. **3.33.** Lo es.

3.34. $1/3$, 3. **3.35.** 0, $\sqrt{2}/2$, 1, $-\sqrt{2}/2$, -1. **3.36.** $\pi/6$, $-\pi/6$. **3.38.** $\inf \{x_n\} = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\sup \{x_n\} = 2$. **3.39.** $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \inf \{x_n\} = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\sup \{x_n\} = 5/4$. **3.40.** La sucesión no es acotada superiormente ni inferiormente: $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. **3.41.** $\inf \{x_n\} = -\sqrt{3}$, $\sup \{x_n\} = 2\sqrt{3}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **3.42.** $\inf \{x_n\} = -\dfrac{1}{2}$, $\sup \{x_n\} = \dfrac{3}{2}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{3}{2}$. **4.4.** $\forall E > 0 \exists \delta < 0$ $(0 < |x| < \delta \Rightarrow \Rightarrow |f(x)| > E)$. **4.5.** $\forall E > 0 \exists \delta > 0$ $(-\delta < x - 1 < 0 \Rightarrow f(x) < < -E)$. **4.6.** $\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0$ $(x > A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$. **4.7.** $\forall E > 0 \exists A > 0$ $(x > A \Rightarrow f(x) > E)$.] **4.8.** $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ $(0 < x < < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$. **4.9.** $\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0$ $(|x| > A \Rightarrow |f(x) - 2| < < \varepsilon)$. **4.10.** $\forall E > 0 \exists A > 0$ $(x < -A \Rightarrow f(x) < -E)$. **4.11.** $\forall E > 0 \exists A > 0$ $(x < -A \Rightarrow |f(x)| > E)$. **4.12.** -2. **4.13.** 2. **4.14.** ∞. **4.15.** 0. **4.16.** m/n. **4.17.** $3x^2$. **4.18.** 6. **4.19.** $(a-1)/3a^2$. **4.20.** $1/4$. **4.21.** ∞. **4.22.** $n+1$. **4.24.** $3/5$. **4.25.** $1/6$. **4.26.** $\sqrt{2}/2$. **4.27.** $\sqrt{2/3}$. **4.28.** $1/n$. **4.29.** m/n. **4.30.** $3/2$. **4.31.** $3\sqrt[6]{2}/2$. **4.32.** 0. **4.33.** $1/2$. **4.34.** $-7/4$. **4.35.** 2. **4.36.** 3. **4.37.** $7/3$. **4.38.** $1/\pi$. **4.39.** $3/4$. **4.40.** 2. **4.41.** $(\alpha^2 - \beta^2)/2$. **4.42.** 0. **4.43.** $-\alpha/\pi$. **4.44.** $-\sqrt{2}/4$. **4.45.** 1. **4.46.** ◀ Al observar que $\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(1+x)^{1/x}$ y aprovechando la continuidad de la función $f(x) = \log_a x$ (véase el problema 4.105) podemos escribir: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \log_a(1+x)^{1/x} = \log_a\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = \log_a e$. ▶ **4.47.** ● Hágase el cambio de la variable $a^x - 1 = y$. **4.48.** ● Hágase el cambio de la variable $(1+x)^a - 1 = y$. Entonces, $a \ln(1+x) = \ln(1+y)$. Por consiguiente, $\dfrac{(1+x)^a - 1}{x} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{y}{\ln(1+x)} \cdot a \cdot \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. **4.49.** e^{10}. **4.50.** e^{10}. **4.51.** $e^{-1/2}$. **4.52.** e^3. **4.53.** 2. **4.54.** 1. **4.55.** $\ln a$. **4.56** $a \ln a$. **4.57.** $1/a \log_a e$. **4.58.** $a - b$. **4.63.** $+1$, -1. **4.64.** $-\infty$, $+\infty$ **4.65.** $+\infty$, 0. **4.66.** 0, $+\infty$. **4.67.** $\pi/2$, $-\pi/2$. **4.68.** $0, -1$. **4.69.** $2, -2$.

4.70. $-\infty$, $-\infty$. 4.74. 3/2. 4.75. 2/3. 4.76. 1. 4.77. 3. 4.78. 1. 4.79. 3. 4.80. 1/3. 4.81. 1/2. 4.82. 1/2. 4.83. 1/2. 4.85. 0,97. 4.86. 5,03. 4.87. 1,15. 4.88. 0,88. 4.91. $-\ln 10$. 4.92. 3. 4.93. -2. 4.94. 2/3. 4.95. 8/9 4.96. $3\sqrt{2}/2$. 4.97. 3. 4.98. 1. 4.99. 1/2. 4.100. 2/3. 4.101. 2. 4.102 1/6. 4.109. $A=3$. 4.110. $a=2$. 4.111. $b=\pi a/2$. 4.112. $x_1=0$, $x_2=1$ son puntos de discontinuidad de segunda especie. 4.113. $x=5/3$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.114. $x=0$ es un punto de discontinuidad evitable; $f(0)=n$. 4.115. $x=0$ es un punto de discontinuidad evitable; $f(0)=1$. 4.116. $x=0$ es un punto de discontinuidad evitable; $f(0)=1$; 4.117. $x_1=2$, $x_2=-2$ son los puntos de discontinuidad de segunda especie. 4.118. $x=0$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.119. $x=-2$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.120. $x=2$ es un punto de discontinusdad de primera especie. 4.121. $x=0$ es un punto de discontinuidad evitable, $f(0)=2$; $x=\pm 1$ son los puntos de discontinuidad de segunda especie. 4.122. $x_1=0$ es un punto de discontinuidad evitable, $f(0)=-1$; $x_2=1$ es un punto de discontinuidad evitable, $f(1)=0$; $x_3=-1$ es un punto de discontinuidad de segunda especie. 4.123. $x=0$ es un punto de discontinuidad evitable; $f(0)=1/2$. 4.124. $x=1$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.125. $x=1$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.126. $x=2,5$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.127. $x=\pi/4$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.133. $(\forall\varepsilon>0\forall x_0\in D\exists\delta>0\ (|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon))\wedge(\exists\varepsilon>0\forall\delta>0\exists x',\quad x''\in D\ (|x'-x''|<\delta\wedge|f(x')-f(x'')|>\varepsilon))$. 4.136. Uniformemente continua. 4.137. No es uniformemente continua. 4.138. Uniformemente continua. 4.139. No es uniformemente continua. 4.140. Uniformemente continua. 4.141. No es uniformemente continua. 4.142. No es uniformemente continua.

5.4 $9+7i$. 5.5. $-3+4i$. 5.6 $-4i$. 5.7. $-29+22i$. 5.9. $\frac{5}{17}-\frac{3}{17}i$. 5.10. i. 5.11. $\frac{14}{5}i$. 5.12. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$. 5.13. $x=2$, $y=3$. 5.14. $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{4}$. 5.15. $z_1=1$, $z_2=i$. 5.16. $z_1=2+i$, $z_2=2-i$. 5.17. $\cos\frac{3\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$. 5.18. $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$. 5.19. $\cos\times\times\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$. 5.20. $\cos\frac{3\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$. 5.21. $\cos\frac{6\pi}{7}+i\operatorname{sen}\frac{6\pi}{7}$. ● Determínese el ángulo φ que satisface las condiciones: $\varphi\in[0,2\pi)$, $\cos\varphi=-\cos\frac{\pi}{7}$, $\operatorname{sen}\varphi=\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$. 5.22. $\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$. 5.23. $2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{14}\right)$. 5.30. a) $-4i$, $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $10-2i$, $-\frac{7}{4}-\frac{1}{4}i$. 5.32. $\frac{3}{2}-2i$. 5.33. $\frac{3}{4}+i$. 5.35. El desplazamiento sobre el vector $a(-2, 0)$. 5.36. El desplazamiento sobre el vector $a(3, -1)$. 5.37. El giro en un ángulo $\pi/2$

en sentido antihorario. 5.38. El giro del ángulo $\pi/4$ en sentido horario. 5.39. Simetría respecto del origen de coordenadas. 5.40. Homotecia con centro en el origen de coordenadas y coeficiente $k=2$. 5.41. El giro en un ángulo $\pi/4$, en el sentido antihorario con la homotecia posterior de centro en el origen de coordenadas y coeficiente $1/\sqrt{2}$. 5.42. La reflexión respecto del eje real. 5.44. a) La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados. b) ● Hágase uso de la identidad a). 5.45. Semiplano $x \geqslant 0$. 5.46. Franja $0 \leqslant y < 1$. 5.47. Franja $|y| \leqslant 2$. 5.48. El interior de un círculo de radio 1 y centro en el origen de coordenadas. 5.49. Circunferencia $x^2+(y+1)^2=4$. 5.50. Anillo encerrado entre las circunferencias γ_1: $(x+2)^2+y^2=1$ y γ_2: $(x+2)^2+y^2=4$ (γ_1 no pertenece al anillo). 5.51. $D=\{(x, y) \mid y^2>1-2x\}$. 5.52. Una recta $2x+y+\frac{3}{2}=0$. 5.53. Un sector limitado por los rayos $l_1=\{(x, y) \mid y=0,\ x \geqslant 0\}$ y $l_2=\{(x, y) \mid y=x,\ x \geqslant 0\}$ (el rayo l_1 no pertenece al sector). 5.54. Un sector limitado por los rayos $l_1=\{(x, y) \mid y=x,\ x<0\}$ y $l_2=\{(x, y) \mid y=-x,\ x \leqslant 0\}$.

5.55. Eje Ox. 5.57. $5e^{i\operatorname{arctg}\frac{24}{7}}$. 5.58. $13e^{i\operatorname{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right)}$.

5.59. $5e^{i\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi\right)}$. 5.60. $\sqrt{5}e^{i\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}$.

5.61. $e^{i\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}$. 5.62. $2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$ cuando $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}>0$, $-2\operatorname{sen}\times$ $\times\frac{\alpha}{2}e^{i\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}$ cuando $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}<0$. 5.64. a) $24e^{-\frac{\pi i}{2}}$, $\frac{8}{3}$ b) $16e^{i\frac{7\pi}{4}}$, $2e^{-i\frac{\pi}{2}}$. 5.67. $32i$. 5.68. 2. 5.69. $512(1-i\sqrt{3})$ 5.70. $-\frac{1}{4}$. 5.72. a) $\frac{1}{4}(3\cos\varphi+\cos 3\varphi)$; b) $\frac{1}{4}(3\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}3\varphi)$. 5.73. $4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$. 5.74. $3\operatorname{sen}\varphi-4\operatorname{sen}^3\varphi$. 5.75. $\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\varphi+\operatorname{sen}^4\varphi$. 5.76. $4\operatorname{sen}\varphi\cos^3\varphi-4\cos\varphi\operatorname{sen}^3\varphi$. 5.77. Las raíces de segundo grado de la unidad: $z_1=1$, $z_2=-1$ las raíces de tercer grado de la unidad: $z_1=1$, $z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; las raíces de cuarto grado de la unidad: $z_1=1$ $z_2=i$, $z_3=-1$ $z_4=-i$. 5.78. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. 5.79. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$. 5.80. $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{9}k\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{9}k\right)$, $k=0, 1, \ldots, 8$. 5.81. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$. 5.82. $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k\right)\right)$, $k=0, 1, 2, 3$. 5.83. $\sqrt[10]{2}\,(\cos\times$

$\times \left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{5}k\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{5}k\right)\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. **5.84.** $\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k\right)\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,$ $4,\ 5$. **5.85.** $2\sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{5}+i\,\text{sen}\,\frac{(2k-1)\pi}{5}\right)\right)$, $k=0,\ 1,$ $2,\ 3,\ 4$. **5.87.** $\dfrac{\text{sen}\,\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{\text{sen}\,\frac{\varphi}{2}}$. **5.88.** $\dfrac{\text{sen}\,2n\varphi}{2\,\text{sen}\,\varphi}$.

5.89. $\dfrac{\text{sen}^2\,n\varphi}{\text{sen}\,\varphi}$. **5.90.** $-1\pm 2i$. **5.91.** $\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{4}i$. **5.92.** $-2+i,$ $-3+i$. **5.93.** $1+i,\ 2-3i$. **5.94.** $1,\ -\frac{1}{2}\pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.95.** $-1,\ \frac{1}{2}\pm$ $\pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.96.** $1,\ -3,\ -1\pm 2i$. **5.97.** $(-1+\sqrt{2})\pm i\sqrt{2}$, $(-1,\ -\sqrt{2})\pm i\sqrt{2}$. **5.98.** $z_{1,2}=z_{3,4}=\pm 3i$. **5.99.** $\pm i,\ \pm\sqrt{3}i$. **5.100.** $\pm 2i;\ \pm\sqrt{5}i$. **5.101.** $\pm(1+i),\ \pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)$. **5.102.** $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3}),\ -1,\ \frac{\sqrt[3]{3}}{2}(1\pm i\sqrt{3}),\ -\sqrt[3]{3}$. **5.103.** $\pm 1,$ $\pm i,\ \pm\sqrt{2}(1\pm i)$. **5.104.** $x=\text{tg}\,\frac{\alpha+\pi k}{n}$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, donde $\alpha=\text{arctg}\,a$. ● Hágase $a=\text{tg}\,\alpha$, $x=\text{tg}\,y$ y úsese la forma trigonométrica del número complejo. **5.105.** $(z-1)(z+1)(z^2+1)$. **5.106.** $(z^2-z\sqrt{2}+1)(z^2+z\sqrt{2}+1)$. **5.107.** $(z^2-z+1)(z^2+z+1)$. **5.108.** $(z^2+2z+2)(z^2+2z+5)$. **5.109.** $(z-1)(z^2+z+1)^2$. **5.110.** $(z^2-2z+5)(z^2+8z+20)$. **5.114.** $2-i$. **5.115.** -1. **5.116.** $\frac{5}{3}i$. **5.117.** $-\frac{7}{5}+\frac{14}{5}i$. **5.118.** 1. **5.119.** 0. **5.120.** ∞. **5.121.** ∞ **5.122.** $\dfrac{-1-5i}{26}$. **5.123.** $\frac{3}{10}(3+i)$. **5.124.** $1+ie$. **5.125.** $\dfrac{11+3i}{10}$. **5.126.** $e^3(\cos 2+i\,\text{sen}\,2)$. **5.135.** 0. **5.136.** 0. **5.137.** $\dfrac{1}{1-z}$. **5.138.** 0. **5.139.** $\dfrac{1-z_2}{1-z_1}$.

CAPÍTULO 2

ALGEBRA VECTORIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

§ 1. Algebra vectorial

1. Operaciones lineales con los vectores. Se denomina *vector $\boldsymbol{a}$* (*vector geométrico*) al conjunto de todos los segmentos dirigidos que tienen longitud y dirección iguales. De cualquier segmento $\overline{AB}$, perteneciente a dicho conjunto, suele decirse que representa un vector $\boldsymbol{a}$ (obtenido por aplicación del vector $\boldsymbol{a}$ al punto A). La longitud del segmento $\overline{AB}$ lleva el nombre de *longitud* (*módulo*) del vector $\boldsymbol{a}$ y se denota por el símbolo $|\boldsymbol{a}| = |AB|$. El vector de longitud nula se denomina *vector nulo* y se denota por el símbolo $\boldsymbol{0}$.

Los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se denominan *iguales* ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$), si coinciden los conjuntos de segmentos dirigidos que representan dichos vectores.

En toda una serie de problemas resulta, a menudo, conveniente no distinguir el vector y cualquier segmento dirigido que lo representa. Precisamente en este sentido, por ejemplo, se debe entender la expresión «construir» un vector.

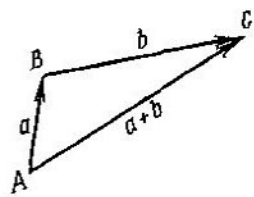


Fig. 10

Supongamos que el segmento dirigido $\overline{AB}$ representa el vector $\boldsymbol{a}$. Al aplicar al punto B el vector dado $\boldsymbol{b}$, obtendremos un segmento dirigido $\overline{BC}$. Un vector, representado por el segmento dirigido $\overline{AC}$ se llama suma de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y se designa $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (fig. 10).

Se llama *producto del vector $\boldsymbol{a}$ por un número real* λ al vector, denotado $\lambda\boldsymbol{a}$, tal que:

1) $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$;

2) los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\lambda\boldsymbol{a}$ están orientados según la misma dirección cuando $\lambda > 0$, y tienen dirección opuesta cuando $\lambda < 0$.

1.1. Demuéstrese que la operación de adición de los vectores posee las siguientes propiedades:

a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$;

b) $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_1$ (*conmutatividad*);

c) $\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{a}_3$ (*asociatividad*);

d) $\forall a\, \exists!\, b\, (a + b = 0)$
(b se llama vector *opuesto* al vector a y se denota por el símbolo $-a$);

e) $\forall a_1, a_2 \exists!\, a_3\, (a_1 + a_3 = a_2)$
(a_3 se llama *diferencia* entre los vectores a_2 y a_1 y se denota por el símbolo $a_2 - a_1$).

1.2. Demuéstrense las igualdades:

a) $-a = (-1)\, a$; b) $a_2 - a_1 = a_2 + (-a_1)$;

c) $a = |\, a\, |\, a_0$, donde a_0 es un *versor* del vector a, es decir, un vector de longitud unidad y de la misma dirección que tiene el vector a $(a \neq 0)$.

1.3. En un paralelepípedo $ABCDA'B'C'D'$ los vectores m, n, p están representados por las aristas $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA'}$, respectivamente. Constrúyanse los vectores:

a) $m + n + p$; b) $1/2m + 1/2n - p$; c) $-m - n + 1/2p$.

1.4. Sean dados los vectores a_1 y a_2. Constrúyanse los vectores $3a_1$, $1/2a_2$, $a_1 + 2a_2$, $1/2a_1 - a_2$.

1.5. Demuéstrese que:

a) la operación de multiplicación del vector por un número posee las siguientes propiedades:

$$0a = \lambda 0 = 0, \quad (\lambda_1\lambda_2)\, a = \lambda_1\, (\lambda_2 a);$$

b) las operaciones de adición de los vectores y multiplicación de éstos por un número, están entrelazadas mediante las siguientes dos propiedades de *distributividad*:

$$\lambda\, (a_1 + a_2) = \lambda a_1 + \lambda a_2 \text{ y } (\lambda_1 + \lambda_2)\, a = \lambda_1 a + \lambda_2 a.$$

1.6. Demuéstrense las igualdades:

a) $a + {}^1/_2\, (b - a) = {}^1/_2\, (a + b)$; b) $a - {}^1/_2\, (a + b) = {}^1/_2\, (a - b)$. ¿Cuál es su significado geométrico?

1.7. $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son las medianas del triángulo ABC. Demuéstrese la igualdad $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = 0$.

1.8. En el paralelogramo $ABCD$ se designan: $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$. Exprésense en términos de a y b los vectores $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ y $\overline{MD}$, donde M es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo.

1.9. $ABCDEF$ es un hexágono regular, siendo $\overline{AB} = p$, $\overline{BC} = q$. Exprésense en términos de p y q los vectores $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$.

1.10. M es el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC, O es un punto arbitrario del espacio. Demuéstrese la igualdad $\overline{OM} = {}^1/_3\,(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$.

1.11. En un espacio están dados los triángulos ABC y $A'B'C'$; M y M' son los puntos de intersección de sus medianas. Exprésense el vector $\overline{MM'}$ mediante los vectores $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$.

1.12. E y F son los puntos medios de los lados $[AD]$ y $[BC]$ del cuadrilátero $ABCD$. Demuéstrese que $\overline{EF} = {}^1/_2\,(\overline{AB} + \overline{DC})$. Dedúzcase de aquí el teorema de la línea media de un trapecio.

1.13. En el trapecio $ABCD$ la razón entre la longitud de la base $[AD]$ y la de la base $[BC]$ equivale a λ. Suponiendo $\overline{AC} = \boldsymbol{a}$ y $\overline{BD} = \boldsymbol{b}$, exprésense los vectores $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ por medio de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Un sistema de vectores $a_1, \ldots, a_n$ se llama *linealmente dependiente*, si existen tales números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ que por lo menos uno de ellos es distinto de cero y $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = 0$. En el caso contrario el sistema es linealmente independiente.

1.14. Demuéstrense los siguientes criterios geométricos de la dependencia lineal:

a) el sistema $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ es linealmente dependiente cuando, y sólo cuando, los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ son *colineales*, es decir, sus direcciones coinciden o bien son opuestas;

b) el sistema $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ es linealmente dependiente cuando, y sólo cuando, los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ y $\boldsymbol{a}_3$ son *coplanares*, esto es, son paralelos a cierto plano;

c) todo sistema de $n \geqslant 4$ vectores es linealmente dependiente.

1.15. En el lado $[AD]$ del paralelogramo $ABCD$ está marcado un vector $\overline{AK}$ de longitud $|\overline{AK}| = {}^1/_5\,|\overline{AD}|$, y en la diagonal $[AC]$, un vector $\overline{AL}$ de longitud $|\overline{AL}| = {}^1/_6\,|\overline{AC}|$. Demuéstrese que los vectores $\overline{KL}$ y $\overline{LB}$ son colineales y hállese tal λ que se verifique $\overline{KL} = \lambda\cdot\overline{LB}$.

1.16. Demuéstrese que para cualesquiera vectores dados $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ los vectores $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ son coplanares.

1.17. Sean dados tres vectores no coplanares $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. Demuéstrese que los vectores $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, $3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $-\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}$ son coplanares.

1.18. Sean dados tres vectores no coplanares $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. Calcúlese los valores de λ, para los cuales los vectores $\lambda \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \lambda \boldsymbol{c}$ son coplanares.

1.19. Sean dados tres vectores no coplanares $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. Calcúlense los valores de λ y μ, para los cuales los vectores $\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b} + \mu \boldsymbol{c}$ son colineales.

2. Base y coordenadas de un vector. Una terna ordenada de vectores no coplanares $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ lleva el nombre de *base* en el conjunto de todos los vectores geométricos. Todo vector geométrico $\boldsymbol{a}$ puede ser representado unívocamente en la forma

$$\boldsymbol{a} = X_1 \boldsymbol{e}_1 + X_2 \boldsymbol{e}_2 + X_3 \boldsymbol{e}_3; \tag{1}$$

los números X_1, X_2, X_3 se denominan *coordenadas* del vector $\boldsymbol{a}$ en la base $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. La notación (1) se denomina, además, descomposición del vector $\boldsymbol{a}$ según la base $\mathfrak{B}$.

Análogamente, un par ordenado de vectores no colineales $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ se llama base $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ en un conjunto de vectores geométricos coplanares respecto a cierto plano.

Por fin, todo vector no nulo $\boldsymbol{e}$ forma una base $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{e})$ en un conjunto de todos los vectores geométricos colineales con relación a cierta dirección.

Si el vector $\boldsymbol{a}$ es una *combinación lineal* de los vectores $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ con coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, es decir,

$$\boldsymbol{a} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \boldsymbol{a}_k,$$

entonces cada coordenada $X_i(\boldsymbol{a})$ del vector $\boldsymbol{a}$ es igual a la suma de productos de los coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ por las coordenadas homónimas de los vectores $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$:

$$X_i(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_i(\boldsymbol{a}_k), \quad i = 1, 2, 3.$$

La base $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ se llama rectangular, si los vectores $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{e}_3$ son perpendiculares dos a dos y tienen longitud unidad. En este caso se han adoptado las siguientes designaciones

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k}. \tag{2}$$

Se denomina *proyección* del vector $\boldsymbol{a}$ sobre el vector $\boldsymbol{e}$ el número $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}}\, \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos \varphi$, donde $\varphi = \widehat{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e})}$ es el ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{e}$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

Las coordenadas X, Y, Z del vector $\boldsymbol{a}$ en la base rectangular coinciden con las proyecciones del vector $\boldsymbol{a}$ sobre los versores básicos $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, respectivamente, mientras que la longitud del vector $\boldsymbol{a}$ es igual a

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \tag{3}$$

Los números

$$\cos\alpha=\cos(\widehat{a,\ i})=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos\beta=\cos(\widehat{a,\ j})=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos\gamma=\cos(\widehat{a,\ k})=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

reciben el nombre de *cosenos directores* del vector $\boldsymbol{a}$.

1.20. Sea dado el tetraedro $OABC$. En la base de las aristas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ hállense las coordenadas:

a) del vector $\overline{DE}$, donde D y E son los puntos medios de las aristas $\overline{OA}$ y $\overline{BC}$;

b) del vector $\overline{OF}$, donde F es el punto de intersección de las medianas de la base ABC.

1.21. En el tetraedro $OABC$ la mediana $[AL]$ de la arista ABC se divide por el punto M en la razón $|\overline{AM}|:|\overline{ML}|=3:7$. Hállense las coordenadas del vector $\overline{OM}$ en la base de las aristas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$.

1.22. Fuera del plano del paralelogramo $ABCD$ se ha elegido un punto O. En la base de los vectores $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ hállense las coordenadas:

a) del vector $\overline{OM}$, donde M es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo;

b) del vector $\overline{OK}$, donde K es el punto medio del lado $[AD]$.

1.23. En el trapecio $ABCD$ se conoce la razón entre las longitudes de las bases: $|\overline{AB}|/|\overline{CD}|=\lambda$. Hállense las coordenadas del vector $\overline{CB}$ en la base formada por los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$.

En lo sucesivo los vectores vienen representados, siempre que no se diga lo contrario, por sus coordenadas en cierta base rectangular. La notación $\boldsymbol{a}\,(X,\ Y,\ Z)$ quiere decir que las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$ son iguales a X, Y, Z, es decir, $\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$.

1.24. Sean dados los vectores $\boldsymbol{a}_1\,(-1,\ 2,\ 0)$, $\boldsymbol{a}_2\,(3,\ 1,\ 1)$, $\boldsymbol{a}_3\,(2,\ 0,\ 1)$ y $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2+1/3\boldsymbol{a}_3$. Calcúlense:

a) $|a_1|$ y las coordenadas del versor $a_{1,0}$ del vector a_1;

b) $\cos(\widehat{a_1, j})$;

c) la coordenada X del vector a;

d) $\text{pr}_j\, a$.

1.25. Sean dados los vectores $e(-1, 1, {}^1/_2)$ y $a(2, -2, -1)$. Convénzase de que son colineales y hállese la descomposición del vector a según la base $\mathfrak{B} = (e)$.

1.26. En un plano están dados los vectores $e_1(-1, 2)$, $e_2(2, 1)$ y $a(0, -2)$. Convénzase de que $\mathfrak{B} = (e_1, e_2)$ es una base en el conjunto de todos los vectores en el plano. Constrúyanse los vectores dados y hállese la descomposición del vector a según la base $\mathfrak{B}$.

1.27. Sea dada una terna de vectores no coplanares $e_1(1, 0, 0)$, $e_2(1, 1, 0)$ y $e_3(1, 1, 1)$. Calcúlense las coordenadas del vector $a = -2i - k$ en la base $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$ y escríbase la descomposición correspondiente según la base.

1.28. Sean dados los vectores $a = 2i + 3j$, $b = -3j - 2k$, $c = i + j - k$. Hállense:

a) las coordenadas del versor a_0;

b) las coordenadas del vector $a - {}^1/_2 b + c$;

c) la descomposición del vector $a + b - 2c$ según la base $\mathfrak{B} = (i, j, k)$;

d) $\text{pr}_j (a - b)$.

1.29. Hállese el vector x, colineal al vector $a = i - 2j - 2k$, que forma con el versor j un ángulo agudo y cuya longitud es $|x| = 15$.

1.30. Hállese el vector x que forma con todos los tres versores básicos ángulos agudos iguales, si $|x| = 2\sqrt{3}$.

1.31. Hállese el vector x que forma con el versor j un ángulo de 60° y con el versor k, un ángulo de 120°, si $|x| = 5\sqrt{2}$.

1.32. ¿Para qué valores de α y β los vectores $a = -2i + 3j + \alpha k$ y $b = \beta i - 6j + 2k$ son colineales?

1.33.* Hállese el vector x, dirigido a lo largo de la bisectriz del ángulo entre los vectores $a = 7i - 4j - 4k$ y $b = -2i - j + 2k$, si $|x| = 5\sqrt{6}$.

1.34. Sean dados los vectores: $a(1, 5, 3)$, $b(6, -4, -2)$, $c(0, -5, 7)$ y $d(-20, 27, -35)$. Se requiere elegir los números α, β y γ de tal modo que los vectores αa, βb, γc y d formen una línea quebrada cerrada, si el «origen» de cada vector sucesivo se hace coincidir con el «extremo» del anterior.

3. Coordenadas rectangulares cartesianas de un punto. Problemas elementales de la geometría analítica. Dicen que en un espacio tridimensional está introducido un *sistema de coordenadas rectangulares cartesianas* $(O, \mathfrak{B})$, si se han dado:

1) cierto punto O, llamado *origen de coordenadas*;

2) cierta base rectangular $\mathfrak{B} = (i, j, k)$ en el conjunto de todos los vectores geométricos.

Los ejes Ox, Oy y Oz, trazados por el punto O en dirección de los versores básicos $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, y $\boldsymbol{k}$, se llaman *ejes coordenados* del sistema de coordenadas $(O, \mathfrak{B}) = Oxyz$.

Si M es un punto arbitrario del espacio, entonces el segmento dirigido $\overline{OM}$ se denomina *radio vector* del punto M. Se llaman *coordenadas del punto* M en el sistema $(O, \mathfrak{B})$ las coordenadas de su radio vector OM como vector geométrico en la base $\mathfrak{B}$, es decir,

$$x(M) = X(\overline{OM}), \quad y(M) = Y(\overline{OM}), \quad z(M) = Z(\overline{OM}).$$

Si $M_1(x_1, y_1, z_1)$ y $M_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos arbitrarios en el espacio, entonces las coordenadas del vector $\overline{M_1M_2}$ son iguales a

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1. \tag{4}$$

De aquí, en virtud de (3), la distancia entre los puntos se expresa según la fórmula

$$\rho(M_1, M_2) = |\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.$$

Al resolver los problemas de la geometría analítica es conveniente emplear al máximo los métodos del álgebra vectorial.

Ejemplo 1. Sean dados los vértices $A(1, 0, -1)$, $B(2, 2, 1)$ y el punto $E(-1, 2, 1)$ en el que se cortan las medianas del triángulo ABC. Hállense las coordenadas del vértice C.

◀ Por cuanto las coordenadas del vértice A están prefijadas, para calcular las coordenadas del vértice C basta hallar las coordenadas del vector $\overline{AC}$. Sea $\overline{BF}$ una mediana trazada desde el vértice B. En este caso

$$\overline{AC} = 2\overline{AF} = 2(\overline{BA} + \overline{BF}) = 2(\overline{AB} + \frac{3}{2}\overline{BE}) \tag{5}$$

(se ha utilizado aquí el hecho de que el punto E divide la mediana BF en razón de $2:1$). Luego, partiendo de las condiciones de problema, calculamos, con ayuda de la fórmula (4), las coordenadas de los vectores $\overline{AB}(1, 2, 2)$ y $\overline{BE}(-3, 0, 0)$, de donde, en virtud de la (5), obtenemos $\overline{AC}(-7, 4, 4)$ y, finalmente, aplicando nuevamente la fórmula 4), encontramos las coordenadas del punto C:

$$x(C) = x(A) + X(\overline{AC}) = -6;$$

$$y(C) = y(A) + Y(\overline{AC}) = 4;$$

$$z(C) = z(A) + Z(\overline{AC}) = 3. ▶$$

Supongamos que en la recta l están dados los puntos M_1, M_2 y M, con la particularidad de que $M_1 \neq M_2$. Veamos los vectores $\overline{M_1M}$ y $\overline{MM_2}$. Puesto que son colineales, se encontrará tal número real λ que

$\overline{M_1M} = \lambda \cdot \overline{MM_2}$. El número λ se llama *razón*, en la cual el punto M divide el segmento dirigido $\overline{M_1M_2}$; además este número es positivo, si el punto M se dispone dentro del segmento $\overline{M_1M_2}$, negativo (y $\lambda \neq \neq -1$), si M se dispone fuera del segmento $\overline{M_1M_2}$, y es igual a cero, si $M = M_1$.

Ejemplo 2. Sabiendo las coordenadas de los puntos M_1 (x_1, y_1, z_1) y M_2 (x_1, y_2, z_2) y la razón λ, en la que el punto M divide el segmento dirigido $\overline{M_1M_2}$, hállense las coordenadas del punto M.

◀ Sea O el origen de coordenadas. Designemos: $\overline{OM_1} = r_1$, $\overline{OM_2} = r_2$, $\overline{OM} = r$. Como

$$\overline{M_1M} = r - r_1, \quad \overline{MM_2} = r_2 - r,$$

entonces

$$r - r_1 = \lambda (r_2 - r),$$

de donde (puesto que $\lambda \neq -1$)

$$r = \frac{r_1 + \lambda r_2}{1+\lambda}.$$

La fórmula obtenida nos da precisamente la solución del problema en la forma vectorial. Pasando en esta fórmula a las coordenadas, obtendremos

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \blacktriangleright \qquad (6)$$

1.35. El punto M $(1, -5, 5)$ viene dado mediante sus coordenadas en un sistema de coordenadas rectangulares cartesianas $\langle O, \mathfrak{B} = (i, j, k) \rangle$. Hállense las coordenadas de este punto en el sistema $\langle O', \mathfrak{B}' = (i', j', k') \rangle$, si

a) $\overline{OO'} = -2i + j - k$ y $i' = i$, $j' = j$; $k' = k$;

b) $O' = O$ e $i' = -j$, $j' = k$, $k' = i$;

c) $\overline{OO'} = j$ e $i' = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$, $j' = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$, $k' = k$

(hay que convencerse previamente de que $\mathfrak{B}'$ es una base rectangular).

1.36. Sean dados tres vértices A $(3, -4, 7)$, B $(-5, 3, -2)$ y C $(1, 2, -3)$ del paralelogramo $ABCD$. Hállese su cuarto vértice D, opuesto a B.

1.37. Sean dados dos vértices adyacentes del paralelogramo A $(-2, 6)$, B $(2, 8)$ y el punto de intersección de sus diagonales M $(2, 2)$. Hállense dos vértices restantes.

1.38. Hállese en el eje de abscisas el punto M cuya distancia hasta el punto A $(3, -3)$ es igual a 5.

1.39. Hállese en el eje de ordenadas el punto M equidistante respecto de los puntos A $(1, -4, 7)$ y B $(5, 6, -5)$.

1.40. Sean dados los vértices del triángulo $A\ (3, -1, 5)$, $B\ (4, 2, -5)$ y $C\ (-4, 0, 3)$. Hállese la longitud de la mediana trazada desde el vértice A.

1.41. Un segmento, cuyos extremos se encuentran en los puntos $A\ (3, -2)$ y $B\ (6, 4)$, está dividido en tres partes iguales. Hállense las coordenadas de los puntos de división.

1.42. Determínense las coordenadas de los extremos de un segmento que está dividido en tres partes iguales mediante los puntos $C\ (2, 0, 2)$ y $D\ (5, -2, 0)$.

1.43.* Sean dados los puntos $A\ (1, 2, 3)$, $B\ (2, -2, 1)$, $C\ (3, 0, 3)$ y $D\ (16, 10, 18)$. E es un punto de intersección del plano OAB (O es el origen de coordenadas) con una recta trazada por el punto D paralelamente a la recta (OC). Hállense las coordenadas del punto E.

1.44.* Sean dados los puntos $A\ (2, 5, 2)$ y $B\ (14, 5, 4)$; C es el punto de intersección del plano coordenado Oxy con una recta trazada por el punto B paralelamente a la recta (OA). Hállense las coordenadas del punto C.

1.45. Sean dados los vértices del triángulo $A\ (1, -1, -3)$, $B\ (2, 1, -2)$ y $C\ (-5, 2, -6)$. Calcúlese la longitud de la bisectriz de su ángulo interior en el vértice A.

◀ Hallemos la descomposición del vector $\overline{AE}$ según la base formada por los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Sea $e_1 = \overline{AB}/|\overline{AB}|$ y $e_2 = \overline{AC}/|\overline{AC}|$ los versores de los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Entonces, el vector $\overline{AE}$ tiene igual orientación con el vector $e = e_1 + e_2$ (compárese con el problema 1.33), es decir, existe un número $\lambda > 0$ tal que

$$\overline{AE} = \lambda e = \lambda \left(\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} + \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|} \right). \tag{7}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \overline{AF} = \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AC} + \mu\overline{CB} = AC + \mu\,(\overline{AB} - \overline{AC}) = \\ = \mu\overline{AB} + (1-\mu)\,\overline{AC}, \quad \mu > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Las fórmulas (7) y (8) representan en sí dos descomposiciones del vector $\overline{AE}$ según la base formada por los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Siendo única la descomposición de un vector según la base, se tiene

$$\frac{\lambda}{|\overline{AB}|} = \mu \quad \text{y} \quad \frac{\lambda}{|\overline{AC}|} = 1 - \mu. \tag{9}$$

Al resolver el sistema (9), hallamos

$$\lambda = \frac{1}{1/|\overline{AC}| + 1/|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|}{|\overline{AB}| + |\overline{AC}|},$$

así que la fórmula (7) adquiere la forma

$$\overline{AE} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}| + |\overline{AB}|}\,\overline{AB} + \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AB}| + |\overline{AC}|}\,\overline{AC}. \tag{10}$$

De las condiciones del problema hallamos:

$\overline{AB}\,(1,\ 2,\ 1)$ *y* $|\overline{AB}| = \sqrt{6}$, $\overline{AC}\,(-6,\ 3,\ -3)$ *y* $|\overline{AC}| = 3\sqrt{6}$, y en virtud de (10), obtenemos

$$\overline{AE} = \frac{3}{4}\,\overline{AB} + \frac{1}{4}\,\overline{AC},$$

de donde

$$\overline{AE}\left(-\frac{3}{4},\ \frac{9}{4},\ 0\right) \quad y \quad |\overline{AE}| = \frac{3}{4}\sqrt{10}. \ ▶$$

1.46. Un triángulo viene dado por las coordenadas de sus vértices $A\ (3,\ -2,\ 1)$, $B\ (3,\ 1,\ 5)$, $C\ (4,\ 0,\ 3)$. Calcúlese la distancia entre el origen de coordenadas y el punto de intersección de las medianas de este triángulo.

1.47. Sean dados los vértices de un triángulo $A\ (1,\ 0,\ 2)$, $B\ (1,\ 2,\ 2)$ y $C\ (5,\ 4,\ 6)$. El punto L divide el segmento $\overline{AC}$ en la razón $\lambda = {}^1/_3$, $[CE]$ es la mediana trazada desde el vértice C. Hállense las coordenadas del punto M, donde se cortan las rectas (BL) y (CE).

4. Producto escalar de vectores. Se denomina *producto escalar* de los vectores no nulos $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ el número

$$(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2) = |\boldsymbol{a}_1|\,|\boldsymbol{a}_2| \cos(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2).$$

A la par con la designación $(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2)$, para el producto escalar se usa también la designación $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$.

Propiedades geométricas del producto escalar:

1) $\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = 0$ (*condición de perpendicularidad de los vectores*);

2) si $\varphi = (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2)$, entonces $0 \leqslant \varphi < \pi/2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 > 0$ y $\pi/2 < \varphi \leqslant \pi \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 < 0$.

Propiedades algebraicas del producto escalar:

1) $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1$;

2) $(\lambda\boldsymbol{a}_1)\,\boldsymbol{a}_2 + \lambda\,(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1)$;

3) $\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_2$.

Si los vectores $\boldsymbol{a}_1\ (X_1,\ Y_1,\ Z_1)$ y $\boldsymbol{a}_2\ (X_2,\ Y_2,\ Z_2)$ están representados por sus coordenadas en una base rectangular, el producto escalar será

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

De esta fórmula se deduce, en particular, otra fórmula que se destina para determinar el coseno del ángulo formado por los vectores

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2}) = \frac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1|\,|\boldsymbol{a}_2|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

1.48. Demuéstrense las propiedades algebraicas del producto escalar.

1.49. $|a_1| = 3$, $|a_2| = 4$, $(\widehat{a_1, a_2}) = 2\pi/3$. Calcúlense: a) $a_1^2 = a_1a_1$; b) $(3a_1 - 2a_2)(a_1 + 2a_2)$; c) $(a_1 + a_2)^2$

1.50. $|a_1| = 3$, $|a_2| = 5$. Determínese para qué valor de α los vectores $a_1 + \alpha a_2$ y $a_1 - \alpha a_2$ serán perpendiculares.

1.51. Hállese el ángulo, formado por los vectores unidad e_1 y e_2, si se sabe que los vectores $a = e_1 + 2e_2$ y $b = 5e_1 - 4e_2$ son perpendiculares.

1.52. Hállese el ángulo α del vértice de un triángulo isósceles, sabiendo que las medianas trazadas desde los extremos de la base de dicho triángulo son recíprocamente perpendiculares.

1.53. Al vértice de un cubo están aplicadas tres fuerzas cuya magnitud es **1**, 2, 3, dirigidas a lo largo de las diagonales de las caras del cubo que se intersecan en dicho vértice. Hállese la magnitud de la resultante de las tres fuerzas mencionadas.

1.54. Sean dados un rectángulo $ABCD$ y un punto arbitrario M dispuesto fuera de dicho rectángulo. Demuéstrese la igualdad $\overline{MA}\cdot\overline{MC} = \overline{MB}\cdot\overline{MD}$. Dedúzcase de aquí que $|\overline{MA}|^2 + |\overline{MC}|^2 = |\overline{MB}|^2 + |\overline{MD}|^2$.

1.55. $ABCD$ es un trapecio isósceles, $\overline{AB} = a$ es la base, $\overline{AD} = b$, el lado lateral, y el ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ es igual a $\pi/3$. Exprésense en términos de a y b los vectores $\overline{DC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$.

1.56. Sabiendo que $|a| = 3$, $|b| = 1$, $|c| = 4$ y $a + b + c = 0$, calcúlese la suma $ab + bc + ca$.

1.57. Sean dados los vectores $a_1(4, -2, -4)$ y $a_2(6, -3, 2)$. Calcúlense:

a) a_1a_2; b) $(2a_1 - 3a_2)(a_1 + 2a_2)$; c) $(a_1 - a_2)^2$;
d) $|2a_1 - a_2|$; e) $\text{pr}_{a_1} a_2$; f) $\text{pr}_{a_2} a_1$;
g) los cosenos directores del vector a_1;
h) $\text{pr}_{a_1+a_2}(a_1 - 2a_2)$; i) el $\cos(\widehat{a_1, a_2})$.

1.58. Sean dados los puntos $A(2, 2)$ y $B(5, -2)$. Hállese en el eje de abscisas tal punto M que $\widehat{AMB} = \pi/2$.

1.59. Hállense las longitudes de los lados y las magnitudes de los ángulos de un triángulo cuyos vértices son $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ y $C(3, -2, 1)$.

1.60. Demuéstrese que un cuadrilátero con los vértices $A\,(-3,\ 5,\ 6)$, $B\,(1,\ -5,\ 7)$, $C\,(8,\ -3,\ -1)$ y $D\,(4,\ 7,\ -2)$ es un cuadrado.

1.61. Hállese el coseno del ángulo φ entre las diagonales (AC) y (BD) de un paralelogramo, si están dados tres vértices de él: $A\,(2,\ 1,\ 3)$, $B\,(5,\ 2,\ -1)$ y $C\,(-3,\ 3,\ -3)$.

1.62. Calcúlese el trabajo de la fuerza $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ al trasladarse un punto material de la posición $A\,(-1,\ 2,\ 0)$ a la $B\,(2,\ 1,\ 3)$.

1.63. Sean dados los vectores $\boldsymbol{a}\,(1,\ 1)$ y $\boldsymbol{b}\,(1,\ -1)$. Determínese el coseno del ángulo entre los vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ que satisfacen el sistema de ecuaciones $2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$.

1.64. Los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ tienen longitudes iguales y forman dos a dos ángulos iguales. Hállense las coordenadas del vector $\boldsymbol{c}$, si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

◀ Si $\boldsymbol{c} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$, entonces, de las condiciones del problema se deduce que el vector $\boldsymbol{c}$ satisface el sistema de ecuaciones

$$\boldsymbol{ca} = X + Y = \boldsymbol{ab} = 1;$$
$$\boldsymbol{cb} = Y + Z = \boldsymbol{ab} = 1;$$
$$|\boldsymbol{c}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = |\boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{b}|^2 = 2.$$

Resolviendo este sistema, hallamos que $X_1 = -1/3$, $Y_1 = 4/3$, $Z_1 = -1/3$ o bien $X_2 = 1$, $Y_2 = 0$, $Z_2 = 1$. ▶

1.65. Los rayos $[OA)$, $[OB)$, y $[OC)$ forman dos a dos ángulos iguales cuya magnitud es $\pi/3$. Hállese el ángulo entre las bisectrices de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$.

1.66. Hállense las coordenadas del vector $\boldsymbol{x}$, que es colineal con el vector $\boldsymbol{a}\,(2,\ 1,\ -1)$ y satisface la condición $\boldsymbol{ax} = 3$.

1.67. El vector $\boldsymbol{x}$ es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{a}_1\,(2,\ 3,\ -1)$ y $\boldsymbol{a}_2\,(1,\ -2,\ 3)$ y satisface la condición $\boldsymbol{x}\,(2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = -6$. Hállense las coordenadas de $\boldsymbol{x}$.

Si se da cierto vector $\boldsymbol{e}$, entonces se llama *componente ortogonal del vector arbitrario* $\boldsymbol{a}$ *a lo largo del vector* $\boldsymbol{e}$ al vector $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{e}}$, colineal con $\boldsymbol{e}$, con la particularidad de que la diferencia $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{e}}$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{e}$.

Por analogía, se llama *componente ortogonal* del vector $\boldsymbol{a}$ *en el plano* P el vector $\boldsymbol{a}_P$, coplanar con el plano P, con la particularidad de que la diferencia $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_P$ es perpendicular a dicho plano.

1.68. Hállense, para el vector $\boldsymbol{a}\,(-1,\ 2,\ 1)$, el componente ortogonal a lo largo del versor básico $\boldsymbol{j}$ y el componente ortogonal en el plano de los vectores $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{k}$.

1.69. Se dan los vectores $\boldsymbol{e}(1, 1, 1)$ y $\boldsymbol{a}(-1, 2, 1)$. Hállense:

a) el componente ortogonal del vector $\boldsymbol{a}$ a lo largo del vector $\boldsymbol{e}$;

b) el componente ortogonal del vector $\boldsymbol{a}$ en el plano P que es perpendicular al vector $\boldsymbol{e}$.

1.70. Se dan los vértices de un triángulo $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -1, 2)$ y $C(-5, 6, -4)$; $[BD]$ es la altura del triángulo trazada por el vértice B. Hállense las coordenadas del punto D.

1.71*. Se dan los vectores $\boldsymbol{e}_1(1, -2, 0)$, $\boldsymbol{e}_2(1, 1, 1)$ y $\boldsymbol{a}(-2, 0, 1)$. Hállese el componente ortogonal $\boldsymbol{a}_{e_1, e_2}$ del vector $\boldsymbol{a}$ en el plano de los vectores $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$.

Si la base $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ es rectangular, entonces las coordenadas de un vector arbitrario $\boldsymbol{a} = X_1\boldsymbol{e}_1 + X_2\boldsymbol{e}_2 + X_3\boldsymbol{e}_3$ en esta base pueden calcularse según la fórmula

$$X_i = \boldsymbol{e}\boldsymbol{a}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

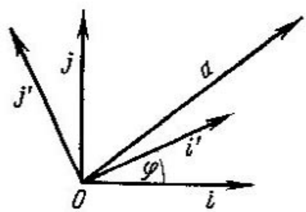


Fig. 11

En particular, la fórmula (11) permite establecer fácilmente la relación que existe entre las coordenadas de un mismo vector en distintas bases rectangulares.

Ejemplo 3. Supongamos que la base $\mathfrak{B}' = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}')$ se ha obtenido de la base $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ girando la última alrededor del punto O en un ángulo φ ($\varphi > 0$, si el giro se realiza en el sentido antihorario, $\varphi < 0$, en el caso contrario) (fig. 11). Establézcase la relación que existe entre las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$ en las bases $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$.

◀ Sea $\boldsymbol{a} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j}$. En este caso

$$X' = \boldsymbol{a}\boldsymbol{i}' = X\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}' + Y\boldsymbol{j}\boldsymbol{i}', \quad (12)$$
$$Y' = \boldsymbol{a}\boldsymbol{j}' = X\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}' + Y\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}'.$$

Por otra parte, tenemos:

$$\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}' = \cos\varphi, \quad \boldsymbol{j}\boldsymbol{i}' = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\operatorname{sen}\varphi,$$

$$\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \operatorname{sen}\varphi, \quad \boldsymbol{j}\boldsymbol{j}' = \cos\varphi,$$

Por eso las fórmulas de transformación de las coordenadas (12) toman la forma

$$X' = X\cos\varphi - Y\operatorname{sen}\varphi,$$
$$Y' = X\operatorname{sen}\varphi + Y\cos\varphi. \blacktriangleright$$

1.72. Dedúzcanse las fórmulas de transformación de las coordenadas de los puntos de un plano al pasar del sistema de coordenadas $\langle O, \mathfrak{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})\rangle$ al sistema $\langle O'\mathfrak{B}' = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}')\rangle$, si $\overline{OO'} = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j}$, y la base $\mathfrak{B}'$ se ha obtenido de la base $\mathfrak{B}$ girándola en un ángulo φ en torno al punto O.

1.73. Escríbanse las fórmulas de transformación de las coordenadas de los vectores al pasar de la base $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ a la base $\mathfrak{B}' = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$, si

$$\boldsymbol{i}' = \cos\varphi\cdot\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{j}' = -\operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{i} + \cos\varphi\cdot\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}.$$

1.74. En la base rectangular $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ el vector $\boldsymbol{a}$ se descompone en $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. Convénzase de que la terna de vectores

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} - \frac{1}{2}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$$

forma también una base rectangular $\mathfrak{B}' = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$; hállense en dicha base las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$.

1.75. Sea dada una terna no coplanar de vectores $\boldsymbol{e}_1(1, -2, 0)$, $\boldsymbol{e}_2(0, 1, 1)$ y $\boldsymbol{e}_3(1, 2, 2)$ que forma una base oblicuángula (¡compruébese!). Los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ en dicha base se descomponen en $\boldsymbol{a}_1 = X_1^{(1)}\boldsymbol{e}_1 + X_2^{(1)}\boldsymbol{e}_2 + X_3^{(1)}\boldsymbol{e}_3$ y $\boldsymbol{a}_2 = X_1^{(2)}\boldsymbol{e}_1 + X_2^{(2)}\boldsymbol{e}_2 + X_3^{(2)}\boldsymbol{e}_3$. Exprésese el producto escalar $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$ en términos de las coordenadas de los vectores en esta base.

5. Producto vectorial de vectores. Una terna ordenada de vectores no coplanares $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ se llama *derecha*, si para un observador ubicado dentro del ángulo sólido formado por dichos vectores, el giro más corto de $\boldsymbol{e}_1$ a $\boldsymbol{e}_2$ y de $\boldsymbol{e}_2$ a $\boldsymbol{e}_3$ parece realizarse en el sentido antihorario. En el caso contrario la terna $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ se denomina *izquierda*.

Se llama *producto vectorial* del vector $\boldsymbol{a}_1$ por el vector $\boldsymbol{a}_2$ el vector, denotado por el símbolo $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ (o bien $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$), que se define mediante las siguientes tres condiciones:

1) la longitud del vector $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ es igual al área de un paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$, es decir, $|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]| = |\boldsymbol{a}_1|\cdot|\boldsymbol{a}_2| \operatorname{sen}(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})$;

2) el vector $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ es perpendicular al plano de vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$;

3) una terna ordenada $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ es derecha.

De la definición del producto vectorial proviene que

$$\boldsymbol{a}_1 \parallel \boldsymbol{a}_2 \Leftrightarrow [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = 0.$$

Las propiedades algebraicas del producto vectorial:

1) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = -[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1]$;

2) $[\lambda a_1, a_2] = \lambda [a_1, a_2]$;

3) $[a_1 + a_2, b] = [a_1, b] + [a_2, b]$.

Si $a_1 (X_1, Y_1, Z_1)$ y $a_2 (X_2, Y_2, Z_2)$ son los vectores dados por sus coordenadas en la base rectangular derecha, entonces la descomposición del producto vectorial en la misma base se expresa

$$[a_1, a_2] = (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)\, i + (Z_1X_2 - X_1Z_2)\, j + (X_1Y_2 - Y_1X_2)\, k,$$

o bien, en la notación simbólica (aplicando el concepto de determinante de tercer orden; véase § 1, cap. 3)

$$[a_1, a_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

1.76. $|a_1| = 1$, $|a_2| = 2$ y $(\widehat{a_1, a_2}) = 2\pi/3$. Calcúlense:

a) $|[a_1, a_2]|$; b) $|[2a_1 + a_2, a_1 + 2a_2]|$;

c) $|[a_1 + 3a_2, 3a_1 - a_2]|$.

1.77. ¿Qué condición deben satisfacer los vectores a_1 y a_2 para que los vectores $a_1 + a_2$ y $a_1 - a_2$ sean colineales?

1.78. Simplifíquense las expresiones:

a) $[i, j + k] - [j, i + k] + [k, i + j + k]$,

b) $[a + b + c, c] + [a + b + c, b] + [b - c, a]$,

c) $[2a + b, c - a] + [b + c, a + b]$,

d) $2i\,[j, k] + 3j\,[i, k] + 4k\,[i, j]$.

1.79. Demuéstrese que $[a - b, a + b] = 2\,[a, b]$ y aclárese el sentido geométrico de esta identidad.

1.80. $|a| = |b| = 5$, $(\widehat{a, b}) = \pi/4$. Calcúlese el área de un triángulo construido sobre los vectores $a - 2b$ y $3a + 2b$.

1.81. Los vectores a, b y c están asociados mediante la condición $a + b + c = 0$. Demuéstrese que $[a, b] = [b, c] = [c, a]$. ¿Cuál es el sentido geométrico de este resultado?

1.82. Demuéstrese que para cualesquiera vectores a, p, q y r los vectores $[a, p]$, $[a, q]$ y $[a, r]$ son coplanares.

1.83. $|a| = 2$, $|b| = 5$, $(\widehat{a, b}) = \pi/6$. Exprésese a través de los vectores a y b el vector unidad c_0, perpendicular a los vectores a y b, y tal que:

a) la terna (a, b, c_0) sea derecha;

b) la terna (b, c_0, a) sea izquierda.

1.84. Sean dados los vectores $a_1 (3, -1, 2)$ y $a_2 (1, 2, -1)$. Hállense las coordenadas de los vectores:

a) $[a_1, a_2]$; b) $[2a_1 + a_2, a_2]$; c) $[2a_1 - a_2, 2a_1 + a_2]$.

1.85. Calcúlese el área de un triángulo cuyos vértices son $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$ y $C(4, 3, 2)$.

1.86. En un triángulo con los vértices $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$ y $C(1, 3, -1)$ hállese la altura $h = |\overline{BD}|$.

1.87. Tres vectores no nulos $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ están ligados entre sí mediante las relaciones $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$, $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Hállense las longitudes de estos vectores y los ángulos entre ellos.

1.88. La fuerza $\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ está aplicada al punto $A(4, -2, 3)$. Determínese el momento de esta fuerza respecto al punto $O(3, 2, -1)$.

1.89. Sean dadas tres fuerzas: $\boldsymbol{F}_1(2, -1, -3)$, $\boldsymbol{F}_2(3, 2, -1)$ y $\boldsymbol{F}_3(-4, 1, 3)$ aplicadas al punto $A(-1, 4, 2)$. Determínense la magnitud y los cosenos directores del momento de la resultante de dichas fuerzas respecto del punto $O(2, 3, -1)$.

1.90. Calcúlese el área de un paralelogramo cuyas diagonales son vectores $2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ y $4\boldsymbol{e}_1 - 5\boldsymbol{e}_2$, donde $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$ son los vectores unidad y $(\widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2}) = \pi/4$.

1.91. Hállense las coordenadas del vector $\boldsymbol{x}$, si se sabe que éste es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{a}_1(4, -2, -3)$ y $\boldsymbol{a}_2(0, 1, 3)$, forma con el versor $\boldsymbol{j}$ un ángulo obtuso y que $|\boldsymbol{x}| = 26$.

1.92. Hállense las coordenadas del vector $\boldsymbol{x}$, si éste es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{a}_1(2, -3, 1)$ y $\boldsymbol{a}_2(1, -2, 3)$ y satisface, además, la condición $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}) = 10$.

1.93. ¿En qué condiciones la ecuación $\boldsymbol{a}_2 = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}]$ tiene solución respecto de $\boldsymbol{x}$? ¿Cuántas soluciones existen?

1.94. Hállese el componente del vector $\boldsymbol{a}(-1, 2, 0)$ que sea perpendicular al plano de los vectores $\boldsymbol{e}_1(1, 0, 1)$ y $\boldsymbol{e}_2(1, 1, 1)$.

1.95. ¿Cómo variará la expresión (13), si prefijamos las coordenadas de los vectores en la base rectangular izquierda? ¿Será válida esta fórmula para el caso de una base oblicuángula?

1.96*. El vector $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]]$ se llama *producto vectorial doble* de los vectores dados. Demuéstrese que se verifica la igualdad

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

6. Producto mixto de vectores. Se denomina *producto mixto* de una terna ordenada de vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ al número $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\,\boldsymbol{a}_3$.

Las propiedades geométricas del producto mixto son:

1) si V es el volumen de un paralelepípedo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ y $\boldsymbol{a}_3$, entonces

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\, \boldsymbol{a}_3 = \begin{cases} V, \text{ si la terna } (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \text{ es} \\ \text{derecha,} \\ -V, \text{ si la terna } (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \text{ es} \\ \text{izquierda;} \end{cases}$$

2) para que tres vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ sean coplanares, es necesario y suficiente el cumplimiento de la condición $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\, \boldsymbol{a}_3 = 0$.

La propiedad algebraica fundamental del producto mixto consiste en que la permutación cíclica de los vectores no cambia su magnitud, es decir,

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\, \boldsymbol{a}_3 = [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]\, \boldsymbol{a}_1 = [\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1]\, \boldsymbol{a}_2.$$

Esta propiedad permite introducir la designación $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\, \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3$ (el resultado no depende de cómo se colocan los corchetes en el segundo miembro). Un producto mixto puede ser escrito en términos de coordenadas de los vectores en la base rectangular derecha en la forma

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

1.97. Los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ forman una terna derecha, son recíprocamente perpendiculares y $|\boldsymbol{a}_1| = 4$, $|\boldsymbol{a}_2| = 2$, $|\boldsymbol{a}_3| = 3$. Calcúlese $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3$.

1.98. Se dan los vectores $\boldsymbol{a}_1(1, -1, 3)$, $\boldsymbol{a}_2(-2, 2, 1)$ y $\boldsymbol{a}_3(3, -2, 5)$. Calcúlese $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3$. ¿Cuál es la orientación de las ternas:

a) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$; b) $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3)$; c) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2)$?

1.99. Establézcase si los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ y $\boldsymbol{a}_3$ forman una base en el conjunto de todos los vectores, si:

a) $\boldsymbol{a}_1(2, 3, -1)$, $\boldsymbol{a}_2(1, -1, 3)$, $\boldsymbol{a}_3(1, 9, -11)$;

b) $\boldsymbol{a}_1(3, -2, 1)$, $\boldsymbol{a}_2(2, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}_3(3, -1, -2)$.

1.100. Demuéstrese que $|\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3| \leqslant |\boldsymbol{a}_1|\,|\boldsymbol{a}_2|\,|\boldsymbol{a}_3|$; ¿en qué caso tiene lugar el signo de igualdad?

1.101. Demuéstrese que para cualesquiera $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ los vectores $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ son coplanares. ¿Cuál es el sentido geométrico de este hecho?

1.102. Demuéstrese la identidad

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c})\,(4\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 5\boldsymbol{c}) = 0.$$

1.103. Demuéstrese que si $\alpha\,[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + \beta\,[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + \gamma\,[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] = 0$, y por lo menos uno de los números α, β y γ es distinto de cero, entonces los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son coplanares.

1.104. Calcúlese el volumen del tetraedro $OABC$, si $\overline{OA} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$; $\overline{OB} = -3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\overline{OC} = 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$.

1.105. Calcúlese el volumen de un tetraedro con los vértices situados en los puntos $A\,(2, -3, 5)$, $B\,(0, 2, 1)$, $C\,(-2, -2, 3)$ y $D\,(3, 2, 4)$.

1.106. En un tetraedro con los vértices situados en los puntos $A\,(1, 1, 1)$, $B\,(2, 0, 2)$, $C\,(2, 2, 2)$ y $D\,(3, 4, -3)$ calcúlese la altura $h = |\overline{DE}|$.

1.107. Demuéstrese que los cuatro puntos $A\,(1, 2, -1)$, $B\,(0, 1, 5)$, $C\,(-1, 2, 1)$ y $D\,(2, 1, 3)$ en sitúan en un plano.

1.108. Pruébese que el volumen de un paralelepípedo construido sobre las diagonales de las aristas del paralelepípedo dado es igual al volumen duplicado del mismo.

1.109. Demuéstrense las identidades:

a) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{abc}$;

b) $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = 3\boldsymbol{abc}$;

c) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{abc}$;

d) $\forall\, \alpha, \beta\ (\boldsymbol{ab}\,(\boldsymbol{c} + \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{abc})$.

§ 2. Objetos geométricos lineales

1. Recta en un plano. Una línea recta en un plano dentro del sistema rectangular de coordenadas rectangulares cartesianas Oxy puede ser definida por la ecuación de cualquiera de los siguientes tipos:

1) $Ax + By + C = 0$ que es la *ecuación general* de la recta;

2) $A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) = 0$ que es la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_0\,(x_0, y_0)$ y es perpendicular al vector normal $\boldsymbol{n}\,(A, B)$;

3) $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{m}$ que es la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_0\,(x_0, y_0)$ y es paralela respecto del *vector director* $\boldsymbol{q}\,(l, m)$ (*ecuación canónica* de la recta);

4) $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases}$ $t \in (-\infty, \infty)$, que son las ecuaciones paramétricas de la recta las que en la forma vectorial se expresan así:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{q}t,$$

donde $\boldsymbol{r}_0\,(x_0, y_0)$ es el radio vector del punto $M_0\,(x_0, y_0)$, $\boldsymbol{q}\,(l, m)$ es el vector director de la recta;

5) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ que es la ecuación de la recta *en segmentos*, donde a y b son las magnitudes de los segmentos dirigidos que se obtienen al cortar la recta los ejes coordenados Ox y Oy, respectivamente;

6) $x \cos\alpha + y \cos\beta - p = 0$, que es la *ecuación normal* de la recta, donde $\cos\alpha$ y $\cos\beta$ son cosenos directores del vector normal $\boldsymbol{n}$,

dirigido desde el origen de coordenadas hacia la recta, y $p > 0$ es la distancia entre el origen de coordenadas y la recta.

La ecuación general de la recta 1) se reduce a la forma normal 6) multiplicándola por el factor normalizador

$$\mu = -\frac{\operatorname{sgn} C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Si la recta L está dada por la ecuación del tipo 6) y $M(x, y)$ es un punto del plano, entonces la expresión

$$\delta(M, L) = x\cos\alpha + y\cos\beta - p$$

lleva el nombre de *desviación del punto M de la recta L*. El signo $\delta(M, L)$ indica la disposición mutua del punto M, la recta L y el origen de coordenadas, a saber: si el punto M y el origen de coordenadas están situados por diferentes lados de la recta L, entonces $\delta(M, L) > 0$, y si M y el origen de coordenadas se hallan a un mismo lado de la recta L, entonces $\delta(M, L) < 0$. La distancia $\rho(M, L)$ entre el punto M y la recta L se determina por la igualdad $\rho(M, L) = |\delta(M, L)|$.

EJEMPLO 1. Escríbase la ecuación de la recta L' que es paralela a las dos rectas dadas L_1: $x + 2y - 1 = 0$, L_2: $x + 2y + 2 = 0$ y que pasa entre ellos por el medio.

◀ Método 1. Por cuanto el vector $\boldsymbol{n}(1, 2)$, normal respecto de las rectas dadas L_1 y L_2, es también normal respecto de L', será suficiente encontrar un punto M', situado en el medio de la distancia entre L_1 y L_2. De las ecuaciones para L_1 y L_2 hallamos cualesquiera dos puntos $M_1 \in L_1$ y $M_2 \in L_2$, por ejemplo, $M_1(1, 0)$ y $M_2(-2, 0)$. En este caso el punto $M'(-1/2, 0)$ que divide el segmento M_1M_2 por la mitad, se fija en medio de la distancia entre L_1 y L_2. Por eso la ecuación de la recta L' tiene por expresión

$$L'\colon x + 2y + \frac{1}{2} = 0.$$

Método 2. Un punto arbitrario M pertenece a L' cuando, y sólo cuando, $\rho(M, L_1) = \rho(M, L_2)$, es decir,

$$|\delta(M, L_1)| = |\delta(M, L_2)|. \tag{1}$$

Para despejarnos de los módulos en esta relación, establezcamos la posición del origen de coordenadas con respecto a las rectas dadas L_1 y L_2. Las ecuaciones normales de estas rectas son:

$$L_1\colon \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \quad y \quad L_2\colon -\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.$$

Puesto que las normales $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$, trazadas del punto O en dirección de L_1 y L_2, son contrariamente orientadas, entonces el punto O se encuentra en la franja entre L_1 y L_2.

Por ello, la relación (1) toma la forma $\delta(M, L_1) = \delta(M, L_2)$, o bien

$$\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{2}{\sqrt{5}},$$

decir, $L': x+2y+\frac{1}{2}=0$. ▶

En los problemas 2.1—2.3 se pide:

1) escribir la ecuación de la recta, reducirla a la forma general y construir la recta.

2) reducir la ecuación general a la forma normal y determinar la distancia del origen de coordenadas hasta la recta.

2.1. La recta L viene dada por el punto $M_0(x_0, y_0) \in L$ y el vector normal $\boldsymbol{n}(A, B)$:

a) $M_0(-1, 2)$, $\boldsymbol{n}(2, 2)$; b) $M_0(2, 1)$, $\boldsymbol{n}(2, 0)$:

c) $M_0(1, 1)$, $\boldsymbol{n}(2, -1)$.

2.2. La recta L está dada por el punto $M_0(x_0, y_0) \in L$ y el vector director $\boldsymbol{q}(l, m)$:

a) $M_0(-1, 2)$, $\boldsymbol{q}(3, -1)$; b) $M_0(1, 1)$, $\boldsymbol{q}(0, -1)$;

c) $M_0(-1, 1)$, $\boldsymbol{q}(2, 0)$.

2.3. La recta L está dada por medio de sus dos puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$:

a) $M_1(1, 2)$, $M_2(-1, 0)$; b) $M_1(1, 1)$, $M_2(1, -2)$;

c) $M_1(2, 2)$, $M_2(0, 2)$.

2.4. Se dan la recta L y el punto M. Se requiere:

1) calcular la distancia $\rho(M, L)$ del punto M hasta la recta L;

2) escribir la ecuación de la recta L' que pasa por el punto M y es perpendicular a la recta dada L;

3) escribir la ecuación de la recta L'' que pasa por el punto M y es paralela a la recta dada L.

Los datos de partida son:

a) $L: -2x+y-1=0$, $M(-1, 2)$;

b) $L: 2y+1=0$, $M(1, 0)$;

c) $L: x+y+1=0$, $M(0, 1)$.

Sean dadas dos rectas L_1 y L_2. Son posibles dos casos de su disposición mutua:

1) L_1 y L_2 son rectas paralelas que, en particular, coinciden;

2) L_1 y L_2 se cortan.

En los problemas 2.5—2.9 investíguese la disposición mutua de las rectas dadas L_1 y L_2. En el caso 1) hállese la distancia $\rho(L_1, L_2)$ entre las rectas, en el segundo caso hállese el coseno del ángulo $(\widehat{L_1, L_2})$ y el punto M_0 de intersección de las rectas.

2.5. L_1: $-2x + y - 1 = 0$, L_2: $2y + 1 = 0$,

2.6. $L_1 : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1}$ $\quad L_2 : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{0}$,

2.7. L_1: $x + y - 1 = 0$, L_2: $2x - 2y + 1 = 0$,

2.8. $L_1 : x + y - 1 = 0$, $\quad L_2 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-2}$,

2.9. L_1: $x + 2y + 1 = 0$, L_2: $2x - 4y - 2 = 0$.

2.10. El triángulo ABC está dado por las coordenadas de sus vértices. Se necesita:

1) escribir la ecuación del lado (AB);

2) escribir la ecuación de la altura (CD) y calcular su altura $h = |CD|$;

3) hallar el ángulo φ entre la altura (CD) y la mediana (BM);

4) escribir la ecuación de las bisectrices L_1 y L_2 de los ángulos interior y exterior en el vértice A.

Los datos de partida son:

a) $A(1, 2)$, $B(2, -2)$, $C(6, 1)$;

b) $A(2, -2)$, $B(6, 1)$, $C(-2, 0)$.

2.11. Pruébese que el punto $M(-1, 2)$ pertenece a la recta L: $x = 2t$, $y = -1 - 6t$. Hállese el valor del parámetro t que corresponde a este punto.

2.12. Calcúlese la distancia desde el punto $M(1, 1)$ hasta la recta L: $x = -1 + 2t$, $y = 2 + t$.

Si la recta viene dada por la ecuación general $Ax + By + C = 0$, y, además, $B \neq 0$ (es decir, la recta no es paralela al eje Oy), entonces dicha recta puede ser descrita mediante una *ecuación con coeficiente angular* del tipo $y = kx + b$.

EJEMPLO 2. Escríbase la ecuación de la recta L' que pasa por el punto $M(2, 1)$ bajo el ángulo $\pi/4$ respecto de la recta L: $2x + 3y + 4 = 0$.

◀ Se denomina ángulo entre las rectas L y L' el menor de dos ángulos adyacentes formados por las mismas. Por ello (véase el problema 2.13)

$$\operatorname{tg}(\widehat{L_1, L_2}) = \left| \frac{k + \frac{2}{2}}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)k} \right| = 1,$$

donde k es el coeficiente angular de la recta L'. De esta ecuación hallamos $k_1 = 1/5$ y $k_2 = -5$. Por consiguiente, el problema tiene dos soluciones. Haciendo uso de las coordenadas del punto M, podemos escribir para cada caso una ecuación con coeficiente angular:

$$y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}, \qquad y = -5x + 11,$$

o bien, en el caso general,

$$x - 5y + 3 = 0, \quad 5x + y - 11 = 0. \blacktriangleright$$

2.13. Demuéstrese que si las rectas L_1 y L_2 están dadas por las ecuaciones con coeficiente angular, entonces

$$\operatorname{tg}(\widehat{L_1, L_2}) = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

2.14. Del punto M (5, 4) sale un rayo de luz bajo el ángulo $\varphi = \operatorname{arc\,tg} 2$ respecto al eje Ox y se refleja de éste. Escríbanse las ecuaciones de los rayos incidente y reflejado.

2.15. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto M (8, 6) y forma con los ejes coordenados un triángulo de área 12.

2.16. Escríbase la ecuación de una recta que es paralela a las dos rectas dadas L_1 y L_2 y pasa por el medio entre ellas, si:

a) $L_1: 3x - 2y - 1 = 0, \quad L_2: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{3}$;

b) $L_1: 3x - 15y - 1 = 0, \quad L_2: \dfrac{x + \frac{1}{2}}{5} = \dfrac{y + \frac{1}{2}}{1}$.

2.17. Escríbase la ecuación de una recta que pasa por el punto M (2, 1) y forma con la recta L: $x = 1 + t$, $y = -2 - {}^2/_3 t$ un ángulo igual a $\pi/4$.

2.18. Escríbanse las ecuaciones de los lados del triángulo ABC, si se conoce su vértice A (1, 3) y están dadas sus dos medianas $x - 2y + 1 = 0$, e $y - 1 = 0$.

2.19*. Demuéstrese que la recta $2x + y + 3 = 0$ corta el segmento $[M_1M_2]$, donde M_1 (—5, 1) y M_2 (3, 7).

2.20. Escríbase la ecuación de una recta que pasa por el punto M_0 (—2, 3) siendo equidistante de los puntos M_1 (5, —1) y M_2 (3, 7).

2.21. Establézcase si el punto M_0 (1, —2) y el origen de coordenadas se disponen en un ángulo, en ángulos adyacentes o en ángulos opuestos por el vértice y formados por las rectas L_1 y L_2 que se cortan, si:

a) $L_1: 2x - y - 5 = 0$, $L_2: 3x + y + 10 = 0$,

b) $L_1: x - 2y - 1 = 0$, $L_2: 3x - y - 2 = 0$.

2.22. Establézcase cuál de los ángulos, agudo u obtuso, formados por las rectas $3x - 5y - 4 = 0$ y $x + 2y + 3 = 0$, contiene el punto M (2, −5).

2.23. Escríbanse las ecuaciones de los lados de un triángulo, si se sabe uno de sus vértices B (2, 6), y también las ecuaciones de la altura $x - 7y + 15 = 0$ y la bisectriz $7x + y + 5 = 0$, trazadas desde un mismo vértice.

2.24. Escríbanse las ecuaciones de los lados de un triángulo, si se sabe uno de sus vértices B (2, −7), y también las ecuaciones de la altura $3x + y + 11 = 0$ y la mediana $x + 2y + 7 = 0$, trazadas desde los diferentes vértices.

2.25. Escríbanse las ecuaciones de los lados de un triángulo, si se sabe uno de sus vértices A (3, −1), y también las ecuaciones de la bisectriz $x - 4y + 10 = 0$ y la mediana $6x + 10y - 59 = 0$, trazadas desde los diferentes vértices.

2. El plano y la recta en el espacio. El plano P en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas $Oxyz$ puede ser dado por cualquiera de las ecuaciones del siguiente tipo:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$, *ecuación general* del plano;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, ecuación del plano que pasa por el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y que es perpendicular al *vector normal* $\boldsymbol{n}(A, B, C)$;

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, ecuación *segmentaria* del plano, donde a, b, c son las magnitudes de los segmentos dirigidos que se obtienen al cortar el plano los ejes coordendos Ox, Oy, Oz, respectivamente:

4) $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$, la *ecuación normal* de un plano, donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son cosenos directores del vector normal $\boldsymbol{n}$, que está dirigido desde el origen de coordenadas hacia el plano, y $p > 0$ es la distancia entre el origen de coordenadas y el plano.

La ecuación general 1) se reduce a la normal del tipo 4) multiplicándola por el factor normalizador

$$\mu = -\frac{\operatorname{sgn} D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Si el plano P viene dado por la ecuación normal del tipo 4) y $M(x, y, z)$ es cierto punto del espacio, entonces la expresión

$$\delta(M, P) = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p,$$

lleva el nombre de desviación del punto M del plano P. El signo $\delta(M, P)$ indica la disposición mutua del punto M, el plano P y el origen de coordenadas, a saber: si el punto M y el origen de coordenadas se disponen por distintos lados respecto al punto P, entonces $\delta(M, P) > 0$, y si el punto M y el origen de coordenadas están a un mismo lado respecto al plano P, entonces $\delta(M, P) < 0$.

La distancia $\rho(M, P)$ entre el punto M y el plano P se determina por la igualdad $\rho(M, P) = |\delta(M, P)|$.

La recta L en el espacio puede ser dada:

1) *por las ecuaciones generales*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

donde los coeficientes A_1, B_1, C_1 no son proporcionales a los coeficientes A_2, B_2, C_2, lo que es equivalente a la definición de la recta como línea de intersección de los planos.

2) *por las ecuaciones paramétricas*

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

o en la forma vectorial

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{q}t,$$

donde $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ es el radio vector de cierto punto perteneciente a la recta, mientras que $\boldsymbol{q}(l, m, n)$ es el vector director de la recta;

3) *por las ecuaciones canónicas*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

lo que es equivalente a la descripción de la recta como línea de intersección de tres planos que proyectan esta recta sobre los planos coordenados.

Ejemplo 3. Escríbase la ecuación de un plano P que pasa por los puntos $M_1(1, 1, 1)$ y $M_2(0, 2, 1)$ paralelamente al vector $\boldsymbol{a}(2, 0, 1)$.

◀ El problema tiene una solución única, puesto que los vectores $\overline{M_1M_2}(-1, 1, 0)$ y $\boldsymbol{a}(2, 0, 1)$ no son colineales. A título de vector normal al plano puede ser elegido el vector

$$\boldsymbol{n} = [\overline{M_1, M_2}, \boldsymbol{a}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

La ecuación del plano tiene la forma $(x - 1) + (y - 1) - 2(z - 1) = 0$, o bien $x + y - 2z = 0$. La última ecuación está privada del término independiente, por lo cual el plano pasa por el origen de coordenadas.

Otro procedimiento. El punto $M(x, y, z)$ pertenece al plano buscado P cuando, y sólo cuando, los vectores $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ y $\boldsymbol{a}$ son coplanares. Por consiguiente,

$$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, $x + y - 2z = 0$. ▶

EJEMPLO 4. La recta L viene dada por las ecuaciones generales

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x-y+2=0. \end{cases}$$

Escríbanse las ecuaciones canónicas de esta recta y también la ecuación de su proyección sobre el eje coordenado Oxz.

◀ El punto M (0, 2, 2) satisface las ecuaciones generales de la recta (compruébelo) y, por tanto, se sitúa en dicha recta. A título de vector director de la recta podemos tomar el vector $\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]$, donde $\boldsymbol{n}_1$ (1, 1, −1) y $\boldsymbol{n}_2$ (2, −1, 0) son vectores normales de los planos cuya línea de intersección es precisamente la recta dada. De este modo,

$$\boldsymbol{q}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},$$

y las ecuaciones canónicas de la recta son:

$$\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{-3}.$$

La proporción obtenida es equivalente al sistema de tres ecuaciones

$$\begin{cases} -2x+y-2=0, \\ -3x+z-2=0, \\ -3y+2z+2=0, \end{cases}$$

que describen tres planos que proyectan la recta sobre los planos coordenados Oxy, Oxz y Oyz, respectivamente (ecuación de la recta en proyecciones). En particular, la ecuación $-3x+z-2=0$ es la ecuación de proyección de la recta dada sobre el plano Oxz. ▶

EJEMPLO 5. Sean dadas las rectas que se cruzan

$$L_1\colon\ \frac{x}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{1} \quad \text{y} \quad L_2\colon\ \frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

Hállese la distancia $\rho\,(L_1, L_2)$ entre las rectas y escríbase la ecuación de la perpendicular L común para ambas rectas.

◀ Hallemos la ecuación del plano P que pasa por la recta L_1 paralelamente a la recta L_2 (fig. 12). El punto M_1 (0, 1, −2) se sitúa en la recta L_1 y, por ende, pertenece al plano buscado P. A título de vector normal al plano citado tomemos el vector

$$\boldsymbol{n}=[\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}.$$

La ecuación del plano P es:

$$-2x-(y-1)-4(z+2)=0,$$

o bien, en la forma general, $2x+y+4z+7=0$.

La distancia $\rho(L_1, L_2)$ es igual a la distancia de cualquier punto de la recta L_2, por ejemplo del punto $M_2(-1, -1, 2)$ hasta el plano P. La ecuación normal del plano P tiene por expresión

$$-\frac{2}{\sqrt{21}}x-\frac{1}{\sqrt{21}}y-\frac{4}{\sqrt{21}}z-\frac{7}{\sqrt{21}}=0,$$

de donde

$$\rho(L_1, L_2)=|\delta(M_2, P)|=\left|\frac{2}{\sqrt{21}}+\frac{1}{\sqrt{21}}-\frac{8}{\sqrt{21}}-\frac{7}{\sqrt{21}}\right|=\frac{12}{\sqrt{21}}.$$

Con el objeto de formar la ecuación de la perpendicular común L, hallemos las ecuaciones de los planos P_1 y P_2 que pasan por las rectas

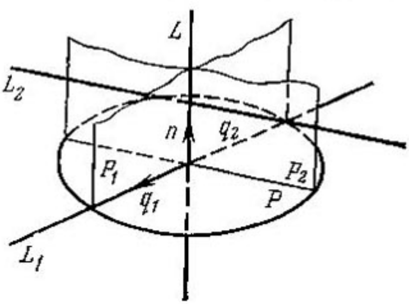


Fig. 12

dadas L_1 y L_2, respectivamente, y que son perpendiculares al plano P. Tenemos: $M_1(0, 1, -2) \in P_1$ y $\boldsymbol{n}_1 = [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{n}] = \boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \perp P_1$, de donde P_1: $x - 10y + 2z + 14 = 0$. Análogamente, $M_2(-1, -1, 2) \in P_2$ y $\boldsymbol{n}_2 = [\boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{n}] = -9\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} \perp P_2$, de donde P_2: $3x - 2y - z + 3 = 0$.

Puesto que $L = P_1 \cap P_2$, resulta que

$$\begin{cases} x-10y+2z+11=0, \\ 3x-2y-z+3=0 \end{cases}$$

son las ecuaciones generales de la recta L. ▶

2.26. Se dan el plano P y el punto M. Escríbase la ecuación del plano P' que pasa por el punto M paralelamente al plano P, y calcúlese la distancia $\rho(P, P')$, si:

a) P: $-2x + y - z + 1 = 0$, $M(1, 1, 1)$;

b) P: $x - y - 1 = 0$, $M(1, 1, 2)$.

2.27. Esríbase la ecuación del plano P' que pasa por los puntos dados M_1 y M_2 y que es perpendicular al plano dado P, si:

a) P: $-x + y - 1 = 0$, $M_1 (1, 2, 0)$, $M_2 (2, 1, 1)$;

b) P: $2x - y + z + 1 = 0$, $(M (0, 1, 1)$, $M (2, 0, 1)$.

2.28. Escríbase la ecuación de un plano que pasa por el punto M paralelamente a los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$, si:

a) $M (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_1 (0, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 (-1, 0, 1)$;

b) $M (0, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}_1 (2, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 (1, 1, 0)$.

2.29. Escríbase la ecuación de un plano que pasa por los puntos M_1 y M_2 paralelamente al vector $\boldsymbol{a}$, si:

a) $M_1 (1, 2, 0)$, $M_2 (2, 1, 1)$, $\boldsymbol{a} (3, 0, 1)$;

b) $M_1 (1, 1, 1)$, $M_2 (2, 3, -1)$, $\boldsymbol{a} (0, -1, 2)$.

2.30. Escríbase la ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados M_1, M_2, y M_3, si:

a) $M_1 (1, 2, 0)$, $M_2 (2, 1, 1)$, $M_3 (3, 0, 1)$;

b) $M_1 (1, 1, 1)$, $M_2 (0, -1, 2)$, $M_3 (2, 3, -1)$.

Sean dados dos planos P_1 y P_2. Son posibles dos casos de su disposición mutua:

1) $P_1 \parallel P_2$, en particular, los planos coinciden;

2) P_1 y P_2 se cortan a lo largo de cierta recta.

En los problemas 2.31-2.34 investíguense la disposición mútua de los planos dados. En el caso 1) hállese la distancia $\rho (P_1, P_2)$ entre los planos, en el caso 2) hállese el coseno del ángulo entre los planos.

2.31. P_1: $-x + 2y - z + 1 = 0$, P_2: $y + 3z - 1 = 0$.

2.32. P_1: $2x - y + z - 1 = 0$, P_2: $-4x + 2y - 2z - 1 = 0$.

2.33. P_1: $x - y + 1 = 0$, P_2: $y - z + 1 = 0$.

2.34. P_1: $2x - y - z + 1 = 0$, P_2: $-4x + 2y + 2z - 2 = 0$

2.35. Calcúlese el volumen de una pirámide limitada por el plano P: $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ y los planos coordenados.

2.36. Escríbanse las ecuaciones de los planos que dividen por el medio los ángulos diedros formados por los planos P_1 y P_2, si:

a) P_1: $x - 3y + 2z - 5 = 0$, P_2: $3x - 2y - z + 3 = 0$,

b) P_1: $2x - y + 5z - 3 = 0$, P_2: $2x - 10y + 4z - 2 = 0$.

2.37. Escríbase la ecuación de un plano equidistante de los dos planos dados P_1 y P_2, si:

a) P_1: $4x - y - 2z - 3 = 0$, P_2: $4x - y - 2z - 5 = 0$

b) P_1: $5x - 3y + z + 3 = 0$, P_2: $10x - 6y + 2z + 7 = 0$.

2.38. Establézcase si los puntos $M_1 (2, -1, 1)$ y $M_2 (1, 2, -3)$ se sitúan en un ángulo, en los ángulos adyacentes o en los ángulos opuestos por el vértice, formados por los planos P_1 y P_2, si:

a) P_1: $3x - y + 2z - 3 = 0$, P_2: $x - 2y - z + 4 = 0$
b) P_1: $2x - y + 5z - 1 = 0$, P_2: $3x - 2y + 6z - 1 = 0$

2.39. La recta L viene dada por las ecuaciones generales. Esríbanse para esta recta las ecuaciones canónicas y las ecuaciones en proyecciones (véase el ejemplo 4), si:

a) $L: \begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0; \end{cases}$ b) $L: \begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0; \\ 2x - y + z + 2 = 0; \end{cases}$

2.40. Escríbanse las ecuaciones canónicas de una recta que pasa por el punto $M_0(2, 0, -3)$ paralelamente:

a) al vector $q(2, -3, 5)$;

b) a la recta $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$;

c) al eje Ox; d) al eje Oz;

e) a la recta $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z - 3 = 0; \end{cases}$

f) a la recta $x = -2 + t$, $y = 2t$, $z = 1 - {}^1/_2\, t$.

2.41. Escríbanse las ecuaciones de una recta que pasa por dos puntos dados M_1 y M_2, si:

a) $M_1(1, -2, 1)$, $M_2(3, 1, -1)$;
b) $M_1(3, -1, 0)$, $M_2(1, 0, -3)$.

2.42. Se dan una recta $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$ y un punto $M(0, 1, 2) \notin L$ (compruébese). Se pide:

a) escribir la ecuación de un plano que pasa por la recta L y el punto M;

b) escribir la ecuación de un plano que pasa por el punto M y es perpendicular a la recta L;

c) escribir la ecuación de una perpendicular trazada desde el punto M a la recta L;

d) calcúlese la distancia $\rho(M, L)$;

e) hállese la proyección del punto M sobre la recta L.

2.43. Se dan el plano P: $x + y - z = 0$ y una recta L: $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$, con la particularidad de que $L \notin P$ (compruébese). Se pide:

a) calcular el sen $(\widehat{P, L})$ y las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano;

b) escribir la ecuación de un plano que pasa por la recta L y es perpendicular al plano P;

c) escribir las ecuaciones de la proyección de la recta L sobre el plano P.

2.44. Sean dadas dos rectas:

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=$$
$$=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Demuéstrese que las rectas L_1 y L_2 se disponen en un mismo plano cuando, y sólo cuando, se cumple la condición

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

2.45. Haciendo uso de los resultados del problema 2.44, convénzase de que las rectas L_1 y L_2 pertenecen a un mismo plano y escríbase la ecuación de este plano. Los datos de partida son:

a) $L_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$, $L_2: \dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$;

b) $L_1: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$, $L_2: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$.

2.46. Demuéstrese que las rectas

$$L_1: \begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad y_2: \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$$

son paralelas y hállese la distancia $\rho(L_1, L_2)$.

2.47. Demuéstrese que la distancia entre las rectas que se cruzan L_1: $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{q}_1 t$ y L_2: $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{q}_2 t$ puede ser calculada según la fórmula

$$\rho(L_1, L_2)=\frac{|(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2|}{|[\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2]|}.$$

2.48. Sean dadas dos rectas $L_1: \dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z+3}{-2}$ y $L_2: \dfrac{x-21}{6}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z-2}{-1}$. Se necesita:

a) demostrar que las rectas no se disponen en un mismo plano, es decir, se cruzan;

b) escribir la ecuación de un plano que pasa por la recta L_2 paralelamente a L_1;

c) calcular la distancia entre las rectas;

d) escribir la ecuación de la perpendicular común a las rectas L_1 y L_2.

2.49. Escríbanse las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por el punto M_0 (3, —2, —4) paralelamente al plano $3x-2y-3z-7=0$ y que corta la recta $\frac{x-2}{3}=$ $=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

§ 3. Curvas en el plano

1. Ecuación de la curva en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas. Se dice que la curva Γ en el sistema de coordenadas Oxy tiene la ecuación

$$F(x, y)=0, \tag{1}$$

si se cumple la siguiente condición: el punto $M(x, y)$ pertenece a la curva Γ cuando, y sólo cuando, sus coordenadas x e y satisfacen la relación (1). Si, en particular, $F(x, y)=f(x)-y$, la ecuación (1) puede escribirse en la forma

$$y=f(x), \tag{2}$$

y en este caso la curva Γ coincide con la gráfica de la función $f(x)$.

En el presente párrafo se estudia la relación existente entre las propiedades geométricas de la curva y su ecuación en algunos casos más simples.

Ejemplo 1. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la suma de los cuadrados de las distancias de cualquiera de sus puntos hasta los puntos $A(-a, 0)$, $B(0, a)$ y $C(a, 0)$ es igual a $3a^2$.

◀ Sea Γ una curva que satisface las condiciones del problema; $M(x, y)\in\Gamma$, si, y sólo si

$$\rho^2(M, A)+\rho^2(M, B)+\rho^2(M, C)=3a^2,$$

o bien

$$(x+a)^2+y^2+x^2+(y-a)^2+(x-a)^2+y^2=3a^2.$$

Realizadas las transformaciones sencillas, obtenemos

$$x^2+y^2-\frac{2}{3}ay=0,$$

o bien, formando el cuadrado perfecto,

$$x^2+\left(y-\frac{1}{3}a\right)^2=\frac{a^2}{9}.$$

Ésta es precisamente la ecuación buscada de la curva que representa en sí una circunferencia de radio $a/3$ y con el centro en el punto $M_0(0, a/3)$. ▶

En los problemas 3.1—3.14 se pide establecer cuáles curvas se definen por las ecuaciones dadas y construir estas curvas.

3.1. $x+|y|=0$. **3.2.** $|x|+y-x=0$. **3.3.** $x^2-xy=0$.

3.4. $xy+y^2=0$. **3.5.** $x^2-y^2=0$. **3.6.** $xy=0$.

3.7. $y^2-9=0$. **3.8.** $x^2-x-6=0$.

3.9. $x^2y-7xy+10y=0$. **3.10.** $x^2+y^2=4$.

3.11. $x^2+(y+3)^2=1$. **3.12.** $x^2+2y^2=0$.

3.13. $2x^2+y^2+2=0$. **3.14.** $x^2+|y^2-1|=0$.

3.15. Escríbase la ecuación de una curva, cada punto de la cual se encuentra a una misma distancia de los puntos $M_1(3, 2)$ y $M_2(2, 3)$.

3.16. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la diferencia de los cuadrados de las distancias desde cualquiera de sus puntos hasta los puntos $M_1(-a, 0)$ y $M_2(a, 0)$ es igual a c.

3.17. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la distancia de cualquiera de sus puntos hasta el eje Ox es dos veces mayor que la distancia hasta el eje Oy.

3.18. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la suma de los cuadrados de las distancias de cualquiera de sus puntos hasta los puntos $M_1(-3, 0)$ y $M_2(3, 0)$ es igual a 50.

3.19. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la distancia de cualquiera de sus puntos hasta el punto $M_1(-1, 1)$ es dos veces menor que la distancia hasta el punto $M_2(-4, 4)$.

3.20. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la suma de las distancias de cualquiera de sus puntos hasta los puntos $F_1(-2, 0)$ y $F_2(2, 0)$ es igual a $2\sqrt{5}$.

3.21. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual el módulo de la diferencia de distancias entre cualquiera de sus puntos y los puntos $F_1(-2, -2)$ y $F_2(2, 2)$ es igual a 4.

3.22. Escríbase la ecuación de una curva, cada punto de la cual es equidistante del punto $F(2, 2)$ y del eje Ox.

3.23. Establézcase que cualquiera de las ecuaciones siguientes define una circunferencia; hállese el centro de la misma C y el radio R:

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;
b) $x^2 + y^2 - 8x = 0$; c) $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

3.24. Escríbase la ecuación de la circunferencia en cada uno de los siguientes casos (designaciones: C es el centro de la circunferencia, R, el radio y M, M_1, M_2, M_3 son los puntos en la circunferencia):

a) $C(2, -3)$, $R = 7$; b) $M(2, 6)$, $C(-1, 2)$;

c) $M_1(3, 2)$, $M_2(-1, 6)$ son los extremos del diámetro de la circunferencia;

d) $C(1, -1)$, la recta $5x - 12y + 9 = 0$ es la línea tangente a la circunferencia;

e) $M(1, 2)$, la circunferencia toca los ejes de coordenadas;

f) $M_1(3, 1)$, $M_2(-1, 3)$, $C \in L$; $3x - y - 2 = 0$;

g)* $M_1(-1, 3)$, $M_2(0, 2)$, $M_3(1, -1)$.

3.25. Escríbase la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$, perpendicular a la recta $5x + 2y - 13 = 0$.

3.26. Calcúlese la distancia mínima del punto M_0 hasta la circunferencia Γ, si:

a) $M_0(6, -8)$, Γ: $x^2 + y^2 = 9$;
b) $M_0(-7, 2)$, Γ: $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$.

3.27. Determínese la disposición de una recta respecto de una circunferencia: la corta, es tangente a la circunferencia o pasa fuera de la última, siempre que la recta y la circunferencia vienen dadas por las ecuaciones:

a) $2x - y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$;
b) $x - 2y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$;
c) $x - y + 10 = 0$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

2. Curvas algebraicas de segundo orden. Se llama *curva algebraica de segundo orden* una curva Γ cuya ecuación en el sistema de coordenadas cartesianas se expresa

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{3}$$

donde no todos los coeficientes A, B y C son nulos simultáneamente (de lo contrario Γ sería una recta, es decir, una curva algebraica de primer orden).

En el caso general puede resultar que la ecuación (3) defina la así llamada curva *degenerada* (un conjunto vacío, un punto, una recta, un par de rectas).

En cambio, si la curva Γ es regular, se encontrará para ella tal sistema de coordenadas rectangulares cartesianas en el que la ecuación de la curva mencionada tenga una de las siguientes tres formas (*ecuación canónica*):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a \geqslant b > 0, \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a,\ b>0, \tag{5}$$

$$y^2=2px, \quad p>0. \tag{6}$$

La curva Γ se llama en este caso *elipse*, *hipérbola* o *parábola*, respectivamente, mientras que el propio sistema de coordenadas en el que su ecuación tiene la forma (4), (5) ó (6), lleva el nombre de *sistema canónico de coordenadas* para la curva dada.

La reducción de la ecuación general de una curva de segundo orden a la forma canónica se analiza detalladamente en el p. 4 del § 3, cap. 4.

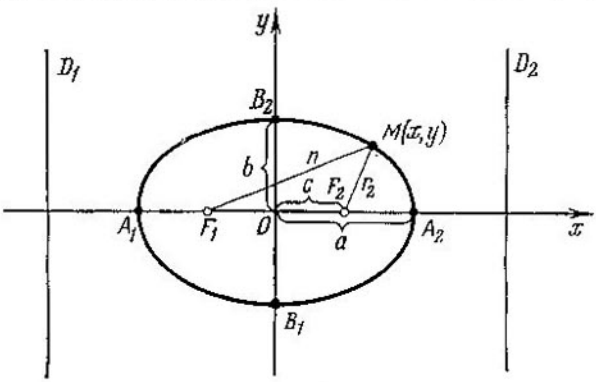


Fig. 13

El objetivo del presente punto consiste en el estudio de las propiedades geométricas fundamentales de las curvas regulares de segundo orden sobre la base de sus ecuaciones canónicas.

La *elipse* expresada por la ecuación canónica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a \geqslant b > 0$, tiene la forma expuesta en la fig. 13.

Los parámetros a y b se denominan *semiejes* de la elipse (mayor y menor, respectivamente), los puntos A_1 $(-a, 0)$, A_2 $(a, 0)$, B_1 $(0, -b)$ y B_2 $(0, b)$ son los *vértices* de la elipse, los ejes de simetría Ox y Oy son *ejes principales*, y el centro de simetría O, *centro* de la elipse.

Los puntos F_1 $(-c, 0)$, y F_2 $(c, 0)$, donde $c=\sqrt{a^2-b^2}\geqslant 0$, se denominan *focos* de la elipse, los vectores $\overline{F_1M}$ y $\overline{F_2M}$ son *radios vectores focales* y los números $r_1=|\overline{F_1M}|$ y $r_2=|\overline{F_2M}|$, *radios focales* del punto M perteneciente a la elipse. En un caso particular $a=b$ los focos F_1 y F_2 coinciden con el centro, mientras que la ecuación canónica tiene por expresión $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, o bien $x^2+y^2=a^2$, es decir, describe una circunferencia de radio a cuyo centro se dispone en el origen de coordenadas.

El número $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ $(0 \leqslant e < 1)$ se denomina *excentricidad* de la elipse y sirve de medida de su «achatamiento» (para $e = 0$ la elipse se convierte en una circunferencia).

Las rectas D_1: $x = -a/e$ y D_2: $x = a/e$, que son perpendiculares al eje principal y pasan a una distancia de a/e del centro, se llaman *directrices* de la elipse.

3.28. Constrúyase una elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$. Hállense:

a) los semiejes ; b) las coordenadas de los focos; c) la excentricidad; d) las ecuaciones de las directrices.

3.29. Escríbase la ecuación canónica de una elipse, si:

a) $a = 3$, $b = 2$; b) $a = 5$, $c = 4$; c) $c = 3$, $e = 3/5$; d) $b = 5$, $e = 12/13$; e) $c = 2$ y la distancia entre las directrices es igual a 5; f) $e = 1/2$ y la distancia entre las directrices es igual a 32.

3.30. Escríbase la ecuación de una elipse con los semiejes a y b y el centro en el punto $C(x_0, y_0)$, si se sabe que los ejes principales de la elipse son paralelos a los ejes coordenados.

3.31. Establézcase que cada una de las ecuaciones que siguen define una elipse, hállense el centro de la misma, los semiejes, la excentricidad y las ecuaciones de las directrices:

a) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;
b) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;
c) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

3.32. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) Si $M(x, y)$ es un punto arbitrario de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geqslant b$, entonces los radios focales de este punto son

$$r_1(M) = a + ex, \quad r_2(M) = a - ex$$

(véase fig. 13). De aquí, en particular, se deduce que para todo punto M de la elipse se verifica la igualdad

$$r_1(M) + r_2(M) = \text{const} = 2a.$$

b) Sean dados los puntos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, $c \geqslant 0$. Entonces el conjunto de puntos M que satisfacen la condición $|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = \text{const} = 2a$, es una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $b^2 = a^2 - c^2$.

3.33. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) Si $M(x, y)$ es un punto arbitrario de una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, $r_1(M)$, $r_2(M)$ son radios focales de este punto, y $\rho(M, D_1)$ y $\rho(M, D_2)$ son las distancias entre dicho punto y las directrices, entonces se verifica la igualdad

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M, D_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho(M, D_2)} = \text{const} = e.$$

b) Sean dados un punto $F(c, 0)$ y una recta D: $x - d = 0$, $d > c > 0$. En este caso el conjunto de puntos M, que satisfacen la condición $\frac{|\overline{FM}|}{\rho(M, D)} = \text{const} = e < 1$, es una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a = de$ y $b^2 = a^2 - c^2$.

3.34. La elipse cuyos ejes principales coinciden con los ejes coordenados pasa por los puntos $M_1(2, \sqrt{3})$ y $M_2(0, 2)$. Escríbase la ecuación de la elipse y hállense los radios focales del punto M_1 y las distancias del punto citado hasta las directrices.

3.35. Hállese en la elipse $9x^2 + 24y^2 = 225$ un punto cuya distancia hasta el foco F_2 sea cuatro veces mayor que la distancia hasta el foco F_1.

3.36. Escríbase la ecuación de una curva por la cual se mueve el punto M, si la suma de distancias entre dicho punto y los puntos $F_1(-1, -1)$ y $F_2(1, 1)$ queda constante e igual a $2\sqrt{3}$.

3.37. Escríbase la ecuación de una curva por la cual se mueve el punto M, si la distancia entre dicho punto y el punto $F(3, 0)$, es dos veces menor que la distancia hasta la recta $x + y - 1 = 0$.

3.38. Determínese la disposición de una recta respecto de una elipse: la corta, es tangente o bien pasa fuera de la elipse, si la recta y la elipse vienen dadas por las ecuaciones:

a) $2x - y - 3 = 0$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$,

b) $2x + y - 10 = 0$, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

c) $3x + 2y - 20 = 0$, $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$.

3.39. Escríbase la ecuación de una tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto $M_0(x_0, y_0)$.

◀ Supongamos primero que $y_0 \neq 0$, es decir, el punto M_0 no coincide con ninguno de los vértices $A_1(-a, 0)$ y $A_2(a, 0)$. En este caso la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ define implícitamente la función $y = y(x)$, $-a < x < a$, cuya gráfica pasa por el punto $M_0(x_0, y_0)$ y coincide con la mitad correspondiente (superior cuando $y_0 > 0$ ó inferior, cuando $y_0 < 0$) de la elipse. Al derivar respecto de x la identidad $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2(x)}{b^2}=1$, llegamos a que la derivada $y'(x_0)$ es igual a

$$y'(x_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

De aquí la ecuación de la tangente a la elipse en el punto $M_0(x_0, y_0)$ tiene por expresión

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0),$$

o bien, teniendo presente la igualdad $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1. \qquad (7)$$

Si, en cambio, $y_0 = 0$ (y, por consiguiente, $x_0 = \pm a$), entonces las ecuaciones de las tangentes a la elipse se expresan por $x = \pm a$, es decir, en este caso la fórmula (7) queda también en vigor. ▶

3.40. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la elipse $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5/2}=1$ que sean paralelas a la recta $3x + 2y + 7 = 0$.

3.41. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 20$ que sean perpendiculares a la recta $2x - 2y - 13 = 0$.

3.42. Demuéstrese que las tangentes a una elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, trazadas por los extremos de un mismo diámetro, son paralelas.

3.43. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a una elipse $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$, trazadas desde el punto $A\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

3.44. En la elipse $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ hállese un punto M_0 que sea el más próximo a la recta $2x - 3y + 25 = 0$, y calcúlese la distancia entre el punto M_0 y dicha recta.

3.45. Demuéstrese que la tangente a una elipse en un punto arbitrario M de ésta forma ángulos iguales con los radios vectores focales $\overline{F_1M}$ y $\overline{F_2M}$ del punto mencionado.

3.46*. Del foco izquierdo de la elipse $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ se dirige un rayo de luz que forma con el eje Ox un ángulo obtuso α, con la particularidad de que $\operatorname{tg}\alpha=-2$. Escríbase la ecuación de una recta, en la que está situado el rayo reflejado de la elipse.

La *hipérbola* expresada por la ecuación canónica $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a, b>0$, tiene la forma expuesta en la fig. 14.

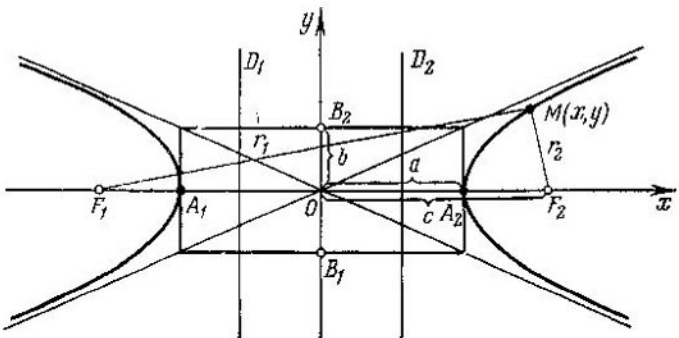


Fig. 14

Los parámetros a y b se llaman *semiejes* de la hipérbola, los puntos $A_1(-a, 0)$ y $A_2(a, 0)$ son los *vértices*, los ejes de simetría Ox y Oy llevan el nombre de *ejes real* e *imaginario* y el centro de simetría 0, de *centro* de la hipérbola.

Las rectas $y=\pm\frac{b}{a}x$ son las asíntotas de la hipérbola.

Los puntos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, donde $c=\sqrt{a^2+b^2}>0$, se denominan *focos* de la hipérbola, los vectores $\overline{F_1M}$ y $\overline{F_2M}$ son *radios vectores focales* y los números $r_1=|\overline{F_1M}|$ y $r_2=|\overline{F_2M}|$, *radios focales* del punto M perteneciente a la hipérbola.

El número $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ $(1<e<\infty)$ recibe el nombre de *excentricidad* de la hipérbola y sirve de medida de su «achatamiento». En el caso particular, cuando $a=b$, la hipérbola se llama *equilátera*; su excentricidad es igual a $e=\sqrt{2}$, y el ángulo entre las asíntotas es $\pi/2$.

Se denominan *directrices* de la hipérbola las rectas D_1: $x = -a/e$ y D_2: $x = a/e$ que son perpendiculares al eje real y pasan a la distancia a/e del centro.

3.47. Constrúyase una hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$. Hállense: a) los semiejes; b) las coordenadas de los focos; c) la excentricidad; d) las ecuaciones de las asíntotas; e) las ecuaciones de las directrices.

3.48. Constrúyase una hipérbola $16x^2 - 9y^2 = -144$, llamada *conjugada* de la hipérbola del problema 3.47. ¿Cuál es el sistema canónico de coordenadas para esta hipérbola? Hállense:

a) los semiejes; b) las coordenadas de los focos; c) la excentricidad; d) las ecuaciones de las asíntotas; e) las ecuaciones de las directrices.

3.49. Escríbase la ecuación canónica de la hipérbola, si:

a) $a = 2$, $b = 3$; b) $b = 4$, $c = 5$; c) $c = 3$, $e = 3/2$; d) $a = 8$, $e = 5/4$; e) $c = 10$ y las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm 4/3x$; f) $e = 3/2$ y la distancia entre las directrices es igual a $8/3$.

3.50. Escríbase la ecuación de una hipérbola con los semiejes a y b y el centro en el punto $C(x_0, y_0)$, si se sabe que sus ejes real e imaginario son paralelos a los ejes Ox y Oy, respectivamente.

3.51. Establézcase que cada una de las ecuaciones que siguen define una hipérbola, hállense su centro, los semiejes, la excentricidad, las ecuaciones de asíntotas y de directrices:

a) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

b) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;

c) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

3.52. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) Si $M(x, y)$ es un punto arbitrario de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, entonces los radios focales de este punto son

$$r_1(M) = a + ex, \quad r_2(M) = -a + ex,$$

si el punto M se dispone en la rama derecha de la hipérbola, y

$$r_1(M) = -a - ex, \quad r_2(M) = a - ex,$$

si este punto se dispone en la rama izquierda. De aquí se deduce, en particular, que para todo punto M de la hipérbola se verifica la igualdad

$$|r_1(M) - r_2(M)| = \text{const} = 2a.$$

b) Sean dados los puntos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, $c > 0$. Entonces el conjunto de puntos M, que satisfacen la condición $||\overline{F_1M}| - |\overline{F_2M}|| = \text{const} = 2a$, $a > 0$, es una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $b^2 = c^2 - a^2$.

3.53. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) Si $M(x, y)$ es un punto arbitrario de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $r_1(M)$ y $r_2(M)$ son los radios focales de dicho punto y $\rho(M, D_1)$ y $\rho(M, D_2)$ representan las distancias entre el punto y las directrices, entonces se verifica la igualdad

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M, D_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho(M, D_2)} = \text{const} = e.$$

b) Sean dados el punto $F(c, 0)$ y una recta D: $x - d = 0$, $c > d > 0$. Un conjunto de puntos M, que satisfacen la condición $\frac{|\overline{FM}|}{\rho(M, D)} = \text{const} = e > 1$, es una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a = de$ y $b^2 = c^2 - a^2$.

3.54. Habiéndose convencido de que el punto $M(-5, 9/4)$ está situado en la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, hállense los radios focales de este punto y sus distancias hasta las directrices.

3.55. Hállense los puntos de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ se encuentran a la distancia 7 del foco F_1.

3.56. Escríbase la ecuación de una hipérbola, si se sabe que sus focos son los puntos $F_1(-3, -4)$ y $F_2(3, 4)$, mientras que la distancia entre las directrices es igual a 3,6.

3.57. Escríbase la ecuación de una hipérbola, si se saben su excentricidad $e = \sqrt{5}$, el foco $F(2, -3)$ y la ecuación de la directriz correspondiente es $3x - y + 3 = 0$.

3.58. Pruébese que la curva, dada por la ecuación $xy = 1$ ó $y = 1/x$, es la hiperbola equilátera. Escríbase su ecuación canónica, hállense la excentricidad, los focos y las ecuaciones de las directrices.

3.59*. Escríbase la ecuación de una tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en su punto $M_0(x_0, y_0)$.

3.60. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$, paralelas a la recta $10x - 3y + 9 = 0$.

3.61. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$, perpendiculares a la recta $4x + 3y - 7 = 0$.

3.62. Demuéstrese que las tangentes a una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, trazadas por los extremos de un mismo diámetro, son paralelas.

3.63. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $A(-1, -7)$ a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$.

3.64. Hállese en la hipérbola $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$ un punto M_0, que sea más próximo a la recta $3x + 2y + 1 = 0$, y calcúlese la distancia del punto M_0 hasta la recta mencionada.

3.65. Demuéstrese que la tangente a una hipérbola en su punto arbitrario M forma ángulos iguales con los radios vectores focales $\overline{F_1M}$ y $\overline{F_2M}$ de este punto.

3.66*. Del foco derecho de la hipérbola $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ se dirige un rayo de luz que forma con el eje Ox un ángulo α $(\pi < \alpha < 3/2\pi)$ con la particularidad de que $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Escríbase la ecuación de una recta en la que se sitúa un rayo reflejado de la hipérbola.

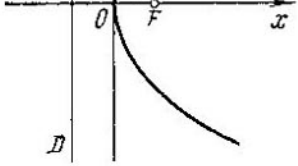


Fig. 15

Una *parábola* que se expresa por la ecuación canónica $y^2 = 2px$, $p > 0$, tiene una forma expuesta en la fig. 15.

El número p se denomina *parámetro* de la parábola, el punto O es su *vértice* y el eje Ox, el *eje* de la parábola.

El punto $F(p/2, 0)$ lleva el nombre de *foco* de la parábola, el vector FM, de *radio vector focal* y el número $r = |\overline{FM}|$, de *radio focal* del punto M de la parábola.

Se llama *directriz* de la parábola la recta D: $x = -p/2$, que es perpendicular al eje y pasa a la distancia $p/2$ del vértice de la parábola.

3.67. Constrúyanse las siguientes parábolas y hállense los parámetros de ellas:

a) $y^2 = 6x$; b) $x^2 = 5y$; c) $y^2 = -4x$; d) $x^2 = -y$.

3.68. Escríbase la ecuación de una parábola cuyo vértice se encuentra en el origen de coordenadas, si se sabe que:

a) la parábola se dispone en el semiplano izquierdo, simétricamente respecto al eje Ox y $p = 1/2$;

b) la parábola es simétrica respecto al eje Oy y pasa por el punto $M(4, -8)$;

c) el foco de la parábola se ubica en el punto $F(0, -3)$.

3.69. Escríbase la ecuación de la parábola, si se sabe que su vértice se encuentra en el punto $A(x_0, y_0)$, el parámetro es igual a p, el eje es paralelo al eje Ox y con respecto a la recta $x = x_0$ la parábola está situada:

a) en el semiplano derecho;

b) en el semiplano izquierdo.

3.70. Establézcase que cada una de las ecuaciones que siguen define una parábola, hállense las coordenadas de su vértice A y la magnitud del parámetro p:

a) $y^2 = 4x - 8$; b) $x^2 = 2 - y$;

c) $y = 4x^2 - 8x + 7$; d) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$;

e) $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$; f) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

3.71. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) Si $M(x, y)$ es un punto arbitrario de la parábola $y^2 = 2px$, $r(M)$ es su radio focal y $\rho(M, D)$, la distancia entre M y la directriz (véase la fig. 15), entonces se verifica la igualdad

$$\frac{r(M)}{\rho(M, D)} = \text{const} - 1.$$

b) Sean dados el punto $F(p/2, 0)$ y la recta D: $x = -p/2$. Entonces el conjunto de puntos M, que satisfacen la condición $\frac{|\overline{FM}|}{\rho(M, D)} = \text{const} = 1$, es la parábola $y^2 = 2px$.

3.72. Calcúlese el radio focal del punto M de la parábola $y^2 = 12x$, si $y(M) = 6$.

3.73. Escríbase la ecuación de una parábola, si se conocen:

a) el foco $F(4, 3)$ y la directriz D: $y + 1 = 0$;

b) el foco $F(2, -1)$ y la directriz D: $x - y - 1 = 0$.

3.74. Escríbase la ecuación de una tangente a la parábola $y^2 = 2px$ en su punto $M_0(x_0, y_0)$.

3.75. Escríbase la ecuación de una tangente a la parábola $y^2 = 8x$ que sea paralela a la recta $2x + 2y - 3 = 0$.

3.76. Escríbase la ecuación de una tangente a la parábola $x^2 = 16y$ que sea perpendicular a la recta $2x + 4y + 7 = 0$.

3.77. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la parábola $y^2 = 36x$ trazadas desde el punto A (2, 9).

3.78. Hállese en la parábola $y^2 = 64x$ un punto M_0, que sea el más próximo a la recta $4x + 3y - 14 = 0$, y calcúlese la distancia entre el punto M_0 y dicha recta.

3.79. Demuéstrese que la tangente a una parábola en un punto arbitrario de ésta M forma ángulos iguales con el radio vector focal del punto M y con el rayo que parte del punto M y está orientado igual que el eje de la parábola.

3.80. Del foco de la parábola $y^2 = 12x$ se dirige un rayo de luz que forma con el eje Ox un ángulo agudo α, siendo $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. Escríbase la ecuación de una recta en la que se dispone el rayo reflejado de la parábola.

3. Ecuación de una curva en el sistema polar de coordenadas. Se dice que en un plano queda introducido el sistema polar de coordenadas $\langle O, u\rangle$, si vienen dados:

1) cierto punto O, llamado *polo*;

2) cierto rayo u que parte del punto O y se llama *eje polar*.

Se denominan coordenadas polares del punto $M \neq 0$ dos números: el *radio polar* $r(M) = |\overline{OM}| > 0$ y el *ángulo polar* $\varphi(M)$ al que se debe girar el eje u para que su dirección coincida con la del vector $\overline{OM}$ (en este caso, como siempre, $\varphi(M) > 0$, si el giro se realiza en el sentido antihorario, y $\varphi(M) < 0$, en el caso contrario). La notación $M(r, \varphi)$ significa que el punto M tiene las coordenadas polares r y φ.

El ángulo polar $\varphi(M)$ tiene una infinidad de valores posibles (que se diferencian uno del otro en una magnitud del tipo $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$). El valor del ángulo polar que satisface la condición $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, se llama *principal*. En algunos casos se llama valor principal del ángulo polar los valores de φ que satisfacen la condición $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Supongamos que en un plano están introducidos el sistema directo de coordenadas rectangulares cartesianas Oxy (esto es, un sistema tal que el giro más corto del eje Ox hacia el Oy se realiza en el sentido antihorario) y un sistema polar de coordenadas $\langle O, u\rangle$, además el eje polar coincide con el semieje positivo de abscisas. En tal caso la relación entre las coordenadas cartesianas y polares de un punto arbitrario $M \neq O$ se expresa por las fórmulas

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\operatorname{sen}\varphi;$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{7}$$

La ecuación de una curva en coordenadas polares tiene la forma $F(r, \varphi) = 0$, o bien $r = f(\varphi)$. Puede obtenerse o bien directamente, partiendo de las propiedades geométricas de la curva, o bien pasando a las coordenadas polares en la ecuación de esta recta, dada en las coordenadas rectangulares cartesianas.

EJEMPLO 2. Constrúyase una curva dada por la ecuación $r = 6\cos\varphi$.

◀ Indiquemos, ante todo, lo siguiente: si el punto $M(r, \varphi)$ pertenece a la curva dada, entonces para el punto mencionado el $\cos\varphi = \frac{1}{6}r \geqslant 0$, y, por consiguiente, toda la curva está situada en el sector $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Con el fin de construir la curva, pasemos en su ecuación a las coordenadas cartesianas. Al multiplicar ambos miembros de la ecuación $r = 6\cos\varphi$ por r, obtenemos $r^2 = 6r\cos\varphi$, de donde, en vista de las fórmulas del cambio (7), $x^2 + y^2 = 6x$, ó $(x-3)^2 + y^2 = 9$. De este modo, la curva dada es una circunferencia de radio 3 y el centro en el punto M_0 cuyas coordenadas son $x_0 = 3$, $y_0 = 0$, o bien $r_0 = 3$, $\varphi_0 = 0$. ▶

EJEMPLO 3. Dedúzcase la ecuación de una recta en el sistema polar de coordenadas.

◀ Si la recta L pasa por el polo y su coeficiente angular respecto al eje polar es igual a k, entonces la ecuación de esta recta es $\operatorname{tg}\varphi = k$.

Supongamos ahora que la recta L no pasa por el polo. Escribamos la ecuación normal de esta recta en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$$

y pasemos en esta ecuación a las coordenadas polares. Obtenemos (teniendo presente que $\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha$):

$$r\cos\varphi\cos\alpha + r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\alpha - p = 0.$$

$$r\cos(\varphi - \alpha) = p,$$

$$r = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}.$$

La ecuación (8) es precisamente la ecuación buscada de la recta en el sistema polar de coordenadas. Esta ecuación puede obtenerse también directamente del siguiente hecho evidente: $M \in L \Leftrightarrow \operatorname{pr}_n r = r\cos(\varphi - \alpha) = \text{const} = p$ (fig. 16) ▶

EJEMPLO 4. Sea Γ una elipse, una rama de la hipérbola o parábola, sea F el foco de esta curva y D, la directriz correspondiente. Dedúzcase la ecuación de la curva Γ en el sistema polar de coordenadas cuyo polo coincide con el foco y el eje polar está orientado igual que el eje de la curva (fig. 17).

◀ La propiedad general de la elipse, hipérbola y parábola consiste en lo siguiente (véanse los problemas 3.33, 3.53 y 3.71):

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \frac{\rho(M, F)}{\rho(M, D)} = \text{const} = e, \tag{9}$$

donde e es la excentricidad de la curva ($e < 1$ para la elipse, $e > 1$ para la hipérbola y $e = 1$ para la parábola).

Designemos mediante p/e la distancia entre el foco y la directriz (p es el parámetro de la curva llamado diámetro semifocal). Entonces,

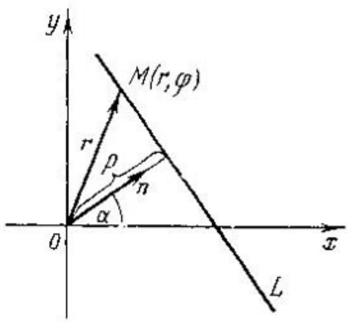


Fig. 16

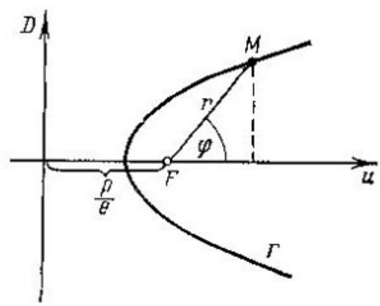


Fig. 17

de la figura 17 se deduce que $\rho(M, F) = r$ y $\rho(M, D) = \frac{p}{e} + r\cos\varphi$. Sustituyendo estas expresiones en (9), obtenemos

$$\frac{r}{\frac{p}{e} + r\cos\varphi} = e,$$

de donde

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{10}$$

La ecuación (10) es precisamente la ecuación buscada en el sistema polar de coordenadas, común para la elipse, hipérbola y parábola. ▶

Escríbanse las ecuaciones de las curvas dadas en las coordenadas polares:

3.81. $y = x$, **3.82.** $y = 1$. **3.83.** $x + y - 1 = 0$.
3.84. $x^2 + y^2 = a^2$. **3.85.** $x^2 - y^2 = a^2$.
3.86. $x^2 + y^2 = ax$.

Escríbanse las ecuaciones de las curvas dadas en las coordenadas rectangulares cartesianas y constrúyanse dichas curvas:

3.87. $r = 5$. **3.88.** $\operatorname{tg}\varphi = -1$. **3.89.** $r\cos\varphi = 2$.

3.90. $r\operatorname{sen}\varphi = 1$. **3.91.** $r = \dfrac{1\sqrt{2}}{\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}$.

3.92. $r=\dfrac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}$. 3.93. $r=2a\cos\varphi$.

3.94. $r=2a\operatorname{sen}\varphi$. 3.95. $\operatorname{sen}\varphi=1/\sqrt{5}$.
3.96. $\operatorname{sen} r=1/2$. 3.97. $r^2\operatorname{sen}2\varphi=2a^2$.
3.98. $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

3.99. Escríbanse en las coordenadas polares las ecuaciones:

a) de una recta que es perpendicular al eje polar y corta en el mismo un segmento igual a 3;

b) de un rayo que parte del polo, formando con el eje polar un ángulo igual a $\pi/3$;

c) de una recta que pasa por el polo y forma con el eje polar un ángulo igual a $\pi/4$.

3.100. Escríbase en las coordenadas polares la ecuación de una circunferencia, si:

a) el radio $R=5$, la circunferencia pasa por el polo y su centro se dispone en el eje polar;

b) el radio $R=3$ y la circunferencia es tangente en el polo al eje polar.

3.101. Determínense las coordenadas polares del centro y el radio de cada una de las siguientes circunferencias:

a) $r=4\cos\varphi$; b) $r=3\operatorname{sen}\varphi$; c) $r=-5\operatorname{sen}\varphi$;

d) $r=6\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)$; e) $r=8\operatorname{sen}\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$;

f) $r=8\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)$.

3.102. Dedúzcase en el sistema polar de coordenadas la ecuación de una circunferencia de radio R, con el centro en el punto $C(r_0, \varphi_0)$.

3.103. Escríbase la ecuación polar para la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, considerando que el eje polar está orientado igual que el eje de abscisas, mientras que el polo se encuentra:

a) en el foco izquierdo; b) en el foco derecho.

3.104. Escríbase la ecuación polar para la rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, considerando que el eje polar está orientado igual que el de abscisas, mientras que el polo se halla:

a) en el foco izquierdo; b) en el foco derecho.

3.105. Escríbase la ecuación polar para la parábola $y^2 = 6x$, considerando que el eje polar está orientado igual que el eje de abscisas y el polo se encuentra en el foco de la parábola.

3.106. Escríbanse las ecuaciones canónicas de las siguientes curvas de segundo orden:

a) $r=\frac{9}{5-4\cos\varphi}$; b) $r=\frac{9}{4-5\cos\varphi}$; c) $r=\frac{3}{1-\cos\varphi}$.

3.107. Dedúzcase la ecuación polar de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ a condición de que el eje polar tiene la misma dirección que el eje Ox y el polo se encuentra en el centro de la elipse.

3.108. Dedúzcase la ecuación polar de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ a condición de que el eje polar está orientado igual que el eje Ox y el polo se encuentra en el centro de la hipérbola.

3.109. Dedúzcase la ecuación polar de la parábola $y^2 = 2px$ a condición de que el eje polar está orientado igual que el eje Ox y el polo se encuentra en el vértice de la parábola.

4. Ecuaciones paramétricas de una curva. Sean dadas las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$, continuas en cierto intervalo I del eje numérico (I puede ser representado por el intervalo (a, b), el segmento $[a, b]$ y también por uno de los semiintervalos $(a, b]$ o bien $[a, b)$, además no se excluyen los casos en que $a = -\infty$ y/o $b = +\infty$). Las ecuaciones

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad t\in I, \tag{10}$$

se denominan *ecuaciones paramétricas* de la curva Γ en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas, siempre que se cumple la siguiente condición: para todo valor del parámetro $t \in I$ el punto $M(\varphi(t), \psi(t))$ pertenece a la curva Γ, y, viceversa, para todo punto $M(x, y)$ de la curva Γ existe tal valor del parámetro $t \in I$ que $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$. Eliminando el parámetro t de las ecuaciones (10), podemos representar la ecuación de la curva en la forma $F(x, y) = 0$.

Análogamente se determinan las ecuaciones paramétricas de la curva en coordenadas polares.

EJEMPLO 5. Muéstrese que las ecuaciones paramétricas

$$x=a\cos t,\quad y=a\operatorname{sen} t,\quad t\in[0, 2\pi),$$

definen la circunferencia $x^2+y^2=a^2$.

◀ Si el punto $M(x, y)$ es tal que $x = a \cos t$ e $y = a \operatorname{sen} t$ para cierto valor de $t \in [0, 2\pi)$, entonces

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t = a^2,$$

es decir, el punto $M(x, y)$ pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

Lo recíproco es también cierto: si el punto $M(x, y)$ pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, entonces poniendo $t = (\widehat{\overline{OM}, i})$, $t \in [0, 2\pi)$, obtendremos $x = a \cos t$ e $y = a \operatorname{sen} t$. ▶

EJEMPLO 6. La curva Γ viene dada por la ecuación polar $r = 2R \operatorname{sen} \varphi$. Fórmense las ecuaciones paramétricas de esta curva en las coordenadas polares y rectangulares cartesianas, tomando a título de parámetro el ángulo polar φ.

◀ No es difícil convencerse de que la curva dada es una circunferencia de radio R, con el centro en el punto $C(0, R)$. Las ecuaciones paramétricas de esta curva en coordenadas polares son:

$$r = 2R \operatorname{sen} t, \quad \varphi = t, \quad t \in [0, \pi).$$

Las ecuaciones paramétricas en las coordenadas rectangulares cartesianas se obtienen, si en las fórmulas del cambio $x = r \cos \varphi$, $y = r \operatorname{sen} \varphi$ sustituimos r y φ por sus expresiones en forma de las funciones del parámetro t. Como resultado obtendremos:

$$x = r(t) \cos \varphi(t) = R \operatorname{sen} 2t,$$
$$y = r(t) \operatorname{sen} \varphi(t) = R(1 - \cos 2t), \quad t \in [0, \pi). \ ▶$$

3.110. El rayo $\Gamma = \{(x, y) \mid x - y + 1 = 0, y \geqslant 0\}$ tiene por origen el punto $M_0(-1, 0)$ (¡compruébese!). Fórmense las ecuaciones paramétricas de este rayo, tomando a título de parámetro:

a) la abscisa x; b) la ordenada y;

c) la distancia $\rho(M, M_0)$ entre el punto $M \in \Gamma$ y el vértice M_0 del rayo;

d) el ángulo polar, si el polo coincide con el origen de coordenadas y el eje polar está orientado igual que el eje Ox.

3.111. Fórmense las ecuaciones paramétricas de un segmento cuyos extremos son los puntos $M_1(1, 1)$ y $M_2(2, 3)$, tomando a título de parámetro:

a) la distancia $\rho(M, M_1)$; b) la distancia $\rho(M, M_2)$.

3.112. Fórmense las ecuaciones paramétricas de una circunferencia de radio R, con el centro en el punto $M_0(x_0, y_0)$, tomando a título de parámetro t el ángulo entre el eje Ox y el vector $\overline{M_0M}$, calculado en sentido antihorario.

3.313. Fórmense las ecuaciones paramétricas de la circunferencia $x^2 + y^2 = 2Rx$, tomando a título de parámetro el ángulo polar, si el eje polar está orientado igual que el eje Ox, y el polo se encuentra:

a) en el origen de coordenadas; b) en el centro de la circunferencia.

En los problemas 3.114—3.122 se pide hallar, eliminando el parámetro t, las ecuaciones de las curvas dadas en la forma $F(x, y) = 0$ y construir dichas curvas.

3.114. $x = -1 + 2t,\ y = 2 - t,\ t \in (-\infty, +\infty)$.

3.115. $x = t^2 - 2t + 1,\ y = t - 1,\ t \in (-\infty, +\infty)$

3.116. $x = -1 + 2\cos t,\ y = 3 + 2\operatorname{sen} t,\ t \in [0, 2\pi)$.

3.117. $x = a\cos t,\ y = b\operatorname{sen} t,\ t \in [0, 2\pi)$.

3.118. $x = 1 + 2\sec t, y = -1 + \operatorname{tg} t, t \in (-\pi/2, \pi/2)$

3.119. $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right),\ y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right),\ t \in (0, +\infty)$.

3.120. $x = 2R\cos^2 t,\ y = R\operatorname{sen} 2t,\ t \in [-\pi/2, \pi/2)$.

3.121. $x = R\operatorname{sen} 2t,\ y = 2R\operatorname{sen}^2 t,\ t \in [0, \pi)$.

3.122. $x = 2p\operatorname{ctg}^2 t,\ y = 2p\operatorname{ctg} t,\ t \in (0, \pi/2]$.

3.123. Fórmense las ecuaciones paramétricas de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tomando a título de parámetro t el ángulo formado por el eje Ox y el radio vector $\overline{OM}$ y calculado en el sentido antihorario.

3.124. Fórmense las ecuaciones paramétricas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, tomando a título de parámetro t el ángulo entre el eje Ox y el radio vector $\overline{OM}$, calculado en el sentido antihorario.

3.125. Fórmense las ecuaciones paramétricas de la parábola $y^2 = 2px$, tomando a título de parámetro:

a) la ordenada y;

b) el ángulo entre el eje Ox y el vector $\overline{OM}$ calculado en el sentido antihorario.

c) el ángulo entre el eje Ox y el radio vector focal $\overline{FM}$ calculado en el sentido antihorario.

5. **Algunas curvas que se encuentran en las matemáticas y en sus aplicaciones.** En este punto que lleva un carácter informativo se aducen unas ecuaciones y se indican las propiedades geométricas fundamentales de una serie de curvas especiales (algebraicas y trascendentes) que se encuentran en los cálculos prácticos de ingeniería. La deducción de las ecuaciones de dichas curvas puede ofrecerse a título de problemas de dificultad algo elevada al estudiar el curso de geometría analítica. El estudio bastante detallado de la forma de las curvas puede realizarse con ayuda de los métodos aceptados en el cálculo diferencial.

1. *Espirales*: *espiral de Arquímedes* $r = a\varphi$ (fig. 18), *espiral hiperbólica* $r = \frac{a}{\varphi}$ (fig. 19), *espiral logarítmica* $r = a^{\varphi}$ (fig. 20); la flecha

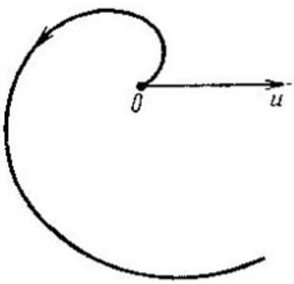


Fig. 18

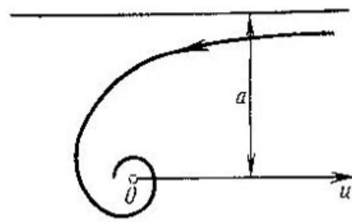
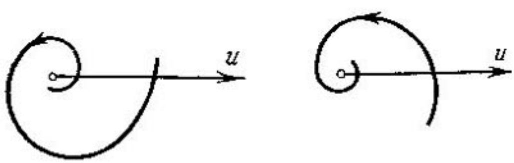


Fig. 19

indica la dirección de recorrido de la curva correspondiente al crecimiento de φ.

2. *Lemniscata de Bernoulli* $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2)$ (fig. 21) o bien $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ (el polo se sitúa en el punto O). La propiedad



$a>1$ $\qquad$ $0<a<1$

Fig. 20

característica: $|F_1M| \cdot |F_2M| = \text{const} = a^2$, donde $F_1(-a, 0)$, $F_2(a, 0)$.

3. *Cisoide* $y^2 (2R - x) = x^3$ (fig. 22), o bien $r = 2R \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sen} \varphi$ (el polo se sitúa en el punto O). La propiedad característica es: para todo rayo que parte del punto O se tiene $|OM| = |BC|$.

4. *Concoide* $x^2y^2 + (x + a)^2 (x^2 - b^2) = 0$ (fig. 23), o bien $r = \frac{a}{\cos \varphi} \pm b$ (el polo está situado en el punto A). La propiedad característica es: para todo rayo que parte del punto A $(-a, 0)$ se tiene $|BM| = |BN| = \text{const} = b$.

5. *Estrofoide* $x^2 ((x + a)^2 + y^2) = a^2y^2$ (fig. 24), o bien $r = \frac{a}{\cos \varphi} \pm a \operatorname{tg} \varphi$ (el polo se ha situado en el punto A). La propiedad característica es: para todo rayo que parte del punto A $(-a, 0)$ se tiene $|BM| = |BN| = |OB|$.

6. *Caracol de Pascal* $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2 (x^2 + y^2)$ (fig. 25), o bien $r = 2a \cos \varphi \pm b$ (el polo se ha situado en el punto O). La propiedad característica es: para todo rayo que parte del punto O se tiene $|BM| = |BN| = \text{const} = b$.

7. *Rosácea de cuatro pétalos* $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$ (fig. 26), o bien $r = a\,|\operatorname{sen} 2\varphi|$ (el polo se ha situado en el punto O). La propiedad característica es: todo punto M de esta curva es una base de la perpendicular trazada desde el origen de coordenadas sobre el segmento $[AB]$ de longitud constante $2a$, el cual se desliza de tal manera que sus extremos siempre se encuentran en los ejes coordenados.

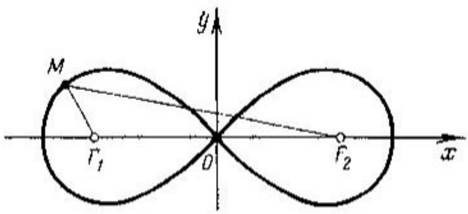


Fig.21

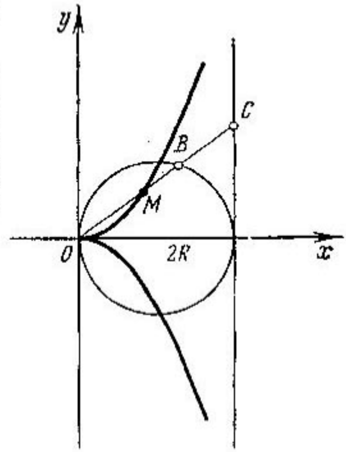


Fig. 22

8. *Astroide* $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, $t \in [0, 2\pi)$, o bien $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (fig. 27). La propiedad característica es: todo punto M de esta curva es la base de una perpendicular $[PM]$ al segmento $[AB]$ de longitud constante que se desplaza de tal manera que sus extremos siempre se encuentran en los ejes coordenados.

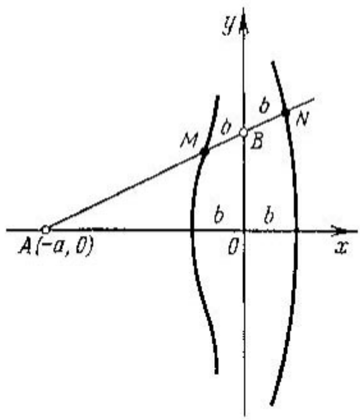


Fig. 23

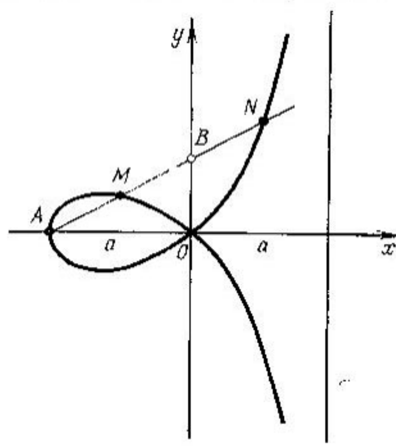


Fig. 24

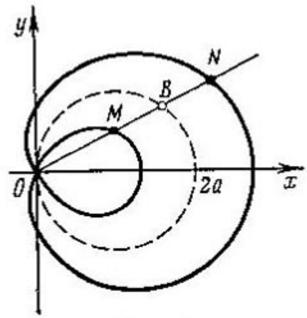


Fig. 25

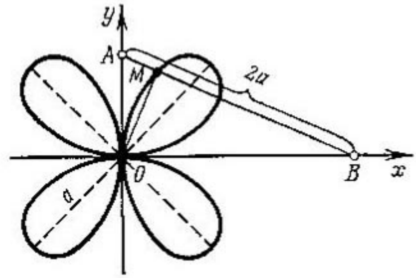


Fig. 26

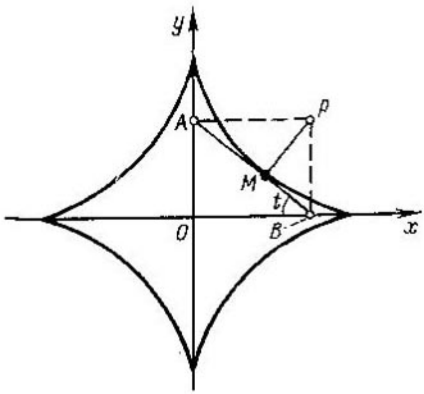


Fig. 27

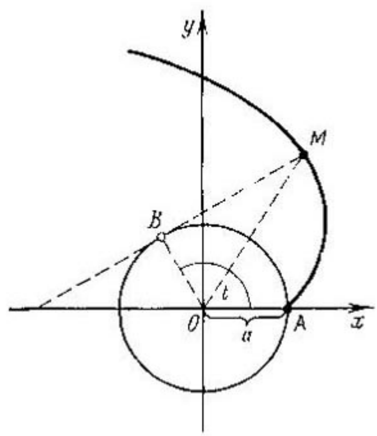


Fig. 28

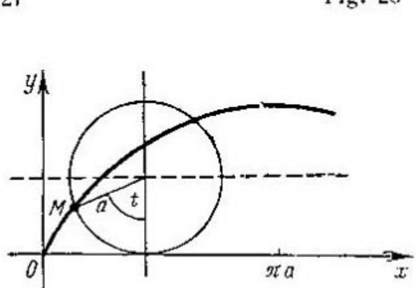


Fig. 29

9. *Envolvente de la circunferencia* $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$, $t \in [0, \infty)$ (fig. 28). La propiedad característica es: cada punto M de esta curva es el extremo de un hilo el cual, quedando siempre tenso, se desenrolla de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$

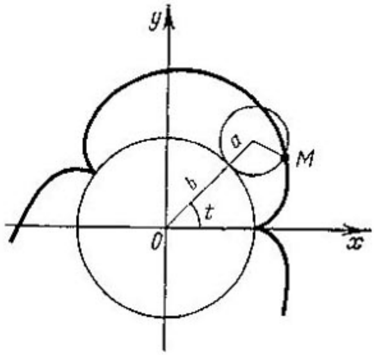


Fig. 30

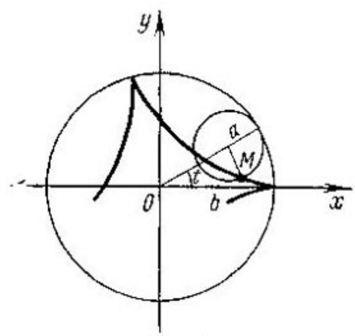


Fig. 31

(en el instante inicial el extremo del hilo se encuentra en el punto $A(a, 0)$).

10. *Cicloide* $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$ (fig. 29). La propiedad característica es: la curva coincide con la

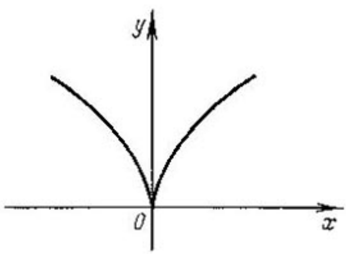


Fig. 32

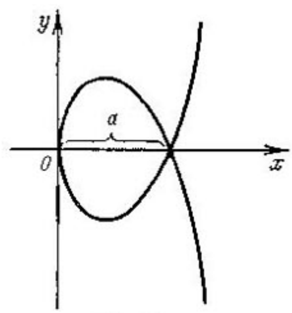


Fig. 33

trayectoria del punto M de una circunferencia de radio a, la cual rueda, sin deslizamiento, por el eje Ox (en el instante inicial el punto M se encuentra en el origen de coordenadas).

11. *Epicicloide* $x = (a+b)\cos t - a\cos\dfrac{a+b}{a}t$, $y = (a+b)\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen}\dfrac{a+b}{a}t$, $t \in [0, \infty)$ (fig. 30). La propiedad característica es:

la curva coincide con la trayectoria del punto M de una circunferencia de radio a, la cual rueda sin deslizamiento por la circunferencia $x^2+y^2=b^2$, quedando siempre fuera de ésta (en el instante inicial el punto M se encuentra en la posición A $(b, 0)$). En el caso particular, cuando $a=b$, la curva correspondiente recibe el nombre de *cardioide*.

12. *Hipocicloide* $x=(b-a)\cos t+a\cos\frac{b-a}{a}t$, $y=(b-a)\operatorname{sen} t-a\operatorname{sen}\frac{b-a}{a}t$, $t\in[0, \infty)$ (fig. 31). La propiedad característica es: la curva coincide con la traectoria del punto M de una circunferencia de radio a, la cual rueda sin deslizamiento por la circunferencia

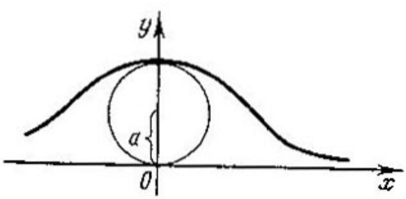


Fig. 34

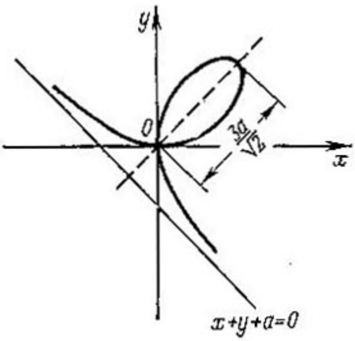


Fig. 35

$x^2+y^2=b^2$, quedando siempre en el interior de la misma (en el instante inicial el punto M se encuentra en la posición A $(b, 0)$). En el caso particular, cuando $a=b/4$, esta curva coincide con la astroide.

13. *Parábola semicúbica* $y^2=ax^3$ (fig. 32).

14. *Parábola de bucle* $ay^2=x(x-a)^2$ (fig. 33).

15. *Curva de Agnesi* $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ (fig. 34).

16. *Folio de Descartes* $x^3+y^3-3axy=0$ (fig. 35).

§ 4. Superficies y curvas en el espacio

1. Ecuaciones de la superficie y de la curva en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas. Se dice que la superficie S en el sistema de coordenadas $Oxyz$ tiene la ecuación

$$F(x, y, z)=0, \tag{1}$$

si se cumple la siguiente condición: el punto $M(x, y, z)$ pertenece a la superficie S cuando, y sólo cuando, sus coordenadas x, y y z satisfacen la relación (1). Si, en particular, $F(x, y, z)=f(x, y)-z$, la ecuación (1) puede ser escrita en la forma

$$z=f(x, y), \tag{2}$$

y en este caso la superficie S coincide con la gráfica de la función de dos variables $f(x, y)$.

La curva Γ en el espacio se define, en el caso general, como una línea de intersección de ciertas superficies S_1 y S_2 (definidas de manera no unívoca), es decir, prefijando un sistema de dos ecuaciones

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0. \tag{3}$$

Ejemplo 1. Dedúzcase la ecuación de una superficie, cada punto de la cual es dos veces más próximo al punto $A(2, 0, 0)$ que al punto $B(-4, 0, 0)$.

◀ Si S es la superficie definida por las condiciones del problema, entonces $M(x, y, z) \in S$ cuando, y sólo cuando, $\rho(M, B) = 2\rho(M, A)$ o bien

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2}.$$

De aquí obtenemos

$$(x+4)^2 + y^2 + z^2 = 4((x-2)^2 + y^2 + z^2),$$
$$3x^2 - 24x + 3y^2 + 3z^2 = 0$$

o bien, formando un cuadrado perfecto en los sumandos que contienen x,

$$(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 16. \tag{4}$$

La ecuación (4) es precisamente la ecuación buscada de la superficie. De esta ecuación se ve que la superficie dada S es una esfera de radio 4, con el centro en el punto $M_0(4, 0, 0)$. ▶

Ejemplo 2. Investíguese la forma de la curva Γ, dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 36, \\ y + z = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Determínese la forma de su proyección sobre el plano Oxy.

◀ La curva Γ viene dada como una línea de intersección de la esfera $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 36$ con el plano $y + z = 0$, y, por consiguiente, es una circunferencia. Como el centro de la esfera $C(1, 0, 0)$ se encuentra en el plano de la sección $y + z = 0$, el centro de la circunferencia coincide con el punto C y su radio es igual al de la esfera, es decir, a $R = 4$.

Establezcamos la forma de la proyección de la circunferencia Γ sobre el plano Oxy. Eliminando z del sistema (5), obtenemos $(x-1)^2 + 2y^2 = 36$, o bien $\dfrac{(x-1)^2}{36} + \dfrac{y^2}{18} = 1$. De aquí que la proyección buscada es una elipse cuyos ejes principales están orientados igual que los ejes Ox y Oy, el centro se encuentra en el punto $C'(1, 0)$ y los semiejes son $a = 6$, $b = 3\sqrt{2}$. ▶

Establézcase qué imágenes geométricas se definen por las ecuaciones dadas:

4.1. $z + 5 = 0$. **4.2.** $x - 2y + z - 1 = 0$.

4.3. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. **4.4.** $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 16$.

4.5. $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 0$. **4.6.** $x^2 + 4z^2 = 0$.

4.7. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 7 = 0$. **4.8.** $x^2 - 4z^2 = 0$.

4.9. $xz = 0$. **4.10.** $xyz = 0$.

4.11. $x^2 - 4x = 0$. **4.12.** $xy - y^2 = 0$.

4.13. Dedúzcase la ecuación de una superficie, para la cual la diferencia entre los cuadrados de las distancias de cada punto de la superficie hasta los puntos F_1 (2, 3, —5) y F_2 (2, —7, —5) es igual a 13.

4.14. Dedúzcase la ecuación de una superficie, para la cual la suma de los cuadrados de las distancias de cada punto de la superficie hasta los puntos F_1 $(-a, 0, 0)$ y F_2 $(a, 0, 0)$ es igual al número constante $4a^2$.

4.15. Dedúzcase la ecuación de una superficie, para la cual la suma de las distancias entre cualquier punto de la superficie y los puntos F_1 (0, 0, —4) y F_2 (0, 0, 4) es igual a 10.

4.16. Dedúzcase la ecuación de la superficie, para la cual el módulo de la diferencia entre las distancias de cada punto de la superficie hasta los puntos F_1 (0, —5, 0) y F_2 (0, 5, 0) es igual a 6.

4.17. Establézcase que cada una de las ecuaciones que siguen definen una esfera, hállese su centro C y el radio R:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$.

4.18. Fórmese la ecuación de una esfera en cada uno de los siguientes casos (designaciones: C es el centro de la esfera, R es el radio, M, M_1, M_2, M_3 son los puntos en la esfera):

a) C (—1, 2, 0), $R = 2$; b) M (2, —1, —3), C (3, —2, 1);

c) M_1 (2, —3, 5) y M_2 (4, 1, —3) son los extremos del diámetro de la esfera;

d) C (3, —5, —2), el plano $2x - y - 3z + 11 = 0$ es tangente a la esfera;

e) M_1 (3, 1, —3), M_2 (—2, 4, 1), M_3 (—5, 0, 0), $C \in P$: $2x + y - z + 3 = 0$.

4.19. Fórmese la ecuación de una esfera cuyo centro se ubica en la recta

$$\begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0, \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$$

y que toca los planos $x + 2y - 2z - 2 = 0$ y $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

4.20. Fórmese la ecuación de una esfera inscrita en un tetraedro formado por los planos

$$3x - 2y + 6z - 8 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$$

4.21. Fórmense las ecuaciones paramétricas del diámetro de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + z - 11 = 0$, que sea perpendicular al plano $5x - y + 2z - 17 = 0$.

4.22. En la esfera $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ hállese un punto M_0 que sea el más próximo al plano $3x - 4z + 19 = 0$ y calcúlese la distancia de este punto hasta el plano.

4.23. Determínese la disposición de un plano respecto de una esfera (la corta, es tangente a ella o pasa fuera de ella), si el plano y la esfera se han dado por las ecuaciones:

a) $z = 3$, $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 22 = 0$;

b) $y = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 14 = 0$;

c) $x = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 4 = 0$.

4.24. Establézcase qué curvas se definen por las siguientes ecuaciones

a) $\begin{cases} x - 5 = 0, \\ z + 2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49, \\ y = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 20, \\ z - 2 = 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 25 = 0. \end{cases}$

4.25. Hállense el centro y el radio de una circunferencia:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 10y, \\ x + 2y + 2z - 19 = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 100, \\ 2x - 2y - z + 9 = 0. \end{cases}$

● El centro de una circunferencia es la proyección del centro de la esfera sobre el plano.

4.26. Hállese la proyección sobre el plano $z = 0$ de la sección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4(x - 2y - 2z)$ por un plano que pasa por el centro de la esfera y que es perpendicular a la recta $x = 0$, $y + z = 0$.

4.27. Los puntos $A(3, -2, 5)$, y $B(-1, 6, -3)$ son los extremos del diámetro de una circunferencia que pasa por el punto $C(1, -4, 1)$. Fórmense las ecuaciones de esta circunferencia.

4.28. Fórmense las ecuaciones de una circunferencia que pasa por los tres puntos $M_1(3, -1, -2)$, $M_2(1, 1, -2)$ y $M_3(-1, 3, 0)$.

2. Superficies algebraicas de segundo grado. Se llama *superficie algebraica de segundo grado* la superficie S cuya ecuación en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas tiene la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0, \qquad (6)$$

donde no todos los coeficientes de los términos de segundo orden son iguales a cero simultáneamente (de lo contrario, S sería una superficie algebraica de primer orden, es decir, un plano).

Puede resultar que la ecuación (6) defina la así llamada superficie *degenerada* (un conjunto vacío, un punto, un plano, un par de planos,

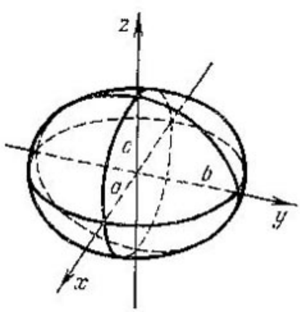


Fig. 36

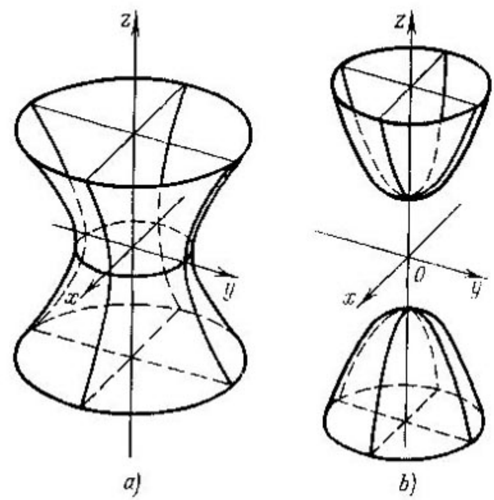


Fig. 37

una recta). Si, en cambio, la superficie es *regular*, entonces transformando el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas, su ecuación (6) puede ser reducida a una de las siguientes formas que se llaman *canónicas* y que determinan el tipo de superficie.

1. *Elipsoide:* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (fig. 36).

2. *Hiperboloide*

a) *de una hoja:* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (fig. 37, *a*);

b) *de dos hojas:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (fig. 37, *b*).

3. *Cono de segundo grado:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (fig. 38).

4. *Paraboloide*

a) *elíptico:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ (fig. 39, *a*);

b) *hiperbólico:* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ (fig. 39, *b*).

5. *Cilindro de segundo grado*

a) *elíptico:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (fig. 40, *a*);

b) *hiperbólico:* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (fig. 40, *b*);

c) *parabólico:* $y^2=2px$, $p>0$ (fig. 40, *c*).

Los métodos generales de reducción de la ecuación (6) a una forma canónica se apoyan en la teoría de las formas cuadráticas y se

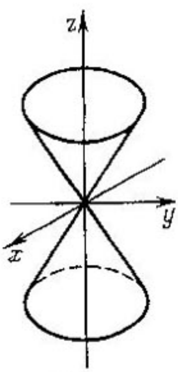


Fig. 38

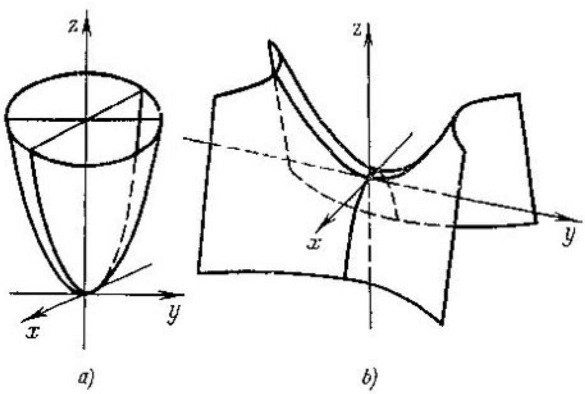


Fig. 39

examinan en el p. 4, § 3, cap. 4. El objetivo del punto presente consiste en el estudio de las propiedades geométricas fundamentales de las superficies regulares de segundo grado sobre la base de sus ecuaciones canónicas.

El *método* principal para investigar las formas de las superficies según su ecuación es el *de secciones.*

EJEMPLO 3. Investíguese mediante el método de secciones la forma y constrúyase una superficie dada por la ecuación

$$z=2\left(1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}\right). \tag{7}$$

◀ En la sección de la superficie por un plano horizontal $z = h$ tenemos una curva Γ_h cuya proyección sobre el plano Oxy se define por la ecuación

$$h = 2\left(1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}\right),$$

o bien

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 2 - h. \qquad (8)$$

La ecuación (8) no tiene, para $h > 2$, soluciones con relación a (x, y). Esto significa que la sección correspondiente está vacía, es decir, la

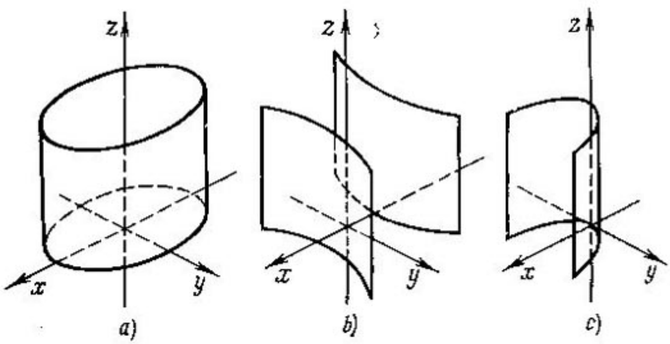


Fig. 40

superficie en consideración se dispone íntegramente por debajo del plano $z = 2$. Cuando $h \leqslant 2$, la ecuación (8) define una elipse cuyos semiejes son $a = 4\sqrt{2-h}$ y $b = 5\sqrt{2-h}$, que se degenera en el punto $x = y = 0$ para $h = 2$. Observemos que todas las elipses que se obtienen en las secciones de la superficie por los planos $x = h \leqslant 2$ son semejantes entre sí $\left(\frac{a}{b} = \text{const} = \frac{4}{5}\right)$, además si h va decreciendo, sus semiejes crecen de manera monótona e indefenida.

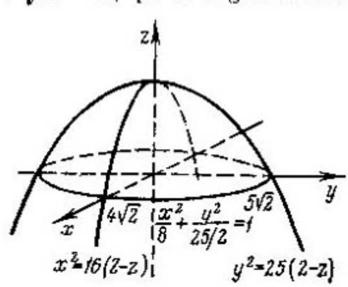


Fig. 41

La información obtenida es suficiente para que se pueda construir un croquis de la superficie. La precisión ulterior de su forma puede obtenerse al considerar las secciones mediante planos coordenados Oxz y Oyz. La sección del plano Oxz: $y = 0$ nos da una curva $x^2 = 16(2 - z)$, es decir, una parábola de parámetro $p = 8$, con el vértice en el punto $x = 0$, $z = 2$ y las ramas dirigidas al lado del decrecimiento de los valores z. Por fin, la sección del plano Oyz: $x = 0$ da la parábola $y^2 = 25(2 - z)$ de parámetro $p = \frac{25}{2}$, con el vértice en el punto $y = 0$, $z = 2$ y las ramas de dirección análoga.

La investigación realizada permite, ahora, exponer detalladamente la superficie dada (fig. 41).

La superficie dada es un paraboloide elíptico. La transformación de las coordenadas

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = 2 - z$$

(que se reduce al desplazamiento del origen en el punto (0, 0, 2), que constituye el vértice del paraboloide, y a la inversión de la dirección del eje Oz) conduce su ecuación inicial (7) a la forma canónica

$$\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{25} = z'. \blacktriangleright \qquad (9)$$

Establézcase el tipo de superficies dadas y constrúyanse éstas:

4.29. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$. **4.30.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1$.

4.31. $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. **4.32.** $x^2 - y^2 = z^2$.

4.33. $x^2 + y^2 = 2az$, $a \neq 0$. **4.34.** $x^2 - y^2 = 2az$, $a \neq 0$.

4.35. $2z = x^2 + \frac{y^2}{2}$. **4.36.** $x^2 = 2az$, $a \neq 0$.

4.37. $z = 2 + x^2 + y^2$. **4.38.** $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$.

4.39. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$. **4.40.** $x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0$.

4.41*. Demuéstrese que la ecuación $z^2 = xy$ define un cono con vértice en el origen de coordenadas.

4.42*. Demuéstrese que la ecuación $z = xy$ define un paraboloide hiperbólico.

4.43. Denomínense y constrúyanse las superficies:

a) $x^2 = 2yz$; b) $z - a = xy$.

4.44. Fórmense las ecuaciones de las proyecciones sobre los planos coordenados de la sección de un paraboloide elíptico $y^2 + z^2 = x$ obtenida al cortarlo por el plano $x + 2y - z = 0$.

4.45. Establézcase cuáles de las curvas se definen por las ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 2z, \\ 3x - y + 6z - 14 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 2z, \\ x - 2y + 2 = 0. \end{cases}$

4.46. Hállense los puntos de intersección de la superficie con una recta:

a) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ y $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$;

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ y $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$;

c) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z$ y $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$.

● Pásese a las ecuaciones paramétricas de la recta.

4.47. Demuéstrese que en cada uno de los casos que vienen más abajo la superficie y el plano dados tienen un punto común; hállense las coordenadas de este punto:

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2y$, $2x-2y-z-10=0$;

b) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$, $5x+2z+5=0$;

c) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{9}=1$, $4x-3y+12z-54=0$.

4.48. Demuéstrese que el plano $2x-12y-z+16=0$ corta el paraboloide hiperbólico $x^2-4y^2=2z$ a lo largo de las generatrices rectilíneas (es decir, de las rectas situadas íntegramente en dicha superficie). Fórmense las ecuaciones de las generatrices mencionadas.

4.49. Demuéstrese que el plano $4x-5y-10z-20=0$ corta el hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ a lo largo de las generatrices rectilíneas. Fórmense las ecuaciones de estas generatrices.

3. Clasificación de las superficies según el tipo de transformaciones de la simetría. Según sea el tipo de simetría, se pueden distinguir tres clases de superficies: cilíndricas, cónicas y superficies de revolución.

Se denomina *superficie cilíndrica* (*cilindro*) la superficie invariante respecto a las transformaciones del traslado paralelo T (tq), determinadas por cualquier vector colineal a cierto vector q (l, m, n). De esta definición proviene que si el punto M_0 (x_0, y_0, z_0) pertenece al cilindro S, entonces toda la recta $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, también pertenece a este cilindro.

Se ha adoptado la siguiente terminología: toda recta colineal respecto del vector q (l, m, n) se denomina *eje* del cilindro S; las rectas $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, M_0 $(x_0, y_0, z_0)\in S$, pertenecientes íntegramente al cilindro, se llaman *generatrices* del cilindro; toda curva Γ que se dispone en el cilindro y corta todas sus generatrices se llama *directriz* de este cilindro.

Sea $q(l, m, n)$ un vector cualquiera colineal respecto del eje del cilindro S, mientras que la directriz Γ está dada por las ecuaciones

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

El punto $M(x, y, z)$ pertenece al cilindro S cuando, y sólo cuando, existe tal número t que el punto de coordenadas $x + tl$, $y + tm$, $z + tn$ se sitúa en la generatriz Γ, es decir,

$$\begin{cases} F_1(x + tl, y + tm, z + tn) = 0, \\ F_2(x + tl, y + tm, z + tn) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Eliminando el parámetro t del sistema (10), obtendremos la relación del tipo $F(x, y, z) = 0$, la cual será precisamente la ecuación del cilindro dado.

EJEMPLO 4. Escríbase la ecuación de un cilindro cuyo eje coincide con el eje coordinado Oz y la directriz viene dada por las ecuaciones

$$F(x, y) = 0, \quad z - h = 0.$$

◀ Suponiendo $q = k(0, 0, 1)$, obtendremos el sistema (10) en la forma $F(x, y) = 0$, $z + t - h = 0$. Este resultado implica que el punto $M(x, y, z)$ pertenece al cilindro cuando, y sólo cuando, sus coordenadas x e y satisfacen la ecuación $F(x, y) = 0$ para un valor arbitrario de la coordenada z. Por consiguiente, la ecuación $F(x, y) = 0$, que describe la proyección de la directriz sobre el plano Oxy es precisamente la ecuación del cilindro dado. ▶

Constrúyanse las superficies cilíndricas dadas:

4.50. $y^2 + z^3 = 4$. 4.51. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

4.52. $x^2 + y^2 = ax$. 4.53. $x^2 = 6z$. 4.54. $z = 4 - x^2$.

4.55. $x^2 - xy = 0$. 4.56. $x^2 - z^2 = 0$.

4.57. $y^2 + 2z^2 = 0$. 4.58. $xz = 4$. 4.59. $y^2 + z^2 = -z$.

4.60. Fórmense las ecuaciones de tres superficies cilíndricas descritas alrededor de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$ con los ejes paralelos a) al eje Ox; b) al eje Oy; c) al eje Oz, respectivamente.

4.61. Hállese la ecuación de un cilindro que proyecta la circunferencia

$$\begin{cases} x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$

sobre los planos: a) Oxy; b) Oxz; c) Oyz.

4.62. Hállese la ecuación de la proyección de la circunferencia

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=36, \\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25 \end{cases}$$

sobre los planos: a) Oxy; b) Oxz; c) Oyz.

4.63. Fórmese la ecuación de una superficie cada punto de la cual es equidistante de la recta $x = a$, $y = 0$ y el plano Oyz. Constrúyase esta superficie.

4.64. Fórmese la ecuación de un cilindro, si:

a) el eje es colineal al vector $\boldsymbol{q}$ (1, 2, 3) y la directriz viene definida por las ecuaciones $y^2 = 4x$, $z = 0$;

b) el eje es colineal al vector $\boldsymbol{q}$ (1, 1, 1) y la directriz viene definida por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 0$.

4.65. Una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ está iluminada por unos rayos paralelos a la recta $x = 0$, $y = z$. Hállese la forma de la sombra de la esfera sobre el plano Oxy.

4.66. Constrúyase un cuerpo limitado por las superficies $y^2 = x$, $z = 0$, $z = 4$, $x = 4$, y escríbase la ecuación de la diagonal de la cara situada en el plano $x = 4$.

Se denomina *superficie cónica* (*cono*) la superficie invariante respecto a las transformaciones de la homotecia $H(k, M_0)$ con un coeficiente arbitrario k y el centro en cierto punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ llamado *vértice* del cono. De esta definición proviene que si el punto $M_1(x_1, y_1, z_1)$ pertenece al cono, entonces toda recta $\dfrac{x-x_1}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_1}{z_1-z_0}$ que pasa por este punto y el vértice M_0 y que se llama *generatriz* del cono, se sitúa íntegramente en el cono. Toda recta Γ, que se dispone en el cono y que corta todas las generatrices de éste se llama *directriz* de este cono.

Sea dado un cono S cuyo vértice es $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y la directriz se expresa por las ecuaciones

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

El punto $M(x, y, z)$ pertenece al cono S cuando, y sólo cuando, existe un número t tal que un punto con las coordenadas $x + t(x - x_0)$, $y + t(y - y_0)$, $z + t(z - z_0)$ se sitúa en la generatriz Γ, es decir,

$$\begin{cases} F_1(x+t(x-x_0),\ y+t(y-y_0),\ z+t(z-z_0))=0, \\ F_2(x+t(x-x_0),\ y+t(y-y_0),\ z+t(z-z_0))=0. \end{cases} \qquad (11)$$

Eliminando el parámetro t del sistema (11), obtendremos la ecuación del cono en la forma $F(x, y, z) = 0$.

EJEMPLO 5. Escríbase la ecuación de un cono cuyo vértice se encuentra en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y la directriz viene dada por las ecuaciones $F(x, y) = 0$, $z - h = 0$.

◀ El sistema (11) toma en estas condiciones la forma siguiente

$$\begin{cases} F(x+t(x-x_0), \quad y+t(y-y_0))=0, \\ z+t(z-z_0)-h=0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación tenemos $t=\frac{h-z}{z-z_0}=\frac{(h-z_0)-(z-z_0)}{z-z_0}=$ $=\frac{h-z_0}{z-z_0}-1$, lo que, al realizar la sustitución en la primera ecuación, nos da

$$F\left(x_0+(h-z_0)\frac{x-x_0}{z-z_0}, \quad y_0+(h-z_0)\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0. \tag{12}$$

La ecuación (12) es precisamente la ecuación del cono dado. En un caso particular, cuando $x_0=y_0=z_0=0$ (el vértice del cono se encuentra en el origen de coordenadas), la ecuación del cono adquiere la forma

$$F\left(h\frac{x}{z},\ h\frac{y}{z}\right)=0. \tag{13}$$

Observemos que la ecuación (13) es *homogénea* respecto de x, y y z (es decir, no varía cuando x, y y z se sustituyen por tx, ty y tz para $t\neq 0$ arbitrario), mientras que la ecuación (12) es homogénea respecto de $x-x_0$, $y-y_0$ y $z-z_0$. ▶

4.67. Supongamos que la función de tres variables $F(x, y, z)$ es homogénea respecto de x, y y z, es decir,

$$\forall\, t\neq 0\ \exists s\in\mathbb{R}\ (F(tx, ty, tz)=t^sF(x, y, z)).$$

Muéstrese que la ecuación $F(x, y, z)=0$ define un cono con vértice en el origen de coordenadas, con la particularidad de que la curva

$$F\left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h}, 1\right)=0, \quad z-h=0$$

es su directriz, cualquiera que sea h.

4.68. Fórmese la ecuación de un cono cuyo vértice se ubica en el origen de coordenadas y la directriz viene dada por las ecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=h; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+(y-6)^2+z^2=25, \\ y=3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ x=a; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-2z+1=0, \\ y-z+1=0. \end{cases}$

Constrúyanse los conos correspondientes.

4.69. Fórmese la ecuación de un cono, si están dadas las coordenadas del vértice M_0 y las ecuaciones de la directriz:

a) $M_0(0, -a, 0)$, $x^2 = 2py$, $z = h$;

b) $M_0(0, 0, c)$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$;

c) $M_0(0, -a, 0)$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y + z = a$;

d) $M_0(3, -1, -2)$, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $x - y + z = 0$.

Constrúyanse los conos correspondientes.

4.70. Constrúyase un cono, determínense su vértice y la directriz en el plano $z = h$, si el cono está dado por la ecuación

a) $x^2 + (y - h)^2 - z^2 = 0$; b) $x^2 = 2yz$.

4.71. Fórmese la ecuación de un cono circular, para el cual los ejes coordenados sirven de generatrices.

4.72. Fórmense las ecuaciones de las proyecciones de una línea de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ sobre los ejes coordenados:

a) Oxy; b) Oxz; c) Oyz.

4.73. Una fuente de luz que se encuentra en el punto $M_0(5, 0, 0)$ ilumina la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Hállese la forma de la sombra en el plano Oyz.

Se denomina *superficie de revolución* una superficie invariante respecto de los giros $R(\varphi, n)$ en cualquier ángulo φ en torno a cierto eje fijo u. Esta superficie puede obtenerse por revolución en torno al eje u de una curva que se consigue en la sección de la superficie por cualquier plano que pasa por el eje de simetría.

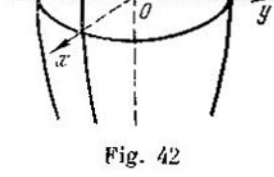


Fig. 42

EJEMPLO 6. Dedúzcase la ecuación de una superficie obtenida como resultado de la revolución de la curva $F(x, y) = 0$, $y = 0$ en torno al eje Oz (fig. 42).

◀ La sección de una superficie por un plano arbitrario $z = z_0$ es una circunferencia de radio x_0, con el centro en el punto $C(0, 0, z_0)$, siendo $F(x_0, z_0) = 0$. Por ello, para un punto arbitrario $M(x, y, z)$ de esta circunferencia tenemos: $z = z_0$ y $\rho(M, Oz) = \sqrt{x^2 + y^2} = x_0$. Sustituyendo estas ecuaciones en la relación $F(x_0, y_0) = 0$, obtenemos

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \tag{14}$$

La ecuación (14) es precisamente la ecuación buscada de la superficie de revolución dada. ▶

4.74. Escríbase la ecuación de una superficie formada por la revolución de la curva $z = x^2$, $y = 0$:

a) en torno al eje Oz; b) en torno al eje Ox.

Constrúyanse dichas superficies.

4.75. Escríbase la ecuación de una superficie formada por la revolución de la recta $z = y$, $x = 0$:

a) en torno al eje Oy; b) en torno al eje Oz.

Constrúyanse ambas superficies.

4.76. Escríbase la ecuación de una superficie formada por la revolución en torno al eje Oz:

a) de la curva $z = e^{-x^2}$, $y = 0$;

b) de la curva $z = \frac{4}{x^2}$, $y = 0$.

Constrúyanse ambas superficies en el sistema inverso de coordenadas.

4.77. Muéstrese que la superficie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$ es una superficie de revolución en torno al eje Ox. Escríbase la ecuación de la curva en el plano $z = 0$ que en su revolución forma la superficie mencionada.

4.78. Muéstrese que la superficie $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ es una superficie de revolución. Hállese su eje de simetría y las ecuaciones de una curva cualquiera por cuya revolución está formada dicha superficie.

RESPUESTAS

1.8. $\overline{MA} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, $\overline{MB} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, $\overline{MC} = -\overline{MA}$, $\overline{MD} = -\overline{MB}$. **1.9.** $\overline{CD} = \boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$, $\overline{DE} = -\boldsymbol{p}$, $\overline{EF} = -\boldsymbol{q}$, $\overline{EA} = \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$, $\overline{AC} = \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$, $\overline{AD} = 2\boldsymbol{q}$, $\overline{AE} = 2\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$. **1.11.** $\overline{MM'} = \frac{1}{3}(\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'})$. **1.13.** $\overline{AB} = \frac{\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{1+\lambda}$, $\overline{BC} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{1+\lambda}$, $\overline{CD} = \frac{\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{1+\lambda}$, $\overline{DA} = -\frac{\lambda}{1+\lambda} \times (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. **1.15.** $\lambda = 5$. **1.18.** 0, 1, 2. **1.19.** $\lambda = \mu = 1$. **1.20.** a) $(-1/2, 1/2, 1/2)$; b) $(1/3, 1/3, 1/3)$. **1.21.** $(7/10, 3/20, 3/20)$. **1.22.** a) $(1/2, 0, 1/2)$; b) $(1, -1/2, 1/2)$. **1.23.** $\left(1-\frac{1}{\lambda}, -1\right)$. **1.24.** a) $|\boldsymbol{a}_1| = \sqrt{5}$, $\boldsymbol{a}_{1.0}(-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0)$; b) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{j}}) = 2/\sqrt{5}$; c) $X(\boldsymbol{a}) = -19/3$; d) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a} = Y(\boldsymbol{a}) = 0$. **1.25.** $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{e}$. **1.26.** $\boldsymbol{a} = -\frac{4}{5}\boldsymbol{e}_1 - \frac{2}{5}\boldsymbol{e}_2$. **1.27.** $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$. **1.28.** a) $\boldsymbol{a}_0(2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13}, 0)$; b) $\boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b} +$

$+c=d\,(3,\ 11/2,\ 0)$; c) $a+b-2c=-2j$; d) $\operatorname{pr}_j(a-b)=6$. **1.29.** $x=-5i+10j+10k$. **1.30.** $x=2i+2j+2k$. **1.31.** $x=\pm 5i+\frac{5}{\sqrt{2}}j-\frac{5}{\sqrt{2}}k$. **1.32.** $\alpha=-1$, $\beta=4$. **1.33.** $x=\frac{5}{3}(i+7j+2k)$. ● $x=\lambda(a_0+b_0)$, donde a_0 y b_0 son los versores de los vectores dados a y b. **1.34.** $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=5$. **1.35.** a) $(3,\ -6,\ 6)$; b) $(5,\ 5,\ 1)$; c) $(-5/\sqrt{2},\ 7/\sqrt{2},\ 5)$. **1.36.** $D\,(9,\ -5,\ 6)$. **1.37.** $C\,(6,\ -2)$, $D\,(2,\ -4)$. **1.38.** $M_1\,(7,\ 0)$ y $M_2\,(-1,\ 0)$. **1.39.** $M\,(0,\ 1,\ 0)$. **1.40.** 7. **1.41.** $(4,\ 0)$ y $(5,\ 2)$. **1.42.** $(-1,\ 2,\ 4)$ y $(8,\ -4,\ -2)$. **1.43.** $(-19,\ 10,\ -17)$. ● Desarróllese el vector $\overline{OD}$ según una base formada de los vectores $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$. **1.44.** $(10,\ -5,\ 0)$. ● Desarróllese el vector $\overline{OB}$ según una base formada de los vectores i, j, $\overline{OA}$. **1.46.** $\sqrt{182}/3$. **1.47.** $(11/7,\ 10/7,\ 18/7)$. **1.49.** a) 9; b) -61; c) 13. **1.50.** $\alpha=\pm 3/5$. **1.51.** $(\widehat{e_1,\ e_2})=\pi/3$. **1.52.** $\alpha=\arccos\frac{4}{5}$. **1.53.** 5. **1.55.** $\overline{DC}=\frac{|a|-|b|}{|a|}a$, $\overline{CB}=\frac{|b|}{|a|}a-b$, $\overline{AC}=\frac{|a|-|b|}{|a|}a+b$, $\overline{DB}=a-b$. ● Hállese primero el vector $\overline{AK}$, donde K es tal punto de la base que $|\overline{AK}|=|\overline{AB}|$. **1.56.** -13. **1.57.** a) 22; b) -200; c) 41; d) $\sqrt{105}$; e) $11/3$, f) $22/7$; g) $\cos\alpha=2/3$, $\cos\beta=-1/3$, $\cos\gamma=-2/3$; h) $-84/\sqrt{129}$; i) $11/21$. **1.58.** $M_1\,(1,\ 0)$ y $M_2\,(6,\ 0)$. **1.59.** $|AB|=5$, $|BC|=5\sqrt{2}$, $|AC|=5$; $\hat{A}=\pi/2$, $\hat{B}=\hat{C}=\pi/4$. **1.61.** $\frac{15}{7\sqrt{85}}$. **1.62.** 4. **1.63.** $-4/5$. **1.65.** $\pi/6$. **1.66.** $(1,\ 1/2,\ -1/2)$. **1.67.** $(-3,\ 3,\ 3)$. **1.68.** $a_j=2j$, $a_{i,\,k}=-i+k$. **1.69.** a) $(2/3,\ 2/3,\ 2/3)$; b) $(-5/3,\ 4/3,\ 1/3)$. **1.70.** $(-2,\ 0,\ 2)$. **1.71.** $-i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$. ● El vector $a_{e_1,\,e_2}$ tiene la forma $a_{e_1,\,e_2}=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2$, donde los coeficientes λ_1 y λ_2 pueden ser determinados de la condición de perpendicularidad del vector $a-a_{e_1,\,e_2}$ al plano de los vectores e_1 y e_2. **1.72.** $x'=(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\operatorname{sen}\varphi$, $y'=(x-x_0)\operatorname{sen}\varphi+(y-y_0)\cos\varphi$. **1.73.** $X'=X\cos\varphi+Y\operatorname{sen}\varphi$, $Y'=-X\operatorname{sen}\varphi+Y\cos\varphi$, $Z'=-Z$. **1.74.** $(-2,\ \sqrt{2},\ 0)$. **1.75.** $a_1a_2=\sum_{i,\,k=1}^{3} X_i^{(1)}\times X_k^{(2)}e_2e_k=5X_1^{(1)}X_1^{(2)}+2X_2^{(1)}X_2^{(2)}+9X_3^{(1)}X_3^{(2)}-2(X_1^{(1)}X_2^{(2)}+X_2^{(1)}\times X_1^{(2)})-3(X_1^{(1)}X_3^{(2)}+X_3^{(1)}X_1^{(2)})+4(X_2^{(1)}X_3^{(2)}+X_3^{(1)}X_2^{(2)})$. **1.76.** a) $\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{3}$; c) $10\sqrt{3}$. **1.77.** $[a_1,\ a_2]=0$, es decir, $a_1 \parallel a_2$. **1.78.** a) $2(k-i)$; b) $2[a,\ c]$; c) $[a,\ c]$; d) 3. **1.80.** $50\sqrt{2}$. **1.83.** a) $\frac{1}{3}[a,\ b]$; b) $-\frac{1}{3}[a,\ b]$. **1.84.** a) $(-3,\ 5,\ 7)$; b) $(-6,\ 10,\ 14)$; c) $(-12,\ 20,\ 28)$. **1.85.** $2\sqrt{6}$. **1.86.** 5. **1.87.** $|a|=|b|=|c|=1$; los vectores son perpendiculares dos a dos. **1.88.** $-4i+3j+4k$. **1.89.** $\sqrt{66}$; $\cos\alpha=$

$=1/\sqrt{66}$; $\cos\beta=-4/\sqrt{66}$, $\cos\gamma=-7/\sqrt{66}$. **1.90.** $\frac{3}{2}\sqrt{2}$. **1.91.** $(-6, -24, 8)$. **1.92.** $(7, 5, 1)$. **1.93.** $a_2 \perp a_1$, una infinidad de soluciones. **1.94.** $(-1/2, 0, 1/2)$. **1.95.** Aparecerá el signo menos ante el determinante; en el caso de una base oblicuángula la fórmula no es verídica. **1.96.** ● Calcúlense las coordenadas de ambos miembros y convénzase que son iguales. El cálculo de las coordenadas resulta conveniente efectuar en la siguiente base especial: el versor $\boldsymbol{i}$ tiene igual dirección con el vector $\boldsymbol{b}$, el versor $\boldsymbol{j}$ se dispone en el plano de los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. **1.97.** 24. **1.98.** -7. a) Izquierda; b) derecha; c) derecha. **1.99.** a) No; b) Sí. **1.104.** 17/2. **1.105.** 6. **1.106.** $3\sqrt{2}$.

2.1. a) $2(x+1)+2(y-2)=0$. La ecuación general: $x+y-1=0$. La ecuación normal: $\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$; $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$. b) $2(x-2)=0$. La ecuación general: $x-2=0$, es una recta paralela al eje Oy. La ecuación normal: $x-2=0$; $p=2$. c) $2(x-1)-(y-1)=0$. La ecuación general: $2x-y-1=0$. La ecuación normal: $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}=0$; $p=\frac{1}{\sqrt{5}}$. **2.2.** a) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}$. La ecuación general: $x+3y-5=0$. La ecuación normal: $\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{5}{\sqrt{10}}=0$; $p=\frac{5}{\sqrt{10}}$. b) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-1}$. La ecuación general: $-x+1=0$, es una recta paralela al eje Oy. La ecuación normal: $x-1=0$; $p=1$. c) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{0}$. La ecuación general: $y-1=0$, es una recta paralela al eje Ox. La ecuación normal: $y-1=0$; $p=1$. **2.3.** c) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-2}$. La ecuación general $x-y+1=0$. La ecuación normal: $-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$; $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$. b) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-3}$. La ecuación general: $x-1=0$, la recta es paralela al eje Oy. La ecuación normal: $x-1=0$; $p=1$. c) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-2}{0}$. La ecuación general: $y-2=0$, es una recta paralela al eje Ox. La ecuación normal: $y-2=0$, $p=2$. **2.4.** a) $\rho(M, L)=\frac{3}{\sqrt{5}}$, L' : $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{1}$, L'' : $-2(x+1)+(y-2)=0$; b) $\rho(M, L)=1/2$, L' : $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}$, L'' : $2y=0$; c) $\rho(M, L)=0$, L' : $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}$, L'' : $x+y+1=0$. **2.5.** Se cortan en el punto $M_0(-3/4,$

$-1/2$); $\cos(\widehat{L_1, L_2}) = 1/\sqrt{5}$. **2.6.** Se cortan en el punto $M_0(1, 0)$; $\cos(\widehat{L_1, L_2}) = 2/\sqrt{5}$. **2.7.** Son paralelas: $\rho(L_1, L_2) = \sqrt{2}/4$. **2.8.** Son paralelas: $\rho(L_1, L_2) = \sqrt{2}$. **2.9.** Coinciden. **2.10.** a) (AB): $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-4}$, (CD): $\frac{x-6}{-4} = \frac{y-1}{-1}$, $h = \frac{19}{\sqrt{17}}$, $\cos\varphi = \frac{19}{\sqrt{17\cdot 58}}$, L_1: $\frac{x-1}{\sqrt{26}+5\sqrt{17}} = \frac{y-2}{-4\sqrt{16}-\sqrt{17}}$, L_2: $(\sqrt{26}+5\sqrt{17})(x-1) + (-4\sqrt{26}-\sqrt{17})(y-2) = 0$; b) (AB); $\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{3}$, (CD): $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-4}$, $h = 4$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$, L_1: $\frac{x-2}{4-2\sqrt{5}} = \frac{y+2}{3+\sqrt{5}}$, L_2: $(4-2\sqrt{5})(x-2) + (3+\sqrt{5})(y+2) = 0$. **2.11.** $t = -1/2$. **2.12.** $4/\sqrt{5}$. **2.14.** $y = 2x-6$, $y = -2x+6$. **2.15.** $3x-2y-12=0$, $3x-8y+24=0$. **2.16.** a) $3x-2y-7=0$; b) $x-5y-7/6=0$. **2.17.** $x-5y+3=0$, ó bien $5x+y-11=0$. **2.18.** $x-2y-7=0$, $x-4y-1=0$, $x-y+2=0$. **2.19.** ● Las desviaciones $\delta(M_1, L)$ y $\delta(M_2, L)$ son de signos contrarios. **2.20.** $4x+y+5=0$ ó $y-3=0$. **2.21.** a) En un mismo ángulo; b) en los ángulos opuestos por el vértice. **2.22.** Obtuso. **2.23.** $4x-3y+10=0$, $7x+y-20=0$, $3x+4y-5=0$. **2.24.** $x-3y-23=0$, $7x+9y+19=0$, $4x+3y+13=0$. **2.25.** $2x+9y-65=0$, $6x-7y-25=0$, $18x+13y-41=0$. **2.26.** a) $2x-y+z-2=0$; $1/\sqrt{6}$; b) $x-y=0$, el plano es paralelo al eje Oz y pasa por el origen de coordenadas; $1/\sqrt{2}$. **2.27.** a) $x+y-3=0$; b) $x+2y-2=0$. **2.28.** a) $x-2y-z=0$; b) $-x+y+2z-5=0$. **2.29.** a) $-x+2y-3z-3=0$; b) $2x-2y-z+1=0$.
2.30. a) $x+y-3=0$; b) $2x-y-1=0$. **2.31.** Se intersecan, $\cos(\widehat{P_1, P_2}) = \frac{1}{2\sqrt{15}}$. **2.32.** Son paralelos, $\rho(P_1, P_2) = \frac{3}{2\sqrt{6}}$. **2.33.** Se intersecan, $\cos(\widehat{P_1, P_2}) = 1/2$. **2.34.** Coinciden. **2.35.** 8. **2.36.** a) $4x-5y+z-2=0$ y $2x+y-3z+8=0$; b) $3x-6y+7z-4=0$ y $x+4y+3z+4=0$. **2.37.** a) $4x-y-2z-4=0$; b) $20x-12y+4z+13=0$. **2.38.** a) en los ángulos adyacentes; b) en un mismo ángulo. **2.39.** a) $\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = -3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$, las ecuaciones en proyecciones: $\begin{cases} 4x+3y-5=0, \\ 5x+3z-7=0, \\ 5y-4z+1=0; \end{cases}$ b) $\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = -\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$, las ecuaciones en proyecciones: $\begin{cases} 7x-y+1=0, \\ 5x-z-1=0, \\ 5y-7z-12=0. \end{cases}$ **2.40.** a) $\frac{x-2}{2} =$

$=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$; b) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$; c) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$; d) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{1}$; e) $\frac{x-2}{-4}=\frac{y}{8}=\frac{z+3}{10}$; f) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=$ $=\frac{z+3}{-1/2}$. **2.41.** a) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$; b) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-3}$.

2.42. a) $x-2y+z=0$; b) $2x+y-1=0$; c) $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ 2x+y-1=0, \end{cases}$ o bien $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{5}$; d) $18/\sqrt{30}$; e) $M'(3/5,\ -1/5,\ -1)$. **2.43.** a) $1/\sqrt{15}$, $M(1,\ -6,\ -4)$, b) $3x-y+2z-1=0$; c) $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 3x-y+2z-1=0. \end{cases}$

2.45. a) $2x-16y-13z+31=0$; b) $6x-20y-11z+1=0$. **2.46.** 25.

2.48. b) $4x+3y+12z-93=0$; c) 13; d) $\begin{cases} 54x-44y-7z+181=0, \\ -45x-76y+34z+497=0. \end{cases}$

2.49. $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z+4}{9}$.

3.1. Véase la fig. 43. **3.2.** Véase la fig. 44. **3.3.** Las rectas $x = 0$ y $x - y = 0$. **3.4.** Las rectas $y = 0$ y $x + y = 0$. **3.5.** Las rectas

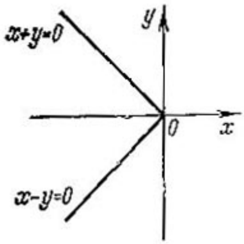


Fig. 43

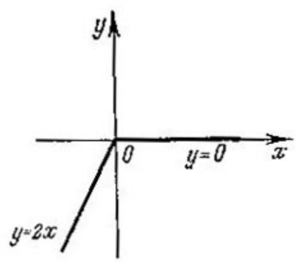


Fig. 44

$x - y = 0$ y $x + y = 0$. **3.6.** Las rectas $x = 0$ e $y = 0$. **3.7.** Las rectas $y = \pm 3$. **3.8.** Las rectas $x = -2$ y $x = 3$. **3.9.** Las rectas $y = 0$, $x = 2$ y $x = 5$. **3.10.** Una circunferencia de radio $R = 2$, con el centro en el origen de coordenadas. **3.11.** Una circunferencia de radio $R = 1$, con el centro en el punto $C\ (0,\ -3)$. **3.12.** El origen de coordenadas. **3.13.** Un conjunto vacío. **3.14.** Los puntos $(0,\ \pm 1)$. **3.15.** $x - y = 0$. **3.16.** $4ax \pm c = 0$. **3.17.** $y = \pm 2x$. **3.18.** $x^2 + y^2 = 16$. **3.19.** $x^2 + y^2 = 8$. **3.20.** $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$. **3.21.** $xy = 2$. **3.22.** $y = \frac{x^2}{4} - x + 2$. **3.23.** a) $C\ (2,\ -3)$, $R = 4$; b) $C\ (4,\ 0)$, $R = 4$; c) $C\ (0,\ -2)$, $R = 2$. **3.24.** a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$; b) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$; c) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$; d) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$; e) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, o bien $(x - 5)^2 +$

$+ (y-5)^2 = 25$; f) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$, g) $(x+4)^2 + + (y+1)^2 = 25$. ● Escríbase la ecuación de la circunferencia buscada en la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, sustitúyanse en esta ecuación las coordenadas de cada punto y hállense a continuación D, E y F. **3.25.** $2x - 5y + 19 = 0$. **3.26.** a) 7; b) 2. **3.27.** a) Corta; b) es tangente; c) pasa fuera de la circunferencia. **3.28.** a) $a = 5$, $b = 3$;

b) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$; c) $e = \frac{4}{5}$; d) $D_1: x = -\frac{25}{4}$, $D_2: x = \frac{25}{4}$.

3.29. a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; d) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; e) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$; f) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$. **3.30.** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. **3.31.** a) $C(3, -1)$, $a = 3$, $b = \sqrt{5}$, $e = 2/3$, $D_1: 2x + 3 = 0$, $D_2: 2x - 15 = 0$; b) $C(-1, 2)$, $a = 5$, $b = 4$, $e = 3/5$, $D_1: 3x + 28 = 0$, $D_2: 3x - 22 = 0$; c) $C(1, -2)$, $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$, $e = 1/2$, $D_1: y + 10 = 0$, $D_2: y - 6 = 0$. **3.34.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, $r_{1,2} = 4 \pm \sqrt{3}$, $\rho_{1,2} = \frac{2}{\sqrt{3}}(4 \pm \sqrt{3})$. **3.35.** $\left(-\frac{15}{4}, \pm\frac{\sqrt{63}}{4}\right)$.

3.36. $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3 = 0$. **3.37.** $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0$. **3.38.** a) La recta corta la elipse; b) pasa fuera de la elipse; c) es tangente a la elipse. **3.40.** $3x + 2y - 10 = 0$ y $3x + 2y + 10 = 0$. **3.41.** $x + y - 5 = 0$ y $x + y + 5 = 0$. **3.43.** $x + y - 5 = 0$ y $x + 4y - 10 = 0$. **3.44.** $M_0(-3, 2)$, $\sqrt{13}$. **3.46.** $2x + 11y - 10 = 0$. ● Hágase uso del resultado del problema 3.45. **3.47.** a) $a = 3$, $b = 4$; b) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$; c) $e = \frac{5}{3}$; d) $y = \pm\frac{4}{3}x$; e) $x = \pm\frac{9}{5}$.

3.48. a) $a = 4$, $b = 3$; b) $F_1(0, -5)$, $F_2(0, 5)$; c) $e = \frac{5}{4}$; d) $y = \pm\frac{4}{3}x$; e) $y = \pm\frac{16}{5}$. **3.49.** a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; c) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; d) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; e) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$; f) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. **3.50.** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. **3.51.** a) $C(2, -3)$, $a = 3$, $b = 4$, $e = 5/3$, las ecuaciones de las asíntotas: $4x - 3y - 17 = 0$ y $4x + 3y + 1 = 0$, las ecuaciones de las directrices: $5x - 1 = 0$ y $5x - 19 = 0$; b) $C(-5, 1)$, $a = 8$, $b = 6$, $e = 5/4$, las ecuaciones de las asíntotas: $3x + 4y + 11 = 0$ y $3x - 4y + 19 = 0$, las ecuaciones de las directrices: $x = -11,4$ y $x = 1,4$; c) $C(2, -1)$, $a = 4$, $b = 3$, $e = 5/4$, las ecuaciones de las asíntotas: $4x + 3y - 5 = 0$ y $4x - 3y - 11 = 0$, las ecuaciones de las directrices: $y = -4,2$ e $y =$

$= 2{,}2$. 3.54. $r_1 = 9/4$, $r_2 = 41/4$, $\rho(M, D_1) = 9/5$, $\rho(M, D_2) = 41/5$. 3.55. $(-6, \pm 4\sqrt{3})$. 3.56. $7y^2 + 24xy - 144 = 0$. 3.57. $7x^2 - 6xy - y^2 + 26x - 18y - 17 = 0$. 3.58. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$, $e = \sqrt{2}$, $F_1(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $F_2(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $D_{1,2}$: $x + y \pm \sqrt{2} = 0$. 3.59. $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. ● Véase el problema 3.39. 3.60. $10x - 3y - 32 = 0$, $10x - 3y + 32 = 0$. 3.61. $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y + 10 = 0$. 3.63. $5x - 3y - 16 = 0$, $13x + 5y + 48 = 0$. 3.64. $M_0(-6, 3)$, $\rho = 11/\sqrt{13}$. 3.66. $2x + 11y + 6 = 0$. ● Hágase uso del resultado del problema 3.65. 3.67. a) $p = 3$; b) $p = 5/2$; c) $p = 2$; d) $p = 1/2$. 3.68. a) $y^2 = -x$; b) $x^2 = -2y$; c) $x^2 = -12y$. 3.69. a) $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$; b) $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$. 3.70. $A(2, 0)$, $p = 2$; b) $A(0, 2)$, $p = 1/2$; c) $A(1, 3)$, $p = 1/8$; d) $A(6, -1)$, $p = 3$; e) $A(1, 2)$, $p = 2$; f) $A(-4, 3)$, $p = 1/4$. 3.72. 6. 3.73. a) $y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$; b) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$. 3.74. $y_0 y = p(x + x_0)$. 3.75. $x + y + 2 = 0$. 3.76. $2x - y - 16 = 0$. 3.77. $3x - y + 3 = 0$ y $3x - 2y + 12 = 0$. 3.78. $M_0(9, -24)$, $\rho(M_0, L) = 10$. 3.80. $y - 18 = 0$. 3.81. $\operatorname{tg}\varphi = 1$. 3.82. $r \operatorname{sen}\varphi = 1$. 3.83. $r\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 3.84. $r = a$. 3.85. $r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$. 3.86. $r = a\cos\varphi$. 3.87. Una circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. 3.88. Una recta $y = -x$. 3.89. Una recta $x = 2$. 3.90. Una recta $y = 1$. 3.91. Una recta $x - y - 1 = 0$. 3.92. Una recta $x + y - 2 = 0$. 3.93. Una circunferencia $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. 3.94. Una circunferencia $x^2 + (y - a)^2 = a^2$. 3.95. Un par de rayos $x = \pm 2y$, $y \geqslant 0$. 3.96. Una familia de circunferencias concéntricas de radios $r_n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ 3.97. Una hipérbola $xy = a^2$. 3.98. Lemniscata de Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. 3.99. a) $r\cos\varphi = 3$; b) $\varphi = \pi/3$; c) $\operatorname{tg}\varphi = 1$. 3.100. a) $r = 10\cos\varphi$; b) $r = \pm 6 \operatorname{sen}\varphi$. 3.101. a) $C(2, 0)$, $R = 2$; b) $C(3/2, \pi/2)$, $R = 3/2$; c) $C(5/2, -\pi/2)$, $R = 5/2$; d) $C(3, \pi/3)$, $R = 3$; e) $C(4, 5\pi/6)$, $R = 4$; f) $C(4, -\pi/6)$, $R = 4$. 3.102. $r^2 - 2r_0 r \times \cos(\varphi - \varphi_0) = R^2 - r_0^2$.

3.103. a) $r = \frac{16}{5 - 3\cos\varphi}$; b) $r = \frac{16}{5 + 3\cos\varphi}$. 3.104. a) $r = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$; b) $r = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$. 3.105. $r = \frac{3}{1 - \cos\varphi}$. 3.106. a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; c) $y^2 = 6x$. 3.107. $r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\varphi}$. 3.108. $r^2 = \frac{b^2}{e^2\cos^2\varphi - 1}$. 3.109. $r = \frac{2p\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi}$. 3.110. $x = t$, $y = t + 1$, $t \in [-1, +\infty)$; b) $x = t - 1$, $y = t$, $t \in [0, +\infty)$; c) $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}t$, $t \in [0, +\infty)$; d) $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\cos t}{\cos\left(t - \frac{3\pi}{4}\right)}$, $y =$

$=\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{sen} t}{2\cos\left(t-\frac{3\pi}{4}\right)}$, $t\in\left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right)$. **3.111.** a) $x=1+\frac{1}{\sqrt{5}}t$, $y=1+\frac{2}{\sqrt{5}}t$, $t\in[0, \sqrt{5}]$; b) $x=2-\frac{1}{\sqrt{5}}t$, $y=3-\frac{2}{\sqrt{5}}t$, $t\in[0, \sqrt{5}]$. **3.112.** $x=x_0+R\cos t$, $y=y_0+R\operatorname{sen} t$, $t\in[0, 2\pi)$. **3.113.** a) $x=R(1+\cos 2t)$, $y=R\operatorname{sen} 2t$, $t\in[-\pi/2, \pi/2)$; b) $x=R(1+\cos t)$, $y=R\operatorname{sen} t$, $t\in[0, 2\pi)$. **3.114.** Una recta $x+2y-3=0$. **3.115.** Una parábola $y^2=x$. **3.116.** Una circunferencia $(x+1)^2+(y-3)^2=4$. **3.117.** Una elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **3.118.** La rama derecha de la hipérbola $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{1}=1$. **3.119.** La rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. **3.120.** Una circunferencia $(x-R)^2+y^2=R^2$. **3.121.** Una circunferencia $x^2+(y-R)^2=R^2$. **3.122.** La rama superior de una parábola $y^2=2px$. **3.123.** $x=\dfrac{ab\cos t}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t}}$, $y=\dfrac{ab\operatorname{sen} t}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t}}$, $t\in[0, 2\pi)$. **3.124.** $x=\dfrac{ab\cos t}{\sqrt{b^2\cos^2 t-a^2\operatorname{sen}^2 t}}$, $y=\dfrac{ab\operatorname{sen} t}{\sqrt{b^2\cos^2 t-a^2\operatorname{sen}^2 t}}$, donde $t\in\left(-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)$ para la rama derecha y $t\in\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \pi+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)$ para la rama izquierda. **3.125.** a) $x=\frac{t^2}{2p}$, $y=t$, $t\in(-\infty, +\infty)$; b) $x=2p\operatorname{ctg}^2 t$, $y=2p\operatorname{ctg} t$, donde $t\in(0, \pi/2)$ para la rama derecha y $t\in(3\pi/2, 2\pi)$, para la rama izquierda; c) $x=\frac{p}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}$, $y=p\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, $t\in(0, 2\pi)$.

4.1. Un plano $z=-5$ paralelo al plano Oxy. **4.2.** Un plano con el vector normal $\boldsymbol{n}$ (1, —2, 1). **4.3.** Una esfera de radio $R=2$, con el centro en el origen de coordenadas. **4.4.** Una esfera de radio $R=4$ con el centro en el punto C (2, 0, —1). **4.5.** El origen de coordenadas. **4.6.** El eje Oy. **4.7.** Un conjunto vacío. **4.8.** Un par de planos que se intersecan $x-2z=0$ y $x+2z=0$ paralelos al eje Oy. **4.9.** Un par de planos coordenados Oyz y Oxy. **4.10.** Una terna de planos coordenados. **4.11.** Un par de planos $x=0$ y $x=4$. **4.12.** Un par de planos $y=0$ e $y=x$. **4.13.** $20y+53=0$. **4.14.** $x^2+y^2+z^2=a^2$. **4.15.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$. **4.16.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=-1$. **4.17.** a) C (0, 0, 3), $R=3$; b) C (2, 1, —1), $R=5$. **4.18.** a) $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=4$; b) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=18$; c) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$; d) $(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=56$, e) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49$. **4.19.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$. **4.20.** $\left(x-\frac{4}{9}\right)^2+\left(y+\frac{4}{9}\right)^2+\left(z-\frac{4}{9}\right)^2=\frac{64}{729}$. **4.21.** $x=$

$= -1+5t,\ y=3-t,\ z=-\dfrac{1}{2}+2t$. 4.22. $M_0(-2,\ -2,\ 7)$, $\rho=3$. 4.23. a) Corta; b) es tangente; c) pasa fuera de la esfera. 4.24. a) una recta que pasa por el punto $(5, 0, -2)$ paralelamente al eje Oy; b) una circunferencia en el plano Oxz de radio $R = 7$ y con el centro en el origen de coordenadas; c) una circunferencia situada en el plano $z = 2$ de radio $R = 4$ y con el centro en el punto C $(0, 0, 2)$; d) una circunferencia en el plano $z = 6$ de radio $R = \sqrt{13}$ y centro en el punto C $(0, 0, 6)$. 4.25. a) C $(1, 7, 2)$, $R = 4$; b) C $(-1, 2, 3)$, $R = 8$.

4.26. Una elipse $\dfrac{(x-2)^2}{36}+\dfrac{(y+4)^2}{18}=1$.

4.27. $\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36, \\ 2x-z-1=0. \end{cases}$

4.28. $\begin{cases} (x-2)^2+y^2+(z-3)^2=27; \\ x+y-2=0. \end{cases}$ 4.29. Un elipsoide. 4.30. Un hiperboloide de una hoja. 4.31. Un hiperboloide de revolución de dos hojas. 4.32. Un cono. 4.33. Un paraboloide de revolución. 4.34. Un paraboloide hiperbólico. 4.35. Un paraboloide elíptico. 4.36. Un cilindro parabólico. 4.37. Un paraboloide de revolución con el vértice $(0, 0, 2)$. 4.38. Un paraboloide hiperbólico. 4.39. Un hiperboloide de revolución de una hoja. 4.40. Un hiperboloide de revolución de dos hojas. 4.41. ● Hágase uso de la homogeneidad de la ecuación. 4.42. ● Pásese al nuevo sistema de coordenadas girando los ejes Ox y Oy alrededor del eje Oz en un ángulo $\pi/4$. 4.43. a) Un cono de segundo grado con vértice en el origen de coordenadas (véase el problema 4.41); b) un paraboloide hiperbólico (véase el problema 4.42). 4.44. Sobre el plano Oxy: $x^2 + 4xy + 5y^2 - x = 0$; sobre el plano Oxz: $x^2 - 2xz + 5z^2 - 4x = 0$; sobre el plano Oyz: $y^2 + z^2 + 2y - z = 0$. 4.45. a) Una elipse; b) una parábola. 4.46. a) M_1 $(3, 4, -2)$ y M_2 $(6, -2, 2)$; b) M $(4, -3, 2)$, la recta es tangente a la superficie; c) la recta y la superficie no tienen puntos comunes. 4.47. a) M $(9, 5, -2)$; b) M $(3, 0, -10)$; c) M $(6, -2, 2)$.

4.48. $\begin{cases} 2x-12y-z+16=0, \\ x-2y+4=0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-12y-z+16=0, \\ x+2y-8=0. \end{cases}$

4.49. $\begin{cases} y+2z=0, \\ x-5=0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-5z=0, \\ y+4=0. \end{cases}$ 4.60. a) $y^2 + z^2 = a^2$; b) $x^2 + z^2 = 2ax$; c) $x^2 + y^2 = 2ax$. 4.61. $x^2 + 5y^2 - 8y - 12 = 0$; b) $4x^2 + 5z^2 + 4z - 60 = 0$; c) $2y - z - 2 = 0$. 4.62. a) $8x^2 + 4y^2 - 36x + 16y - 3 = 0$, $z = 0$; b) $2x - 2z - 7 = 0$, $y = 0$; c) $4y^2 + 8z^2 + 16y + 36z - 31 = 0$, $x = 0$. 4.63. $y^2 = 2ax - x^2$. 4.64. a) $(3y - 2z)^2 = 12\,(3x - z)$; b) $(x - z)^2 + (y - z)^2 = 4\,(x - z)$. 4.65. La ecuación del cilindro de proyección: $2x^2 + (y - z + 2)^2 = 8$;

el contorno de la sombra: una elipse $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{8}=1$. 4.66. $x=4$, $z \pm y=2$. 4.68. a) $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}=\dfrac{z^2}{h^2}$; b) $9\,(x^2 + z^2) = 16y^2$; c) $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$; d) $x^2+y^2-z^2=0$. 4.69. a) $h^2x^2=2pz\,(h\,(y+$

$+a)-az)$; b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(z-c)^2}{c^2}=0$; c) $x^2+z^2=z(y+a)$; d) $3x^2-$ $-5y^2+7z^2-6xy+10xz-2yz-4x+4y-4z+4=0$. **4.70.** a) el vértice $(0, h, 0)$, la directriz es una circunferencia $x^2+(y-h)^2=$ $=h^2$, $z=h$; b) el vértice $(0, 0, 0)$, la directriz es una parábola $x^2=$ $=2hy$, $z=h$. **4.71.** $xy+xz+yz=0$, el eje del cono pasa en el primero y séptimo octantes; $xy+xz-yz=0$, el eje del cono pasa en el segundo y octavo octantes; $xy-xz-yz=0$, el eje del cono pasa en el tercero y quinto octantes; $xy-xz+yz=0$, el eje del cono pasa en los octantes 4 y 6. **4.72.** a) una circunferencia $x^2+y^2=$ $=(a/\sqrt{2})^2$; b) los segmentos $z=\pm a/\sqrt{2}$, $-a/\sqrt{2}\leqslant x\leqslant a/\sqrt{2}$; c) los segmentos $z=\pm a/\sqrt{2}$, $-a/\sqrt{2}\leqslant y\leqslant a/\sqrt{2}$. **4.73.** La ecuación del cilindro de proyección: $9x^2-16y^2-16z^2-90x+225=$ $=0$, el contorno de la sombra es una circunferencia $y^2+z^2=(15/4)^2$. **4.74.** a) $z=x^2+y^2$; b) $\sqrt{y^2+z^2}=x^2$. **4.75.** a) $x^2+z^2=y^2$; b) $z^2=x^2+y^2$. **4.76.** a) $z=e^{-(x^2+y^2)}$; b) $z=\frac{4}{x^2+y^2}$. **4.77.** $\frac{x^2}{a^2}+$ $+\frac{y^2}{b^2}=1$. **4.78.** La superficie se ha formado por revolución de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$ en torno al eje Oz.

CAPÍTULO 5

CÁLCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE

§ 1. Derivada

1. Definición de la derivada. Derivación de las funciones definidas explícitamente. Sea $\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ *un incremento de la función* $y = f(x)$ en el punto x_0 correspondiente al *incremento del argumento* Δx. Se denomina *derivada* de primer orden (o *primera derivada*) de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 el límite

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Los números

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$$

y

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$$

se llaman *derivadas a la izquierda* y *a la derecha*, respectivamente, de la función $y = f(x)$ en el punto x_0. Para que exista la derivada $f'(x_0)$ de la función $f(x)$ en el punto x_0, es necesario y suficiente que existan y coincidan en dicho punto sus derivadas a la izquierda y a la derecha, es decir, que sea

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Ejemplo 1. Hállense $f'_-(0)$ y $f'_+(0)$ para la función $f(x) = |x|$.

◀ Según la definición, tenemos

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

y

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Notemos que la función $f(x) = |x|$ no tiene derivada en el punto $x_0 = 0$, puesto que $f'_-(0) \neq f'_+(0)$. ▶

Una derivada de la función $f(x)$, considerada sobre el conjunto de aquellos puntos en los que existe, es de por sí una función. El proceso de hallar la derivada se llama también *derivación (diferenciación)*.

TABLA DE DERIVADAS de las funciones elementales principales.

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$, $a \neq 0$.
2. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$; $(e^x)' = e^x$.
3. $(\log_a x)' = \log_a e \cdot \dfrac{1}{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$; $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
4. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.
5. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.
6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.
8. $(\operatorname{arcsen} x)' = -(\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. $(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

REGLAS DE DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES

I. Sea C una constante y sean $f(x)$, $g(x)$ las funciones a derivar. En este caso:

1. $(C)' = 0$.
2. $(f+g)' = f' + g'$.
3. $(Cf)' = Cf'$.
4. $(fg)' = f'g + fg'$.
5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$, $g \neq 0$.

II. Supongamos que la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x_0 y la función $z = g(y)$ tiene derivada en el punto $y_0 = f(x_0)$. Entonces, la función compuesta $z = g(f(x))$ tiene en el punto x_0 una derivada igual a

$$z'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) \tag{2}$$

(*regla de derivación de una función compuesta*).

EJEMPLO 2. Hállese la derivada de la función $z = \log_3 (\operatorname{arcsen} x)$.

◀ Suponiendo $z = \log_3 y$ e $y = \operatorname{arcsen} x$, tenemos

$$z'(y) = \log_3 e \cdot \frac{1}{y} \quad \text{e} \quad y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De aquí, conforme a (2) obtenemos

$$z'(x) = \frac{\log_3 e}{\operatorname{arcsen} x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \ ▶$$

Hállese $\Delta f(x_0, \Delta x)$, si:

1.1. $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$.

1.2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,25$.

1.3. $f(x) = \lg x$, $x_0 = 100$, $\Delta x = -90$.

Hállese $\Delta f(x_0, \Delta x)$ como función de Δx, si:

1.4. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

◀ Tenemos

$$\Delta f\left(\frac{\pi}{2},\ \Delta x\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=$$

$$=2\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right)=-2\operatorname{sen}^2\frac{\Delta x}{2}.\ ▶$$

1.5. $f(x)=x^2,\ x_0=-1.$
1.6. $f(x)=e^x,\ x_0=1.$
1.7. $f(x)\log_2(x),\ x_0=1.$

Haciendo uso sólo de la definición de derivada, hállese $f'(x)$:

1.8. $f(x)=\operatorname{ctg} x.$

◀ **Tenemos:**

$$(\operatorname{ctg} x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{ctg}(x+\Delta x)-\operatorname{ctg} x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(-\Delta x)}{\Delta x\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(x+\Delta x)}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(x+\Delta x)}=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.\ ▶$$

1.9. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ **1.10.** $f(x)=\sqrt{x}.$

1.11. $f(x)=2^x$. **1.12.** $f(x)=\log_2 x.$

1.13. Se sabe que $f(0)=0$ y existe un límite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$. Demuéstrese que este límite es igual a $f'(0)$.

1.14*. Demuéstrese que si $f(x)$ tiene derivada en el punto x_0, entonces

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0).$$

Hállense, para $f(x)$ dada, $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$.

1.15. $f(x)=|x-1|+|x+1|,\ x_0=\pm 1.$

1.16. $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 1,\\ -x^2+2x, & x>1,\end{cases}\quad x_0=1.$

◀ Tenemos

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x-1}{x-1}=1$$

y

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{-x^2+2x-1}{x-1}=$$

$$=-\lim_{x\to 1+0}(x-1)=0.\ ▶$$

1.17. $f(x)=\begin{cases} 0 & x\leqslant 0, \\ x^2 \ln x, & x>0, \end{cases}$ $x_0=0.$

1.18. $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$, $x_0=0.$

1.19. $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & x\neq 0, \end{cases}$ $x_0=0.$

1.20*. Muéstrese que la función

$$f(x)=\begin{cases} x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

es continua para $x=0$, pero no tiene en este punto ni derivada por la izquierda ni por la derecha.

Hállense las derivadas de las siguientes funciones:

1.21. $y=3-2x+\frac{2}{3}x^4.$ **1.22.** $y=-\frac{5x^5}{a^2}.$

1.23. $y=x^{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{x^5+a}.$ **1.24.** $\frac{a}{\sqrt[3]{x^3}}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{b}.$

1.25. $y=\frac{a+bx}{c+dx}.$ **1.26.** $y=\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x}.$

1.27. $y=\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}.$ **1.28.** $y=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}.$

1.29. $y=2\operatorname{sen}x-3\operatorname{tg}x.$ **1.30.** $y=\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{\operatorname{sen}x+\cos x}.$

1.31. $y=\sqrt{\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}}.$

1.32. $y=\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}.$

1.33. $y=\cos^2\left(\operatorname{sen}\frac{x}{3}\right).$ **1.34.** $y=\sqrt{\operatorname{sen}\sqrt{x}}.$

1.35. $y=\operatorname{arctg}\left(x-\sqrt{1+x^2}\right).$

1.36. $y=\arccos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}.$ **1.37.** $y=\sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}.$

1.38. $y=\frac{e^{-x^2}}{2x}.$ **1.39.** $y=2^{\frac{x}{\ln x}}.$

1.40. $y=2^{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}}$. **1.41.** $y=3^{2^x}$.

1.42. $y=\ln x\cdot\lg x-\ln a\cdot\log_a x$.

1.43. $y=\log_2\ln 2x$. **1.44.** $y=e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.

1.45. $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$.

1.46. $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$.

Hállense las derivadas de las *funciones hiperbólicas*:

1.47. $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ (*seno hiperbólico*),

1.48. $\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ (*coseno hiperbólico*),

1.49. $\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ (*tangente hiperbólica*),

1.50. $\operatorname{cth} x=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ (*cotangente hiperbólica*).

Se denomina *derivada logarítmica* de la función $y=f(x)$ la derivada del logaritmo de esta función, es decir,

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}.$$

El cálculo de la derivada se simplifica a menudo, con la aplicación previa de los logaritmos.

Ejemplo 3. Hállese la derivada de la función $y=\sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$.

◀ Tenemos

$$\ln y=\frac{1}{2}\left(\ln x+\ln(x-1)-\ln(x-2)\right),$$

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right),$$

de donde

$$y'=(\ln y)'\cdot y=\frac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}. ▶$$

Ejemplo 4. Hállese la derivada de una función *exponencial compuesta* $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

◀ Calculando los logaritmos, obtendremos

$$\ln y=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

De aquí hallamos las derivadas de los miembros primero y segundo

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}.$$

Por consiguiente,

$$y' = (\ln y)' \cdot y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1-x}\right). \blacktriangleright$$

Hállense las derivadas de las siguientes funciones, aplicando previamente los logaritmos:

1.51. $y = \dfrac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$.

1.52. $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}$.

1.53. $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x+1)}}$.

1.54. $y = x^3\sqrt{\dfrac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}$.

1.55. $y = x^x$. **1.56.** $y = x^{2^x}$.

1.57. $y = \sqrt{x}^{\sqrt[3]{x}}$. **1.58.** $y = (\ln x)^{1/x}$.

1.59. $y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arcsen} x}$. **1.60.** $y = x^{x^x}$.

1.61. $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$. **1.62*.** $y = x^{x^2} + x^{2^x} + 2^{x^x}$.

Calcúlense las derivadas de las funciones dadas, introduciendo las variables intermedias:

1.63*. $y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^2 x})$.

1.64. $y = (\arccos x)^2 \ln(\arccos x)$.

1.65. $y = \dfrac{e^{-x^2} \operatorname{arcsen}(e^{-x^2})}{1 - e^{-2x^2}}$.

1.66. $y = \dfrac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}} \operatorname{arctg} a^{-x}$.

1.67*. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leqslant 0, \\ ax + b, & x > 0. \end{cases}$$

Hállense los coeficientes a y b de modo tal que la función $f(x)$ sea continua y derivable en el punto $x_0 = 0$.

1.68. Sea

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, & |x|\geqslant 1, \\ ax^2+b, & |x|<1. \end{cases}$$

Hállense los coeficientes a y b de modo tal que la función $f(x)$ sea continua y derivable en cualquier punto.

Hállense las derivadas de las siguientes funciones:

1.69. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$. **1.70.** $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

1.71. $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

1.72. $y=\operatorname{sen}(\cos^2 x)\cos(\operatorname{sen}^2 x)$. **1.73.** $y=\dfrac{1}{\cos^n mx}$.

1.74. $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b$, $a, b>0$.

1.75. $y=\ln(\ln^n mx)$. **1.76.** $y=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\dfrac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

1.77. $y=\log_2\operatorname{sen}\left(2\pi x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

1.78. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$. **1.79.** $y=\log_x e$.

1.80. $y=(\operatorname{sen} x)^{\cos x}$. **1.81.** $y=\sqrt{x}^{\operatorname{sen}^2 x}$.

1.82. $y=\sqrt{\cos x}\cdot a^{\sqrt{\cos x}}$.

1.83. $y=\ln(\operatorname{sh} x)+\dfrac{1}{2\operatorname{sh} x}$. **1.84.** $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$.

1.85. $y=e^{-x}\operatorname{sh} ax$. **1.86.** $y=\arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

1.87. $y=\ln|x|$.

◀ La función $y=\ln|x|$ está definida $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$, y

$$\ln|x|=\begin{cases} \ln x & x>0, \\ \ln(-x), & x<0. \end{cases}$$

De aquí

$$(\ln|x|)'=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x>0 \\ \dfrac{1}{x}, & x<0 \end{cases}=\frac{1}{x},\ x\neq 0. \ ▶$$

1.88. $y = \arcsin \frac{1}{|x|}$. **1.89.** $y = |\operatorname{sen} x|$.

1.90. $y = |\operatorname{arctg} x|$.

1.91. $y = [x]\, x$, donde $[x]$ es la parte entera del número x.

◀ La función $y = [x]\, x$ está definida $\forall x \in \mathbb{R}$. Si $k \in \mathbb{Z}$, entonces $y = kx$ para $x \in [k, k+1]$. Por ello

$$y' = k, \qquad x \in (k, k+1),$$

y en los puntos $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$f'_-(k) = k - 1, \qquad f'_+(k) = k. \ ▶$$

1.92. $y = \begin{cases} 1 - x, & x \leqslant 0, \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$

1.93. $y = \begin{cases} x & x < 0, \\ \ln(1 + x), & x \geqslant 0. \end{cases}$

1.94. $y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leqslant 1. \\ 1/e, & |x| > 1. \end{cases}$

1.95. $y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$.

1.96. $y = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \ldots (x - a_n)^{\alpha_n}$.

1.97. $y = a^{x^a}$. **1.98.** $y = (\log_x a)^x$.

1.99. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$. **1.100.** $y\ (1/x)^{1/x}$.

1.101. $y = \frac{\ln 3 \cdot \operatorname{sen} x + \cos x}{3^x}$.

1.102. $y = 3^{\frac{\operatorname{sen} ax}{\cos bx}} + \frac{1}{3} \frac{\operatorname{sen}^3 ax}{\cos^3 bx}$.

1.103. Demuéstrese que la derivada de una función par es una función impar, y la derivada de la función impar, una función par.

1.104. Demuéstrese que la derivada de una función periódica es también función períodica.

1.105*. Hállese $f'(x_0)$, si $f(x) = (x - x_0)\, \varphi(x)$, donde la función $\varphi(x)$ es continua en el punto x_0.

Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ unas funciones derivables. Hállense las derivadas de las siguientes funciones compuestas:

1.106. $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$.

1.107. $y = \operatorname{arctg} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

1.108. $y = \psi(x)^{\varphi(x)}$, $\psi(x) > 0$.

1.109. $y = \log_{\varphi(x)} \psi(x)$, $\varphi(x) > 0$, $\psi(x) > 0$, $\varphi(x) \neq 1$.

◀ Pasemos a los logaritmos naturales:

$$y = \log_{\varphi(x)} \psi(x) = \frac{\ln \psi(x)}{\ln \varphi(x)}.$$

De aquí hallamos

$$y' = \frac{\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)} \ln \varphi(x) - \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)} =$$

$$= \frac{1}{\ln \varphi(x)} \left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - y \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right). ▶$$

Sea $f(x)$ una función derivable arbitraria. Hállese y':

1.110. $y = f(\ln x)$. **1.111.** $y = \ln(f(x))$.

1.112. $y = f(e^x)e^{f(x)}$.

◀ Tenemos $y' = f'(e^x)\, e^x e^{f(x)} + f(e^x)\, e^{f(x)} f'(x) = e^{f(x)}(e^x f'(e^x) + f'(x) f(e^x))$. ▶

1.113. $y = f(f(x))$.

2. Derivación de las funciones definidas en forma implícita o paramétrica. Se dice que la función $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, viene dada *implícitamente* mediante la ecuación $F(x, y) = 0$, si para todo $x \in (a, b)$ se verifica

$$F(x, f(x)) = 0. \tag{3}$$

Con el fin de calcular la derivada de la función $y = f(x)$ se debe derivar la identidad (3) respecto de x (considerando el primer miembro como una función compuesta de x) y luego resolver la ecuación obtenida respecto de $f'(x)$.

EJEMPLO 5. La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ define implícitamente dos funciones en el intervalo $(-1, 1)$:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{1-x^2}, \\ y_2(x) &= -\sqrt{1-x^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Hállense sus derivadas sin emplear las expresiones explícitas (4).

◀ Sea $y(x)$ cualquiera de estas funciones. Entonces, derivando respecto de x la identidad

$$x^2 + y^2(x) = 1,$$

obtendremos

$$2x + 2y(x)\, y'(x) = 0.$$

De aquí

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)},$$

es decir,

$$y_1'(x) = -\frac{x}{y_1(x)} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

y

$$y_2'(x) = -\frac{x}{y_2(x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 6. Dedúzcase la regla de diferenciación de una función inversa.

◀ Si $x = f^{-1}(y)$, $y \in E$, es una función inversa de $y = f(x)$, $x \in D$, entonces para todo $y \in E$ se cumple la igualdad

$$f(f^{-1}(y)) - y = 0.$$

En otras palabras, la función inversa $x = f^{-1}(y)$ es una función definida implícitamente mediante la ecuación

$$f(x) - y = 0. \tag{5}$$

Para calcular la derivada de la función $x = f^{-1}(y)$ derivemos (5) respecto de y:

$$f'(x(y))\, x'(y) - 1 = 0,$$

de donde

$$x'(y) = \frac{1}{(r'(y))}. \blacktriangleright$$

Al tratar las funciones definidas implícitamente, así como las compuestas, se usarán, además, para designar la derivada, las denotaciones del tipo y_x' allí, donde es necesario precisar respecto a qué variable se realiza la diferenciación.

1.114. Hállese el valor de y_x' en el punto $x = 1$, si

$$x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0, \qquad y(1) = 1.$$

1.115. Hállese y_x' en el punto $(0, 1)$, si $e^y + xy = e$.

Hállese y_x' para las siguientes funciones definidas implícitamente:

1.116. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **1.117.** $x^4 + y^4 = x^2y^2$.

1.118. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $a > 0$. **1.119.** $2y \ln y = x$.

1.120. $e^x \operatorname{sen} y - e^y \cos x = 0$.

1.121. $\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy) = 0$. **1.122.** $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

1.123. $x - y = \operatorname{arcsen} x - \operatorname{arcsen} y$.

1.124. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.125. $xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. **1.126.** $x^y = y^x$.

1.127. $a^{\frac{x}{y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$.

1.128. Demuéstrese que la función y, definida mediante la ecuación $xy - \ln y = 1$, satisface también la ecuación $y^2 + (xy - 1)y' = 0$.

Hállense las derivadas de las funciones inversas a las dadas:

1.129. $y = \operatorname{sh} x$.

◀ Tenemos, por definición, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Puesto que $(\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces la función $\operatorname{sh} x$ es creciente monótona sobre todo el eje real y, por tanto, tiene su inversa designada por $\operatorname{arsh} x$. De acuerdo con la regla de diferenciación de la función inversa, obtenemos

$$x'_y = (\operatorname{arsh} y)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Por consiguiente, pasando a las designaciones habituales, tenemos

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}. \text{ ▶}$$

1.130*. $y = \operatorname{ch} x$. 1.131. $y = \operatorname{arcsen} 2^x$.

1.132. $y = 2x^2 - x$, $x \in (1/2, +\infty)$.

Sea $y = \alpha(x)$ una función inversa a la dada $y = f(x)$. Exprésese $\alpha'(x)$ en términos de x y $\alpha(x)$, si:

1.33. $y = x^x$.

◀ Teniendo presente que

$$(x^x)' = x^x (\ln x + 1),$$

obtenemos:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{x^x(\ln x + 1)} = \frac{1}{y(\ln \alpha(y) + 1)},$$

puesto que $x = \alpha(y)$. En las designaciones corrientes

$$\alpha'(x) = \frac{1}{x(\ln \alpha(x) + 1)}. \text{ ▶}$$

1.134. $y = x + e^x$. 1.135. $y = {}^1/_2\, x + x^3$.

1.136. $y = x + \log_2 x$. 1.137. $y = x \ln x$.

Sean dadas las funciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (\alpha, \beta). \tag{6}$$

Si en este caso $x = \varphi(t)$ tiene en el intervalo (α, β) su inversa $t = \varphi^{-1}(x)$, queda, pues, definida una nueva función

$$y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)), \tag{7}$$

llamada función *definida paramétricamente* por las correlaciones (6). Derivando (7) respecto de x y empleando la regla de derivación de la función inversa (ejemplo 6), obtenemos

$$y'_x = \psi'_t \cdot t'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{8}$$

EJEMPLO 7. Hállese y'_x, si

$$x = \cos^2 t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad t \in (0, \pi/2).$$

◀ Como $\psi'_t = \cos t$, $\varphi'_t = -2\cos t \operatorname{sen} t$, entonces, según la fórmula (8), hallamos

$$y'_x = \frac{1}{2 \operatorname{sen} t}. \ ▶$$

Hállense y'_x para las funciones dadas paramétricamente:

1.138. $x = 2t,\ y = 3t^2 - 5t,\ t \in (-\infty, +\infty)$.

1.139. $x = t^3 + 2,\ y = 0{,}5t^2,\ t \in (-\infty, +\infty)$.

1.140. $x = \dfrac{1}{t+1},\quad y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2,\quad t \neq -1$.

1.141. $x = 2^{-t},\ y = 2^{2t},\ t \in (-\infty, +\infty)$.

1.142. $x = a\cos\varphi,\ y = b \operatorname{sen}\varphi,\ \varphi \in (0, \pi)$.

1.143. $x = \operatorname{tg} t,\ y = \operatorname{sen} 2t + 2\cos 2t,\ t \in (-\pi/2, \pi/2)$.

1.144. $x = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad y = \operatorname{arcsen} \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},$

$t \in (0, +\infty)$.

1.145. $x = \ln(1 + t^2),\ y = t - \operatorname{arctg} t,\ t \in (0, +\infty)$.

1.146. $x = 3\log_2 \operatorname{ctg} t,\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t,\ t \in (0, \pi/2)$.

1.147. $x = \operatorname{arcsen}(t^2 - 1),\ y = \arccos 2t,\ t \in (0, \sqrt{2})$.

1.148. $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}},\quad y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}},$

$t \in (1, +\infty)$.

1.149. $x = a \operatorname{sh} t,\ y = b \operatorname{ch} t,\ t \in (0, +\infty)$.

Hállese y'_x en los puntos indicados:

1.150. $x = t\ln t,\quad y = \dfrac{\ln t}{t},\quad t = 1$.

1.151. $x = t(t\cos t - 2\operatorname{sen} t),$
$y = t(t \operatorname{sen} t + 2\cos t),$ $\quad t = \pi/4$.

1.152. $x = e^t \cos t,\ y = e^t \operatorname{sen} t,\ t = \pi/6$.

1.153. $x = \dfrac{3at}{1+t^2},\quad y = \dfrac{3at}{1+t^2},\quad t = 2$.

3. Derivadas de órdenes superiores. Se denomina *derivada de segundo orden* de la función $y = f(x)$ la derivada de su primera derivada, es decir,

$$y''(x) = (y'(x))'.$$

En general, se llama *derivada de n-ésimo orden* (o *n-ésima derivada*) la derivada de la derivada de orden $(n-1)$, es decir,

$$y^{(n)}(x) = (y^{(n-1)}(x))', \quad n = 2, 3, \ldots$$

Para la derivada de n-ésimo orden se usa también la designación $\frac{d^n y}{dx^n}$.

EJEMPLO 8. Hállese y'', si $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$,

◀ Tenemos $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Por consiguiente,

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = -\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}. \ ▶$$

Hállense las derivadas de segundo orden de las siguientes funciones:

1.154. $y = \cos^2 x$. **1.155.** $y = \operatorname{arctg} x^2$.

1.156. $y = \log_2 \sqrt[3]{1-x^2}$. **1.157.** $y = e^{-x^2}$.

1.158. $y = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$. **1.159*.** $y = x^{\sqrt{x}}$.

1.160. Hállense $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$ si $y(x) = e^{2x} \operatorname{sen} 3x$.

1.161. Hállese $y'''(2)$, si $y = \ln(x-1)$.

1.162. Hállese $y^{IV}(1)$, si $y = x^3 \ln x$.

1.163. Hállense $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, si $y = 2^{\operatorname{sen} x} \cos(\operatorname{sen} x)$.

Sea $f(u)$ una función derivable dos veces. Hállense y' e y'', si:

1.164. $y = f\left(\frac{1}{x^2}\right)$. **1.165.** $y = \ln f(e^x)$.

Sean $u(x)$ y $v(x)$ funciones derivables dos veces. Hállense y', y'', si:

1.166. $y = u^v$ $(u > 0)$.

◀ Tenemos $\ln y = v \ln u$. De aquí encontramos

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + \frac{v'}{u} u',$$

es decir,

$$y' = y\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right) = u^v\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right),$$

$$y'' = y'\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right) + y\left(v'' \ln u + \right.$$

$$+\frac{v'}{u}u'+\frac{v'u'u+vu''u-vu'^2}{u^2}\Big)=u^v\left(\left(v\frac{u'}{u}+v'\ln u\right)^2+\right.$$
$$\left.+v\frac{uu''-u'^2}{u^2}+\frac{2u'v'}{u}+v''\ln u\right). \blacktriangleright$$

1.167. $y=\sqrt{u^2+v^2}$. **1.168.** $y=\ln\frac{u}{v}$.

Hállese la fórmula para la n-ésima derivada de las funciones dadas:

1.169. $y=x^m$, $m\in\mathbb{N}$. **1.170.** $y=a^{kx}$, $k\in\mathbb{R}$.
1.171*. $y=\operatorname{sen} x$. **1.172.** $y=\ln x$.
1.173*. $y=\cos^2 x$. **1.174.** $y=\frac{1+x}{1-x}$.

Hállense las derivadas indicadas de las funciones dadas, empleando la descomposición en una combinación lineal de las funciones más sencillas:

1.175. $y=\frac{2x}{x^2-1}$, hállese $y^{(n)}$.

◀ Transformemos la expresión a la forma

$$y=\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

Puesto que

$$\left(\frac{1}{x\pm 1}\right)^{(n)}=(-1)^n\,n!\,\frac{1}{(x\pm 1)^{n+1}},$$

se tiene

$$y^{(n)}=(-1)^n\,n!\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right). \blacktriangleright$$

1.176. $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$, hállese $y^{(50)}$.

1.177*. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, hállese $y^{(20)}$.

Supongamos que $u(x)$ y $v(x)$ tienen derivadas de hasta n-ésimo orden inclusive. Entonces, para la derivada de n-ésimo orden de su producto $u(x)\,v(x)$ queda válida la *fórmula de Leibniz*

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\ldots$$
$$\ldots+uv^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},$$

donde $u^{(0)}=u$; $v^{(0)}=v$ y $C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ son unos coeficientes binomiales.

Hállense las derivadas de órdenes indicados de las funciones dadas, aplicando la fórmula de Leibniz:

1.178. $y=(x^2+x+1)\operatorname{sen} x$, hállese $y^{(15)}$.

1.179. $y=(x^2-x)e^x$, hállese $y^{(20)}$.

1.180.* $y=\operatorname{sen} x\cdot e^{-x}$, hállese $y^{(5)}$.

1.181. $y=x\log_2 x$, hállese $y^{(10)}$.

1.182. $y=x\operatorname{sh} x$, hállese $y^{(100)}$.

1.183*. Muéstrese que

$$(e^{ax}\cos bx)^{(n)}=r^n e^{ax}\cos(bx+n\varphi),$$

donde $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$.

1.184. Demuéstrese que $(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)}=(-1)^n\frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$.

1.185. Calcúlese el valor de la n-ésima derivada de la función $y=\frac{3x+2}{x^2-2x+5}$ en el punto $x=0$.

◀ Tenemos, según la condición, que

$$y(x)(x^2-2x+5)=3x+2.$$

Derivemos esta identidad n veces aplicando la fórmula de Leibniz. En este caso (para $n\geqslant 2$) obtendremos

$$y^{(n)}(x)(x^2-2x+5)+ny^{(n-1)}(2x-2)+\frac{n(n-1)}{2}y^{(n-2)}(x)\cdot 2=0,$$

de donde para $x=0$

$$5y^{(n)}(0)-2ny^{(n-1)}(0)+n(n-1)y^{(n-2)}(0)=0,$$

o bien

$$y^{(n)}(0)=\frac{2}{5}ny^{(n-1)}(0)-\frac{n(n-1)}{5}y^{(n-2)}(0).$$

Se ha obtenido una fórmula recurrente para determinar la n-ésima derivada en el punto $x=0$ ($n\geqslant 2$). Los valores de $y(0)$ e $y'(0)$ los hallamos directamente:

$$y(0)=\frac{2}{5},\quad y'(0)=\left.\frac{-3x^2-4x+19}{(x^2-2x+5)^2}\right|_{x=0}=\frac{19}{25}.$$

A continuación, suponiendo sucesivamente $n=2, 3, 4, \ldots$, obtendremos, con ayuda de la fórmula recurrente, los valores de las derivadas de órdenes superiores.

Por ejemplo,

$$y''(0)=\frac{2}{5}\cdot 2\cdot \frac{19}{25}-\frac{2\cdot 1}{5}\cdot \frac{2}{5}=\frac{56}{125},$$

$$y'''(0)=\frac{2}{5}\cdot 3\cdot \frac{56}{125}-\frac{3\cdot 2}{5}\cdot \frac{19}{25}=-\frac{234}{625}. \blacktriangleright$$

Aplicando el método descrito en el problema 1.185, hállese la derivada de cuarto orden en el punto $x=0$ de la función dada:

1.186. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$. **1.187.** $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

1.188. Muéstrese que la función $y=\arcsen x$ satisface la ecuación diferencial $(1-x^2)\,y''=xy'$.

1.189. Muéstrese que la función $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+e^x$ satisface la ecuación diferencial $y''-4y'+4y=e^x$.

1.190. Muéstrese que la función $y=e^{-x}\cos x$ satisface la ecuación diferencial $y^{(\mathrm{IV})}+4y=0$.

1.191. Muéstrese que la función $y=x^n(\cos(\ln x)+\operatorname{sen}(\ln x))$ satisface la ecuación diferencial $x^2y''+(1-2n)xy'+(1+n^2)y=0$.

En los problemas 1.192—1.196 hállense las derivadas de segundo orden de las funciones dadas implícitamente:

1.192. $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$, $a>0$.

◀ Diferenciando la ecuación que define la función $y(x)$, obtenemos:

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\cdot\frac{y'x-y}{x^2+y^2}=\frac{y'x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

De aquí

$$x+yy'=xy'-y \tag{9}$$

y, por consiguiente,

$$y'=\frac{x+y}{x-y}. \tag{10}$$

Al diferenciar (9) y usar la expresión (10), hallada para y', obtenemos

$$y''=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}. \blacktriangleright$$

1.193. $y^2=2px$. **1.194.** $y=1+xe^y$.

1.195. $y=\operatorname{tg}(x+y)$. **1.196.** $e^{x-y}=xy$.

1.197. Dedúzcase la fórmula para la segunda derivada de la función inversa respecto a la función dada $y=f(x)$.

1.198. Demuéstrese que si $(a + bx)e^{y/x} = x$, entonces $x^3y'' = (xy' - y)^2$.

Hállense las derivadas de segundo orden de las siguientes funciones dadas paramétricamente:

1.199. $x = \ln t, \quad y = t^3, \; t \in (0, +\infty)$.

◀ Tenemos

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = 3t^3$$

y

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{9t^2}{1/t} = 9t^3.$$

Observemos que en el caso dado el parámetro t es fácil eliminarlo de las ecuaciones dadas, suponiendo $t = e^x$. Por consiguiente, la expresión para y''_{xx} como función de x tiene la forma $y''_{xx} = 9e^{3x}$. ▶

En el caso general, si $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, se calcula y''_{xx} según la fórmula

$$y''_{xx} = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi'(t) & \psi'(t) \\ \varphi''(t) & \psi''(t) \end{vmatrix}}{(\varphi'(t))^3}.$$

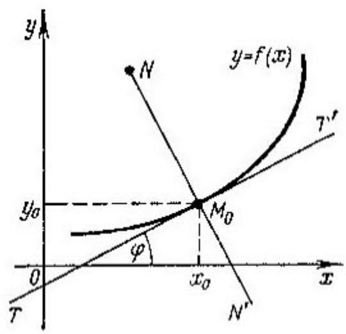


Fig. 46

1.200. $x = \sec t$, $y = \operatorname{tg} t$, $t \in (0, \pi/2)$.

1.201. $x = \operatorname{arcsen} t, y = \ln(1 - t^2), t \in (-1, 1)$.

1.202. $x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \ln(1 + t^2), \quad t \in (-\infty, +\infty)$.

1.203. $x = a\cos^3 t, \; y = a \operatorname{sen}^3 t, \; t \in (0, \pi/2)$.

1.204. Muéstrese que la función $y(x)$, dada paramétricamente mediante las ecuaciones $x = \operatorname{sen} t$, $y = ae^{t\sqrt{2}} + be^{-t\sqrt{2}}$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, satisface la ecuación diferencial $(1 - x^2)y''_{xx} - xy'_x = 2y$, cualesquiera que sean las constantes a y b.

4. Aplicaciones geométricas y mecánicas de la derivada. El valor de la derivada $f'(x_0)$ de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 es igual al coeficiente angular (la pendiente) $k = \operatorname{tg}\varphi$ de la tangente TT' a la gráfica de esta función trazada por el punto $M_0(x_0, y_0)$, donde $y_0 = f(x_0)$ (fig. 46) (*significado geométrico de la derivada*).

La ecuación *de la tangente* TT' a la gráfica de la función $y = f(x)$ en su punto $M_0(x_0, y_0)$ tiene la forma

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

La recta NN' que pasa por el punto de tangencia M_0 perpendicularmente a la tangente se denomina *normal* a la gráfica de la función $y = f(x)$ en este punto. La ecuación de la normal es

$$(x - x_0) + f'(x_0)(y - y_0) = 0.$$

Escríbanse las ecuaciones de la tangente y de la normal a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto dado, si:

1.205. $y = x^2 - 5x + 4$, $x_0 = -1$.

1.206. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $x_0 = -2$.

1.207. $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

1.208. $y = \operatorname{tg} 2x$, $x_0 = 0$.

1.209. $y = \ln x$, $x_0 = 1$.

1.210. $y = e^{1-x^2}$, $x_0 = -1$.

1.211. Escríbanse las ecuaciones de la tangente y de la normal en el punto $M_0(2, 2)$ a la curva $x = \frac{1+t}{t^3}$, $y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}$, $t \neq 0$.

1.212. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la curva

$$x = t\cos t, \qquad y = t\operatorname{sen} t, \qquad t \in (-\infty, +\infty)$$

en el origen de coordenadas y en el punto $t = \pi/4$.

1.213. Escríbanse las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ en el punto de ordenada $y_0 = 3$.

1.214. Escríbanse la ecuación de la tangente a la curva $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ en el punto $M_0(1, 1)$.

1.215. ¿Bajo qué ángulo la gráfica de la función $y = e^{x/2}$ corta la recta $x = 2$?

1.216. ¿En qué punto M_0 de la curva $y^2 = 2x^3$ la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$?

1.217. Hállense los coeficientes b y c en la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ que toca la recta $y = x$ en el punto $M_0(1, 1)$.

1.218. Muéstrese que las tangentes a la hipérbola $y = \frac{x-4}{x-2}$ en los puntos de su intersección con los ejes coordenados son paralelas entre sí.

1.219. Fórmese la ecuación de la normal a la gráfica de la función $y = -\sqrt{x} + 2$ en el punto de intersección con la bisectriz del primer ángulo coordenado.

1.220. Fórmese la ecuación de tal normal a la parábola $y = x^2 - 6x + 6$ que sea perpendicular a una recta que une el origen de coordenadas con el vértice de la parábola.

1.221. En los puntos de intersección de la recta $x - y + 1 = 0$ con la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ están trazadas las normales a la parábola citada. Hállese el área del triángulo formado por las normales y una cuerda que une los puntos de intersección mencionados.

1.222. Muéstrese que las normales a la desarrollante de la circunferencia $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$ son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

Se llama ángulo ω *entre las curvas* $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ en su punto común $M_0(x_0, y_0)$ un ángulo formado por las tangentes a dichas curvas en el punto M_0.

1.223. Demuéstrese que

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}.$$

Hállense los ángulos bajo los cuales se cortan las curvas dadas:

1.224. $y = x^2$ e $y = x^3$.

1.225. $y = (x - 2)^2$ e $y = 4x - x^2 + 4$.

1.226. $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$.

1.227. $x^2 + y^2 = 8ax$ e $y^2 = \frac{x}{2a - x}$.

1.228. Demuéstrese que la suma de los segmentos que se obtienen al cortar la tangente a la curva $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ en los ejes de coordenadas es igual a a para todos los puntos de la curva.

1.229. Muéstrese que un segmento de la tangente a la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, comprendido entre los ejes de coordenadas, es de longitud constante igual a a.

1.230. Hállese la distancia entre el origen de coordenadas y la normal a la línea $y = e^{2x} + x^2$, trazada en el punto de abscisa $x = 0$.

1.231. Demuéstrese que el segmento de una tangente a la tractriz

$$y = \frac{a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2},$$

comprendido entre el eje de coordenadas y el punto de tangencia, es de longitud constante.

Si una curva viene dada en las coordenadas polares por la ecuación $r = r(\varphi)$, el ángulo θ, formado por la tangente TT' y el radio vector $\overline{OM}$ del punto de tangencia M (fig. 47), se determina por la relación

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r(\varphi)}{r'_{\varphi}}. \qquad (12)$$

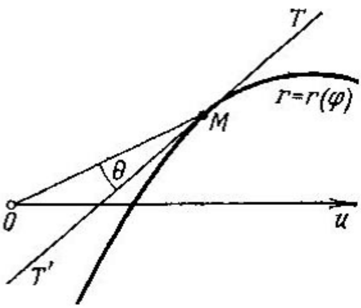


Fig. 47

1.232.** Dedúzcase la fórmula (12).

1.233. Hállese el ángulo θ entre la tangente y el radio vector del punto de tangencia para la espiral logarítmica $r = ae^{k\varphi}$.

1.234. Hállese el ángulo θ formado por la tangente y el radio vector del punto de tangencia para la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Si $x = x(t)$ es una función que describe la ley del movimiento de un punto material, entonces la primera derivada $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ representa la velocidad y la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2} = \ddot{x}$ es la aceleración de este punto en un instante de tiempo t (*sentido mecánico de las derivadas primera y segunda*).

1.235. La ley del movimiento de un punto material por una recta tiene la forma $x = 1/4t^4 - 4t^3 + 16t^2$.

a) ¿En qué instantes de tiempo el punto se encuentra en el origen de coordenadas?

b) ¿En qué instantes de tiempo la dirección de su movimiento coincide con la orientación positiva del eje Ox?

c) ¿En qué instantes de tiempo su aceleración es nula?

1.236. Hállese la velocidad de una oscilación armónica de amplitud a, frecuencia ω y fase inicial $\varphi = 0$.

1.237. Un cuerpo de masa 4 se desplaza rectilíneamente según la ley $x = t^2 + t + 1$. Hállese la energía cinética del cuerpo en el instante $t = 5$.

1.238. ¿En qué instante de tiempo $t \in [0, 2\pi]$ se debe parar el efecto de las fuerzas para que un punto que participa en la oscilación armónica $x = \cos 3t$ siga moviéndose uniformemente a la velocidad $v = {}^3/_2$.

1.239. Un punto se desplaza por una espiral logarítmica $r = e^{a\varphi}$. Hállese la velocidad de variación del radio polar, si se sabe que éste gira a la velocidad constante ω.

1.240. Un punto se mueve por una circunferencia $r = 2a \cos \varphi$. Hállese la velocidad de variación de la abscisa y ordenada del punto, si el radio polar gira a la velocidad angular ω.

1.241. ¿En qué punto de la elipse $16x^2 + 9y^2 = 400$ la ordenada va decreciendo a la misma velocidad a la que crece la abscisa?

1.242. El radio de una bola varía a la velocidad v. ¿A qué velocidad varían el volumen y la superficie de la bola?

1.243. Una rueda gira de modo tal que el ángulo de rotación es proporcional al cuadrado del tiempo. La primera vuelta de la rueda se ha realizado durante un lapso de tiempo $T = 8$ segundos. Hállese la velocidad angular ω en el instante de tiempo $t = 32s$ después de comenzar el movimiento.

§ 2. Diferencial

1. Diferencial de primer orden. Una función $y = f(x)$ se llama *derivable* en el punto x_0, si su incremento $\Delta y(x_0, \Delta x)$ puede representarse en la forma

$$\Delta y(x_0, \Delta x) = A\,\Delta x + o(\Delta x). \tag{1}$$

La parte lineal principal $A\,\Delta x$ del incremento Δy lleva el nombre de *diferencial* de esta función en el punto x_0, correspondiente al incremento Δx, y se designa por el símbolo $dy(x_0, \Delta x)$.

Para que la función $y = f(x)$ sea derivable en el punto x_0, es necesario y suficiente que exista la derivada $f'(x_0)$; en este caso se verifica la igualdad $A = f'(x_0)$.

Esta afirmación permite llamar derivable toda función que tiene derivada. Precisamente en este sentido hemos usado esta expresión en el § 1.

La expresión para una diferencial tiene la forma

$$dy(x_0, dx) = f'(x_0)\,dx,$$

donde se ha adoptado la designación $dx = \Delta x$. De la fórmula (1) se deduce que, si $f'(x_0) \neq 0$, entonces para $\Delta x \to 0$ el incremento de la función y su diferencial dy en un punto fijo serán unos infenitésimos equivalentes, lo que permite anotar la igualdad aproximada:

$$\Delta y \approx dy \text{ para } |\Delta x| \ll 1. \tag{2}$$

Ejemplo 1. Hállese el valor aproximado del volumen V de una bola cuyo radio es $r = 1{,}02$ m.

◀ Puesto que $V(r) = \frac{3}{4}\pi r^3$, entonces, suponiendo $r_0 = 1$, $\Delta r = 0{,}02$ y haciendo uso de la fórmula (2), obtenemos:

$$V(1{,}02) = V(1) + \Delta V(1,\ 0{,}02) \approx V(1) - V'(1)\cdot 0{,}02 =$$
$$= \frac{4}{3}\pi + 4\pi\cdot 0{,}02 \approx 4{,}43\ m^3. \ ▶$$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE LA DIFERENCIAL. La diferencial $dy(x_0, \Delta x)$ es igual al incremento de la ordenada de la tangente TT' a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $M_0(x_0, y_0)$ correspondiente al incremento del argumento igual a Δx (fig. 48).

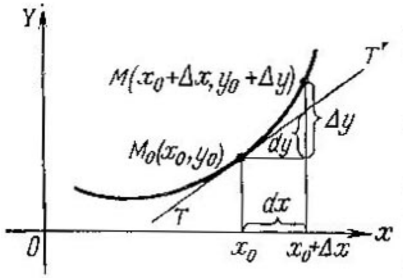


Fig. 48

2.1. Demuéstrese que para una función lineal $y = ax + b$ el incremento Δy y la diferencial dy coinciden.

2.2. Hállense el incremento Δy y la diferencial dy de la función $y = x^3$, correspondientes al valor del argumento $x_0 = 2$ y a dos incrementos distintos del argumento $(\Delta x)_1 = 0{,}1$ y $(\Delta x)_2 = 0{,}01$.

2.3. Hállense el incremento ΔS y la diferencial dS del área S de un cuadrado, correspondientes al incremento Δx del lado x. Con ayuda de la figura interprétese geométricamente ΔS, dS y la diferencia $\Delta S - dS$.

2.4. Un punto material M se mueve rectilíneamente siguiendo la ley $s = f(t)$, donde t es un momento de tiempo y s es el trayecto recorrido durante el lapso de tiempo de 0 hasta t. Dése una interpretación mecánica de la diferencial del trayecto ds, correspondiente al intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

2.5. Haciendo uso del resultado del problema anterior y de la fórmula (2), hállese aproximadamente el trayecto Δs recorrido por el punto M durante un intervalo de tiempo de $t_1 = 3$ hasta $t_2 = 4$, si la ley del movimiento del punto M está dada por la fórmula $s = 1 + \operatorname{arctg} t$. Compárese la respuesta con el valor exacto de Δs.

2.6. Para las funciones: a) $f(x) = x^n$ y b) $\varphi(x) = \operatorname{sen} x$ hállense los valores del argumento x, para los cuales las diferenciales de estas funciones no son equivalentes a sus incrementos cuando $\Delta x \to 0$.

2.7. Sea dado un segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$ de variación del argumento x de la función $y = f(x)$; Δy y dy son el incremento y la diferencial correspondientes de la función y. ¿Serán posibles las igualdades: a) $dy = \frac{3}{2}\Delta y$, b) $dy = \Delta y$, c) $dy = \frac{1}{2}\Delta y$ sobre todo el segmento?

2.8. Las aristas de un cubo han sido aumentadas en 1 cm. La diferencial dV del volumen V del cubo resultó ser igual a 12 cm³. Hállese la longitud inicial de las aristas.

2.9. El radio de un círculo ha sido aumentado en 1 cm. La diferencial del área del círculo resultó ser igual a 6π cm². Hállese el valor original del radio.

Hállense las diferenciales de las funciones que vienen más abajo para los valores arbitrarios del argumento x y para su incremento arbitrario $\Delta x = dx$:

2.10. $x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} - 5$.

2.11. $\operatorname{sen} x - x \cos x + 4$.

2.12. $x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2}$. **2.13.** $x \ln x - x + 1$.

2.14. $x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} - 3$. **2.15.** $y^5 + y - x^2 = 1$.

2.16. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. **2.17.** $e^y = x + y$.

En los problemas 2.18—2.22 realícense los cálculos aproximados que se prescriben, recurriendo al cambio del incremento Δy de la función conveniente $y = f(x)$ por la diferencial dy de esta función, siendo pequeño el valor absoluto del incremento Δx del argumento x.

2.18. Calcúlense aproximadamente: a) arcsen 0,05; b) b) arctg 1,04; c) ln 1,2.

2.19. Arguméntese la fórmula aproximada

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

y calcúlese, según esta fórmula, $\sqrt[3]{25}$.

2.20. Hállese el valor aproximado de la función $f(x) = e^{x^2 - x}$ para $x = 1,2$.

2.21*. Hállese la expresión aproximada para el incremento ΔV del volumen V de un cilindro circular recto de altura h, cuando el radio r de la base varía en una magnitud Δr.

2.22*. Según la ley de Clapeyron, el volumen V, ocupado por un gas, la presión del gas p y la temperatura absoluta T están ligados mediante la fórmula $pV = RT$, donde R es la constante de los gases. Hállese la expresión aproximada para el incremento ΔV del volumen V, cuando la presión p varía en la magnitud Δp, considerando invariable la temperatura T.

2. Diferenciales de órdenes superiores. Examinemos la diferencial $dy(x, \Delta_1 x) = f'(x)\,\Delta_1 x$ como función de x para $\Delta x = \Delta_1 x$ fijo. Suponiendo que la función $y = f(x)$ es dos veces derivable en el punto x, hallemos la diferencial de $dy(x, \Delta_1 x)$ para $\Delta x = \Delta_2 x$:

$$d(dy(x, \Delta_1 x))\big|_{x,\,\Delta x=\Delta_2 x} = f''(x)\,\Delta_1 x \Delta_2 x.$$

El valor de la expresión obtenida para $\Delta_1 x = \Delta_2 x = dx$ recibe el nombre de *segunda diferencial* o diferencial de 2do orden de la función $y = f(x)$ y se denota mediante el símbolo $d^2y(x, dx)$.

De este modo,

$$d^2y = f''(x)\,dx^2.$$

Análogamente

$$d^3y = d(d^2y) = f'''(x)\,dx^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Hállense las diferenciales de 2do orden de las funciones del argumento x que vienen más abajo:

2.23. $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$. **2.24.** $y = 3^{-x}$.

2.25. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. **2.26.** $y = ax^2 + bx + c$.

2.27. $xy + y^2 = 1$. **2.28.** $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

2.29. $x^3 + y^3 = y$. **2.30.** $x = y - a \operatorname{sen} y$.

§ 3. Teoremas de las funciones derivables. Fórmula de Taylor.

1. Teoremas del valor medio.

TEOREMA DE ROLLE. *Si una función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, derivable para $x \in (a, b)$ y $f(a) = f(b)$, entonces existe por lo menos un punto $\zeta \in (a, b)$ tal que $f'(\zeta) = 0$.*

Los puntos en los que $f'(x) = 0$ se denominan *puntos estacionarios* de la función $f(x)$.

TEOREMA DE LAGRANGE. *Si una función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ y derivable para $x \in (a, b)$, entonces existe por lo menos un punto $\xi \in (a, b)$ tal que se verifica*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\cdot(b - a) \quad (\textit{fórmula de Lagrange}).$$

TEOREMA DE CAUCHY. *Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el segmento $[a, b]$, derivables cuando $x \in (a, b)$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces existe por lo menos un punto $\xi \in (a, b)$ tal que se verifica*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \text{ (\textit{fórmula de Cauchy}).}$$

3.1. La función $f(x) = \frac{5-x^2}{x^4}$ tiene en los extremos del segmento $[-1, 1]$ valores iguales (¡compruébese!). Su derivada $f'(x)$ es igual a cero sólo en dos puntos $x = \pm\sqrt{10}$ (¡compruébese!), situados fuera de los límites de dicho segmento. ¿Cuál es la razón por la que se viola la conclusión del teorema de Rolle?

3.2. Muéstrese que la función $f(x) = x^2 - 1$ en el segmento $[-1, 1]$ satisface las condiciones del teorema de Rolle. Hállense todos los puntos estacionarios de esta función.

3.3. Sea $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. Demuéstrese que todas las tres raíces de la ecuación $f'(x) = 0$ son reales.

3.4*. Demuéstrese que la ecuación $16x^4 - 64x + 31 = 0$ no puede tener dos raíces reales distintas en el intervalo $(0, 1)$.

3.5*. Demuéstrese que la ecuación $e^{x-1} + x - 2$ que cuenta con una raíz $x = 1$ (¡compruébese!) no tiene otras raíces reales.

3.6*. Demuéstrese que si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), entonces la función $F(x) = (f(x) - f(a))(b-a) - (f(b) - f(a)) \times \times (x-a)$ tiene por lo menos un punto estacionario en el intervalo (a, b).

3.7. Habiendo escrito la fórmula de Lagrange para la función $f(x) = \sqrt{3x^3} + 3x$ en el segmento $[0, 1]$, hállese en el intervalo $(0, 1)$ el valor correspondiente de ξ.

3.8. Demuéstrese que si la derivada $f'(x)$ es idénticamente igual a cero en el intervalo (a, b), la función $f(x)$ es constante en dicho intervalo.

3.9. Demuéstrese que si $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) en el intervalo (a, b), la función $f(x)$ es monótona creciente (monótona decreciente) en dicho intervalo.

La función $f(x)$ satisface la *condición de Lipschitz* en el intervalo (a, b), si existe tal K que

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant K \cdot |x_2 - x_1|$$

para cualesquiera $x_1, x_2 \in (a, b)$.

3.10. Demuéstrese que si $\sup\limits_{a<x<b} f'(x) = M$, la función $f(x)$ satisface en el intervalo (a, b) la condición de Lipschitz con una constante K igual a M.

3.11*. Sean $f(x)$ y $\varphi(x)$ dos veces derivables en el intervalo (a, b). Demuéstrese que si $f''(x) = \varphi''(x)$ en (a, b), entonces $f(x)$ y $\varphi(x)$ se diferencian en un sumando lineal.

3.12. Demuéstrese que si una función $f(x)$ satisface las condiciones del teorema de Lagrange en $[a, b]$, entonces $|f(b) - f(a)| \geqslant m\cdot(b - a)$, donde $m = \inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f'(x)$.

3.13. Al escribir la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ y $g(x) = x^2 + 4$ en el segmento $[0, 2]$, hállense los valores de ξ.

2. Regla de L'Hospital—Bernoulli. *Cálculo del límite de indeterminaciones del tipo* $\frac{0}{0}$ *y* $\frac{\infty}{\infty}$. Supongamos que para $x \to a$ las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son ambas infenitésimos o bien infinitamente grandes. En este caso su razón no está determinada en el punto $x = a$ y se dice que representa una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, ó, correspondientemente, $\frac{\infty}{\infty}$. Sin embargo, dicha razón puede tener un límite en el punto $x = a$, finito o infinito. El proceso de búsqueda de este límite se denomina cálculo del límite de la indeterminación. La regla de L'Hospital—Bernoulli, que se basa en el teorema siguiente que lleva sus nombres, constituye uno de los métodos para calcular el límite de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$.

TEOREMA. *Supongamos que en cierto entorno U del punto $x = a$ las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son derivables en todo punto, a excepción, quizás, del mismo punto $x = a$, y sea $\varphi'(x) \neq 0$ en U. Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son simultáneamente bien infinitésimos o bien infinitamente grandes para $x \to a$, y existe, además, un límite de la razón $\frac{f(x)}{\varphi'(x)}$ de sus derivadas para $x \to a$, entonces existe también un límite de la razón $\frac{f'(x)}{\varphi(x)}$ entre las mismas funciones, con la particularidad de que*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{1}$$

La regla puede aplicarse también en el caso cuando $a = \infty$.

EJEMPLO 1. Hállese $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^{2x}-1}{\operatorname{arctg} 5x}$ (es decir, calcúlese el límite de la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$).

◀ Haciendo uso de la fórmula (1), obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\operatorname{arctg} 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\frac{1}{1+25x^2}} = \frac{2}{5},$$

puesto que $e^{2x} \to 1$ y $\frac{1}{1+25x^2} \to 1$ para $x \to 0$. ▶

En algunos casos el cálculo del límite de las indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ puede exigir que se aplique reiteradamente la regla de L'Hospital—Bernoulli.

Ejemplo 2. Hállese $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3}$ (es decir, calcúlese el límite de la indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$).

◀ Aplicando dos veces la fórmula (1), obtenemos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2\ln x}{x}}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \frac{2}{3} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = 0. \ ▶$$

En cada etapa de la aplicación de la regla de L'Hospital—Bernoulli se deben emplear las transformaciones idénticas que simplifican la razón y combinar también dicha regla con otros procedimientos cualesquiera del cálculo de límites.

Ejemplo 3. Hállese $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ (es decir, calcúlese el límite de la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$).

Hagamos uso de la fórmula (1):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x^2 \cos^2 x}.$$

Suprimamos en el denominador de la fracción el factor $\cos^2 x$, puesto que tiene el límite 1 cuando $x \to 0$. Desarrollemos la diferencia de los cubos en el numerador y liberemos éste del factor $(1 + \cos x + \cos^2 x)$ que tiene el límite 3 cuando $x \to 0$. Realizadas dichas simplificaciones, obtendremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Apliquemos de nuevo (1):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x}.$$

Haciendo uso del primer límite notable, obtenemos la respuesta definitiva 1/2, sin recurrir ya otra vez a la regla de L'Hospital—Bernoulli. ▶

Calcúlense los límites de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$:

3.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$. **3.15.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$. **3.17.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x}-1}$. **3.19.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{tg} x}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. **3.21.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\operatorname{sen}^2 5x}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{ctg} x-1}{\operatorname{sen} 4x}$ **3.23.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^m}$, $m>0$. **3.25.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\operatorname{sen} x}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$. **3.27.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-3)}{\ln(e^{x}-e^{3})}$.

3.28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

Cálculo de los límites de las indeterminaciones del tipo $0\cdot\infty$ y $\infty-\infty$. Con el fin de calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)\,\varphi(x)$, donde $f(x)$ es un infinitésimo y $\varphi(x)$ es infinitamente grande para $x\to a$ (cálculo del límite de la indeterminación del tipo $0\cdot\infty$) se debe transformar el producto a la forma $\dfrac{f(x)}{1/\varphi(x)}$ (una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$) o bien a la forma $\dfrac{\varphi(x)}{1/f(x)}$ (una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$) y emplear a continuación la regla de L'Hospital—Bernoulli.

Ejemplo 4. Hállese $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{sen}(x-1)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ (calcúlese el límite de la indeterminación del tipo $0\cdot\infty$).

◀ Tenemos: $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{sen}(x-1)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{2}}} = -\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\cos(x-1)\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{2} = -\frac{2}{\pi}. \blacktriangleright$$

Con el fin de calcular el $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))$, donde $f(x)$ y $\varphi(x)$ son infinitamente grandes cuando $x\to a$ (cálculo del límite de una indeterminación del tipo $\infty-\infty$), se debe transformar la diferencia a la forma $f(x)\left(1-\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right)$; calcular después el límite de la indeterminación $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Si $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)} \neq 1$, entonces $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))=\infty$. Si, en cambio, $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=1$, obtenemos una indeterminación del tipo $\infty\cdot 0$, analizada más arriba.

EJEMPLO 5. Hállese $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x)$ (calcúlese el límite de la indeterminación del tipo $\infty-\infty$).

◀ Tenemos:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln^3 x}{x}\right).$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3 x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}}{1} = 3\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x} =$$

$$= 3\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1} = 6\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 6\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 6\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0,$$

entonces

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x) = +\infty. \blacktriangleright$$

Calcúlese el límite de indeterminaciones del tipo $0\cdot\infty$, o bien $\infty-\infty$:

3.29. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-e^{-x}-2)\operatorname{ctg} x$. **3.30.** $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{1/x^2}$.

3.31. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{ctg}\pi(x-1)$. **3.32.** $\lim\limits_{x\to\infty} x\operatorname{sen}\frac{a}{x}$.

3.33. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)$. **3.34.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$.

3.35. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

3.36. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$.

3.37. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

3.38. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

Cálculo del límite de indeterminaciones del tipo 0^0, ∞^0, 1^∞. En todos los tres casos se tiene en cuenta el cálculo del límite de la expresión $(f(x))^{\varphi(x)}$, donde $f(x)$ es un infinitésimo en el primer caso, infinitamente grande en el segundo y una función que tiene un límite igual a la unidad, en el tercero. En cuanto a $\varphi(x)$, será un infinitésimo en los primeros dos casos e infinitamente grande en el tercer caso.

Procedamos del modo siguiente. Aplicando primeramente los logaritmos $y=(f(x))^{\varphi(x)}$, obtenemos la igualdad

$$\ln y=\varphi(x)\ln f(x) \tag{2}$$

y hallamos el límite de $\ln y$, después de lo cual se encuentra también el límite de y. En todos los tres casos $\ln y$ es, en virtud de (2), una indeterminación del tipo $0\cdot\infty$ (compruébese) y el método para calcular su límite se ha expuesto más arriba.

Ejemplo 6. Hállese el $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ (calcúlese el límite de una indeterminación del tipo 1^∞).

◀ Introduzcamos la designación $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$. Entonces $\ln y=2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ será una indeterminación del tipo $\infty\cdot 0$. Transformando la expresión $\ln y$ a la forma $\ln y=2\,\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{1/x}$, hallamos, rigiéndonos por la regla de L'Hospital—Bernoulli

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=2\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=2.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=e^2.\ ▶$$

Calcúlese el límite de indeterminaciones del tipo 0^0, ∞^0, 1^∞:

3.39. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$ **3.40.** $\lim\limits_{x\to 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$.

3.41. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi-2x)^{\cos x}$ **3.42.** $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

3.43. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$. **3.44.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2^x)^{1/x}$.

3.45. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{1/\ln x}$. **3.46.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

3.47. $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$. **3.48.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$.

3.49. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$. **3.50.** $\lim\limits_{x\to 0} (e^x+x)^{1/x}$.

3. **Fórmula de Taylor.** Si la función $y = f(x)$ tiene derivadas hasta el orden $(n+1)$ inclusive en cierto entorno $U_\delta(a) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$ del punto a, entonces para todo $x \in U_\delta(a)$ queda válida la *fórmula de Taylor* (de orden n)

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n+1}+R_{n+1}(x),$$

donde

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad 0<\theta<1$$

(término residual en la *forma de Lagrange*). De este modo, la fórmula de Taylor de orden n permite representar la función $y = f(x)$ como una suma del polinomio de n-ésimo grado y del término residual.

En particular, cuando $a = 0$, tenemos

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0<\theta<1$$

(*fórmula de Maclaurin*).

3.51. Desarróllese el polinomio $2x^3-3x^2+5x+1$ en potencias del binomio $x+1$.

3.52. Para el polinomio $x^4 + 4x^2 - x + 3$ escríbase la fórmula de Taylor de segundo orden en el punto $a = 1$. Escríbase el término residual en la forma de Lagrange y hállese el valor de θ correspondiente a los siguientes valores del argumento: a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x = 2$.

3.53. Sea $P(x)$ un polinomio de cuarto grado, $P(2) = -1$, $P'(2) = 0$, $P''(2) = 2$, $P'''(2) = -12$, $P^{IV}(2) = -24$. Calcúlense $P(-1)$, $P'(0)$ y $P''(1)$.

Escríbase la fórmula de Maclaurin de n-ésimo orden para las funciones dadas:

3.54. $y = e^x$. **3.55.** $y = \operatorname{sen} x$. **3.56.** $y = \cos x$.

3.57. $y = \ln(1 + x)$. **3.58*.** $y = \operatorname{arctg} x$.

3.59. $y = (1 + x)^{\alpha}$.

3.60. Escríbase la fórmula de Taylor de tercer orden para la función $y = \dfrac{x}{x-1}$ en el punto $a = 2$. Constrúyanse las gráficas de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

3.61. Escríbase la fórmula de Taylor de segundo orden para la función $y = \operatorname{tg} x$ en el punto $a = 0$. Constrúyanse las gráficas de la función dada y de su polinomio de Taylor de segundo grado.

3.62. Escríbase la fórmula de Taylor de tercer orden para la función $y = \arcsen x$ en el punto $a = 0$. Constrúyanse las gráficas de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

3.63. Escríbase la fórmula de Taylor de tercer orden para la función $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en el punto $a = 1$. Constrúyanse las gráficas de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

La fórmula de Taylor se usa ampliamente para calcular los valores de las funciones con un grado de precisión dado. Supongamos, por ejemplo, que se pide calcular el valor de la función $f(x)$ en el punto x_0 con un error absoluto no superior a ε, si se conocen el valor de esta función y de sus derivadas en el punto a. De la fórmula de Taylor se deduce que

$$f(x_0) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x_0 - a) + \ldots + \frac{f^{n_0}(a)}{n_0!}(x_0 - a)^{n_0},$$

donde n_0 es el mínimo de los números n, para los cuales

$$|R_{n+1}(x_0)| < \varepsilon.$$

EJEMPLO 7. Calcúlese el número e con un error absoluto no superior a 0,001.

◀ Aplicando la fórmula de Maclaurin a la función $f(x) = e^x$, tenemos

$$e = f(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

El valor mínimo de n que satisface la condición $\frac{e^\theta}{(n+1)!} < 0{,}0001$, donde $0 < \theta < 1$, es igual a $n_0 = 6$. Por consiguiente,

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{6!} = 2{,}718. \ ▶$$

3.64. Calcúlense con un error absoluto no superior a 0,001 los valores aproximados de los siguientes números:

a) sen 1; b) $\sqrt{e}$; c) ln 1,05; d) $\sqrt[5]{33}$.

3.65. Aclárese el origen de las fórmulas aproximadas:

a) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2, \quad |x| < 1;$

b) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 \ |x| < 1$

y evalúese su error.

El término residual en la fórmula de Taylor puede escribirse en la *forma de Peano*

$$R_{n+1}(x) = o(|x-a|^n),$$

cuyo empleo resulta útil al calcular los límites.

EJEMPLO 8. Hállese $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3}$.

◀ Como $1 - \cos^3 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)$, y $5x^2 + 7x^3 \sim 5x^2$, entonces

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{3(1-\cos x)}{5x^2}.$$

Al sustituir $\cos x$ por su desarrollo según la fórmula de Maclaurin $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3} = \frac{3}{5} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{5} \lim_{x \to 0} \frac{x^2/2}{x^2},$$

puesto que $\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\sim\frac{x^2}{2}$ cuando $x\to 0$. En definitiva

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3}=\frac{3}{10}. \blacktriangleright$$

Ejemplo 9. Hállese $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\operatorname{sen}(2x-2)}{x-1+\operatorname{sen}(3x-3)}$.

◀ De acuerdo con la fórmula de Taylor tenemos

$$\operatorname{sen}(2x-2)=\operatorname{sen}2(x-1)=\frac{2(x-1)}{1!}+o(|x-1|),$$

$$\operatorname{sen}(3x-3)=\frac{3(x-1)}{1!}+o(|x-1|).$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\operatorname{sen}(2x-2)}{x-1+\operatorname{sen}(3x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)-o(|x-1|)}{4(x-1)+o(|x-1|)}.$$

Despreciando los infinitésimos de órdenes superiores, es decir, pasando en el numerador y el denominador a los infinitésimos equivalentes para $x\to 1$, obtenemos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\operatorname{sen}(2x-2)}{x-1+\operatorname{sen}(3x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{4(x-1)}=-\frac{1}{4}. \blacktriangleright$$

3.66. Muéstrese que el desarrollo según la fórmula de Maclaurin para las funciones sen x, tg x, arcsen x, arctg x, e^x-1 y $\ln(1+x)$ puede escribirse en la forma $x+o(|x|)$ y que para $x\to 0$ todas estas funciones son equivalentes al infinitésimo $\alpha(x)=x$ (y, por lo tanto, son equivalentes entre sí).

3.67. Haciendo uso del desarrollo según la fórmula de Maclaurin, calcúlense los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2+x^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{x^3+x^4}$.

§ 4. Investigación de las funciones y construcción de las gráficas

1. Crecimiento y decrecimiento de las funciones. Extremo. Una función $y=f(x)$ se denomina *creciente* (*decreciente*) en el intervalo (a, b), si de la desigualdad $x_1<x_2$, donde $x_1, x_2\in(a, b)$, se desprende la desigualdad $f(x_1)<f(x_2)$ ($(f(x_1)>f(x_2)$, respectivamente).

Si la función $f(x)$ es derivable en el intervalo (a, b) y $f'(x) > 0$ para cualquier $x \in (a, b)$, entonces la función $f(x)$ crece en (a, b); si, en cambio, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, la función $f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En los casos más sencillos el dominio de definición de la función $y = f(x)$ puede dividirse en un número finito de *intervalos de monotonía*. Cada uno de los intervalos de monotonía está acotado por los *puntos críticos* en los cuales $f'(x) = 0$ ó bien $f'(x)$ no existe.

Si existe tal entorno $U_\delta(x_0)$ del punto x_0 que para cualquier punto $x \neq x_0$ de dicho entorno se verifica la desigualdad $f(x) > f(x_0)$ (o bien $f(x) < f(x_0)$), entonces x_0 lleva el nombre de *punto de mínimo* (*máximo*) de la función $y = f(x)$, mientras que el número $f(x_0)$ se llama *mínimo* (*máximo*) de esta función. Los puntos de mínimo y de máximo de una función se denominan sus *puntos de extremo*.

Condición necesaria de extremo. Si x_0 es un punto de extremo de la función $f(x)$, entonces $f'(x_0) = 0$, o bien $f'(x_0)$ no existe, es decir, x_0 es un punto crítico de esta función.

Lo recíproco, hablando en general, no es cierto.

Condiciones suficientes de extremo de una función continua.

1) Supongamos que la función $f(x)$ es derivable en cierto entorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ del punto crítico x_0, a excepción, quizás, de este mismo punto. Si en este caso la derivada $f'(x)$ tiene, en los intervalos $(x_0 - \delta, x_0)$ y $(x_0, x_0 + \delta)$, signos opuestos, entonces x_0 es un punto de extremo, con la particularidad de que, si $f'(x) > 0$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) < 0$ para $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, x_0 será el punto de máximo, y si $f'(x) < 0$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) > 0$ para $x \in (x_0 + \delta, x_0)$, entonces x_0 será el punto de mínimo. Si, en cambio, $f'(x)$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, mantiene su signo, el punto x_0 no es un punto de extremo.

2) Supongamos que la función $f(x)$ es dos veces derivable en el punto crítico x_0 y en cierto entorno de éste. Si $f''(x_0) < 0$, x_0 será un punto de máximo de la función $f(x)$; si $f''(x_0) > 0$, x_0 será un punto de mínimo. En el caso de que $f''(x) = 0$, se necesitan investigaciones complementarias.

EJEMPLO 1. Hállense los intervalos de monotonía y los puntos de extremo de la función $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Encontramos la derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^3} & \text{para} \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1), \\[2ex] \dfrac{2-x}{x^3} & \text{para} \quad x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Igualándola a cero, obtenemos $x = 2$. De este modo, los puntos críticos son $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ (tomando en consideración los puntos, donde la derivada no existe). Dichos puntos dividen el dominio de definición de $f(x)$ en cuatro intervalos de monotonía: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$. Por cuanto $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$ y $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$, entonces $f(x)$ es monótona creciente para $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$, monótona decreciente para $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$, en el punto $x_3 = 2$ la función alcanza su máximo ($f(2) = 1/4$), y en el punto $x_2 = 1$, su mínimo ($f(1) = 0$). Resulta cómodo reducir los resultados obtenidos en la siguiente tabla:

Tabla 4.1

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f(x)$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$
$f'(x)$	$+$	no existe	$-$	no existe	$+$	0	$-$

Hemos de notar que en el ejemplo examinado la primera condición suficiente permite determinar el carácter de cada uno de los puntos críticos de la función dada. Al mismo tiempo la segunda condición suficiente no es aplicable en el punto x_2, puesto que en dicho punto no existe la primera derivada. ▶

4.1*. Demuéstrese la siguiente generalización de la segunda condición suficiente de extremo. Sea x_0 un punto crítico de la función $f(x)$ y supongamos que la primera de las derivadas no nulas de dicha función en el punto x_0 es de orden k. Si k es un número par, x_0 será el punto de extremo y, además, de máximo, siempre que $f^{(k)}(x_0) < 0$, y de mínimo, siempre que $f^{(k)}(x_0) > 0$. En cambio, si k es un número impar, no hay extremo en el punto x_0.

4.2. Analícese el extremo de la función $f(x) = (x - x_0)^k \varphi(x)$ en el punto x_0, donde $k \in N$ y $\varphi(x)$ es continua en el punto x_0, siendo $\varphi(x_0) \neq 0$.

4.3.* Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Demuéstrese que la función $f(x)$ tiene en el punto $x_0 = 0$ un mínimo, y la función $g(x)$ no tiene extremo en el punto x_0, aunque

$$f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Hállense los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, como también los puntos de extremo, para las funciones indicadas más abajo:

4.4. $y = x\sqrt{1-x^2}$. **4.5.** $y = \dfrac{2x^2-1}{x^4}$.

4.6. $y = \dfrac{x}{\ln x}$. **4.7.** $y = x - 2 \operatorname{sen} x$.

4.8. $y = x - 2\ln x$.
4.9. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$. **4.10.** $y = e^x \cos x$.
4.11. $y = x^x$. **4.12.** $y = \operatorname{ch}^3 x + 1$.

El *valor máximo* (*mínimo*) de una función continua $f(x)$ en un segmento dado $[a, b]$ se alcanza bien en los puntos críticos o bien en los extremos de dicho segmento.

Hállense los valores máximo M y mínimo m de las siguientes funciones en los segmentos indicados (en todo el dominio de definición, si no se indica el segmento):

4.13. $y = -3x^4 + 6x^2$; $[-2, 2]$. **4.14.** $y = x + 2\sqrt{x}$; $[0, 4]$. **4.15.** $y = \frac{x-1}{x+1}$; $[0, 4]$.

4.16. $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$; $[0, 1]$.

4.17. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$; $[0, 1]$.

4.18. $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$; $[0, 1]$.

4.19. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. **4.20.** $y = xe^{-x^2/2}$.

Demuéstrense las siguientes desigualdades:

4.21*. $e^x > 1 + x$, $x \neq 0$. **4.22.** $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, $x \neq 0$.

4.23. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} > 1 + \frac{x^2}{2}$, $x \neq 0$.

4.24. $\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x > 2x$, $x \in (0, \pi/2)$.

4.25. Dos cuerpos se mueven a velocidades constantes de v_1 m/s y v_2 m/s. El movimiento se realiza a lo largo de dos rectas que forman el ángulo $\pi/2$, en dirección hacia el vértice de este ángulo, con la particularidad de que al principio del movimiento el primer cuerpo se encontraba a la distancia a m del vértice y el segundo cuerpo, a la distancia b m. ¿Dentro de cuántos segundos después de comenzar el movimiento la distancia entre los cuerpos será mínima?

4.26. Con el fin de transportar la producción de la fábrica N a la ciudad A (fig. 49) se construye una carretera NP que une la fábrica con el ferrocarril AB que pasa por la ciudad A. Los gastos de transporte por carretera son dos veces mayores que los gastos por ferrocarril. ¿A qué punto P se debe tender la carretera, para que los gastos generales de transporte de la producción de la fábrica N a la ciudad A por carretera y por ferrocarril sean mínimos?

4.27. Una ventana tiene forma de un rectángulo coronado con un semicírculo (fig. 50). Se conoce el perímetro P de esta figura. ¿Para qué dimensiones x e y la ventana dejará pasar la cantidad máxima de luz?

4.28. De tres tablas de igual espesor se hace un canalón para suministrar agua. ¿Con qué ángulo α de inclinación de

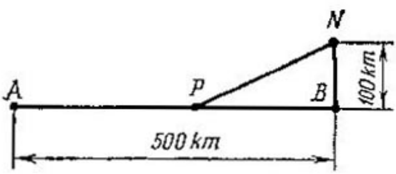


Fig. 49

Fig. 50

las paredes laterales respecto al fondo del canalón, será máxima el área de la sección transversal de éste?

4.29. En un triángulo de base a y altura h está inscrito un rectángulo cuya base se sitúa en la del triángulo y dos vértices, en los lados laterales del mismo. Hállese el área máxima del rectángulo inscrito.

4.30. El perímetro de la sección axial de un cilindro es igual a $6a$. Hállese el volúmen máximo de tal cilindro.

4.31. Un cilindro está inscrito dentro de un cono cuya altura es h y el radio de la base r. Hállese el volumen máximo del cilindro inscrito.

4.32. Hállese el volumen mínimo de un cono circunscrito alrededor de una bola de radio r.

4.33. Hállese el volumen máximo de un cono, si se conoce la longitud dada l de su generatriz.

4.34. Determínese el área máxima de un rectángulo inscrito en un círculo de radio r.

4.35. Hállese en la parábola $y = x^2$ un punto N cuya distancia hasta la recta $y = 2x - 4$ sea mínima.

4.36. En un semicírculo de radio R está inscrito un rectángulo de área máxima. Determínense su base x y la altura y.

4.37. Divídase un segmento de longitud a en dos partes de modo tal que la suma de las áreas de los cudrados construidos sobre estas partes sea mínima.

4.38. Un embudo cónico, el radio de la base del cual es R y la altura H, está lleno de agua. En el embudo se sumerge una bola. ¿Cuál debe ser el radio de la bola r, para que el volumen de agua desplazado del embudo por la parte sumergida de la bola sea máximo.

4.39. Determínese la altura mínima $h = |OB|$ de la puerta de una torre vertical $ABCD$, para que pueda llevarse a la torre por esta puerta una varilla rígida MN de longitud l cuyo extremo N se desliza a lo largo de la recta horizontal AB. El ancho de la torre $|AB| = d < l$ (fig. 51).

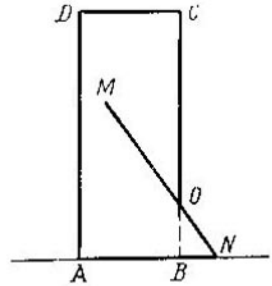


Fig. 51

2. Dirección de convexidad. Puntos de inflexión. La gráfica de una función derivable $y = f(x)$ se dice *convexa hacia las y negativas* (o *cóncava hacia las y positivas*) en el intervalo (a, b), si el arco de la curva en este intervalo se dispone por arriba de la tangente, trazada a la gráfica de la función $y = f(x)$ en cualquier punto $x \in (a, b)$. En cambio, si en el intervalo (a, b) toda tangente se dispone por arriba del arco de la curva, entonces la gráfica de la función derivable en dicho intervalo se llama *convexa hacia las y positivas* (o bien *cóncava hacia las y negativas*) (en la fig. 52 la gráfica de la función $y = f(x)$ es convexa hacia las y negativas en el intervalo (a, x_0) y convexa hacia las y positivas, en el intervalo (x_0, b)).

Si la función es dos veces derivable en (a, b) y $f''(x) > 0$, $(f''(x) < 0)$, su gráfica es convexa hacia las y negativas (positivas) en este intervalo.

En los casos más sencillos el dominio de definición de la función $f(x)$ puede ser dividido en un número finito de intervalos en los que la dirección de convexidad se mantiene constante. Cada uno de estos intervalos está limitado por puntos en los cuales $f''(x) = 0$, o bien $f''(x)$ no existe. El punto $(x_0, f(x_0))$, en el cual la dirección de convexidad de la gráfica de la función cambia por opuesta, lleva el nombre de *punto de inflexión* (véase fig. 52).

Condición suficiente para la existencia del punto de inflexión. Supongamos que la función $f(x)$ es dos veces derivable en cierto entorno $U_\delta(x_0)$ del punto x_0, en el cual $f''(x_0) = 0$, ó $f''(x_0)$ no existe. Si en este caso la derivada $f''(x)$ tiene en los intervalos $(x_0 - \delta, x_0)$ y $(x_0, x_0 + \delta)$ signos opuestos, el punto x_0 será punto de inflexión.

EJEMPLO 2. Hállense los intervalos de convexidad y los puntos de inflexión de la función $y = \frac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Hallamos la segunda derivada:

$$f''(x)\begin{cases} \dfrac{2(3-x)}{x^4}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \\ \dfrac{2(x-3)}{x^4}, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Por consiguiente, los puntos críticos de la primera derivada son $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. Además, en los puntos x_1 y x_2 la segunda derivada no existe (en particular, $f''_-(1) = 4$, y $f''_+(1) = -4$), mientras que en el punto x_3 ella es igual a cero.

Obtenemos, pues, cuatro intervalos de convexidad: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, +\infty)$. Analizando el signo de la segunda derivada

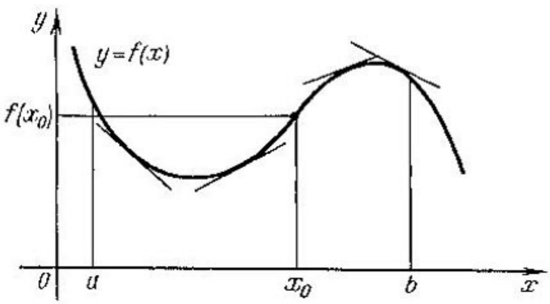


Fig. 52

en cada uno de los intervalos citados deducimos que la gráfica de la función es convexa hacia las y negativas en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(3, +\infty)$ y convexa hacia las y positivas en el intervalo $(1, 3)$. Por consiguiente, los puntos x_2 y x_3 son puntos de inflexión de la gráfica de la función y x_1 no lo es. Los resultados obtenidos pueden reducirse cómodamente en la siguiente tabla:

Tabla 4.2

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f(x)$	$\cup$	$+\infty$	$\cup$	0	$\cap$	$\frac{2}{9}$	$\cup$
$f''(x)$	$+$	no existe	$+$	no existe	$-$	0	$+$

▶

Hállense los intervalos de convexidad de la gráfica de la función $y = f(x)$, los puntos de inflexión y los coeficientes angulares k de las tangentes en los puntos de inflexión:

4.40. $y = x^7 + 7x + 1$. **4.41.** $y = x^4 + 6x^2$.

4.42. $y = \sqrt[3]{(x-2)^5} + 3$. **4.43.** $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.

4.44. $y = \sqrt[3]{(x+1)^3} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

4.45. $y = xe^{2x} + 1$.

4.46. $y = x \ln |x|$. **4.47.** $y = x^3 \ln x + 1$.

4.48. ¿Para qué valores a y b el punto $(1, 3)$ es un punto de inflexión de la curva $y = ax^3 + bx^2$?

4.49. ¿Para qué parámetro h la *curva de probabilidades*

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}, \quad h > 0,$$

tiene puntos de inflexión con las abscisas $x = \pm 6$?

4.50. Muéstrese que la curva $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ tiene tres puntos de inflexión que se sitúan en una recta.

4.51.* Muéstrese que los puntos de inflexión de la curva $y = x \operatorname{sen} x$ se sitúan en la curva $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

3. Asíntotas. Supongamos que para la función $y = f(x)$ existe una recta tal que la distancia entre el punto $M(x, f(x))$ de la gráfica de la función y la recta citada tiende a cero, cuando el punto M se aleja indefinidamente del origen de coordenadas. Entonces la recta lleva el nombre de *asíntota* de la gráfica de la función.

Si, en este caso, la coordenada x del punto M tiende hacia un número finito a, la semirecta $x = a$ ($y > 0$ o bien $y < 0$) será asíntota vertical. Para que exista la asíntota vertical en el punto $x = a$, es necesario y suficiente que por lo menos uno de los límites $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x)$ sea igual al infinito.

Las funciones continuas no tienen asíntotas verticales.

En el caso de que la coordenada x del punto M tienda hacia $+\infty$ ó hacia $-\infty$, obtenemos una asíntota oblicua $y = kx + b$, para la existencia de la cual resulta necesaria y suficiente la existencia de dos límites

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b.$$

Los límites mencionados pueden ser distintos para $x \to +\infty$ (en el caso de una asíntota oblicua derecha) y para $x \to -\infty$ (en el caso de una asíntota oblicua izquierda).

Ejemplo 3. Hállese la asíntota de la gráfica de la función $y = \dfrac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Por cuanto la función es continua en todo el eje, a excepción del punto $x = 0$, la asíntota vertical puede existir sólo en este mismo punto.

Tenemos:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{|x-1|}{x^2} = \lim_{x\to 0-0} \frac{|x-1|}{x^2} = +\infty,$$

y, por consiguiente, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Hallemos las asíntotas oblicuas. Por cuanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{|x-1|}{x^2}}{x} = 0 = k \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{|x-1|}{x^2} - 0\cdot x\right) = 0 = b,$$

la recta $y = 0\cdot x + 0 = 0$ será la asíntota oblicua derecha (horizontal, en el caso dado).

De un modo absolutamente análogo hallamos que la misma recta $y = 0$ es también la asíntota oblicua izquierda. ▶

Hállense las asíntotas de las gráficas de las funciones:

4.52. $y = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$. **4.53.** $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$.

4.54. $y = \sqrt{|x^2-3|}/x$. **4.55.** $y = 3x + \operatorname{arctg} 5x$.

4.56 $y = \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x$. **4.57.** $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

4.58 $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$. **4.59.** $y = x \arcsen x$.

4.60. Demuéstrese que la gráfica de una función racional entera $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $n \geqslant 2$, no tiene ninguna asíntota.

4. Construcción de las gráficas de las funciones. Para construir la gráfica de una función $y = f(x)$ con una segunda derivada continua (en todo punto del dominio de definición de la función, a excepción, quizás, de un número finito de puntos) realizamos, primeramente, el análisis elemental que pone de manifiesto ciertas peculiaridades de la función (si se tienen): simetría, periodicidad, constancia del signo, ceros, puntos de intersección con el eje Oy, puntos de discontinuidad, etc. Luego, utilizando las derivadas primera y segunda, hallamos los puntos de extremo y los de inflexión, los intervalos de monotonía y de convexidad, como también las asíntotas.

Ejemplo 4. Constrúyase la gráfica de la función $y = \frac{|x-1|}{x^2}$.

◀ La función está definida y es continua en todo punto, a excepción del punto $x = 0$, es siempre no negativa y se anula sólo en el punto $x = 1$. El análisis de esta función se ha realizado en los ejemplos del 1 al 3. El resultado de este análisis se reduce cómodamente en una tabla que representa la reunión de las tablas 4.1 y 4.2. La gráfica de la función se da en la fig. 53.

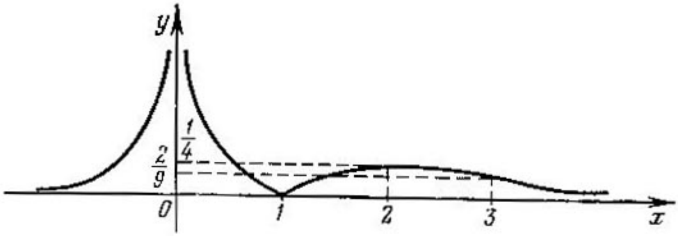


Fig. 53

Constrúyanse las gráficas de las siguientes funciones:

4.61. $y=\frac{(x^2-5)^3}{125}$. **4.62.** $y=\frac{1}{4}x^2(x^2-3)^2$.

4.63. $y=\frac{1}{6}x^3(x^2-5)$. **4.64.** $y=\frac{x^3}{2(x-1)^2}$

4.65. $y=\frac{x^4}{x^3-1}$. **4.66.** $y=\frac{x^3-3x}{x^2-1}$.

4.67. $y=\frac{x^4}{x^3+1}$. **4.68.** $y=\frac{x}{x^3+2}$.

4.69. $y=\frac{x^3}{x^4-1}$. **4.70.** $y=\frac{x^2}{x^3-1}$.

4.71. $y=\frac{x}{x^2-4}$. **4.72.** $y=\frac{x^3}{x^2-3}$.

4.73. $y=\frac{x}{2-x^3}$. **4.74.** $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$. **4.75.** $y=\frac{x^3}{x^3+1}$.

4.76. $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$. **4.77.** $y=\sqrt[3]{x^2-2x}$.

4.78. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

4.79. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$. **4.80.** $y=\sqrt[3]{1-x^3}$.

4.81. $y=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}$.

4.82. $y=\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{x^3-1}$.

4.83. $y=\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$. **4.84.** $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

4.85. $y=\dfrac{x^3}{3\sqrt[3]{x^3+2}}$. 4.86. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-4}}$

4.87. $y=\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{(x^3+2)^2}}$. 4.88. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

4.89. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}$. 4.90. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$.

4.91. $y=\dfrac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}$. 4.92. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{|x^2-1|}}$.

4.93. $y=\sqrt[3]{|x^2-1|}$. 4.94. $y=\sqrt{|x^2-2|^3}$.

4.95. $y=\operatorname{sen} x+\cos x$. 4.96. $y=\dfrac{1}{\operatorname{sen} x+\cos x}$.

4.97. $y=x \operatorname{arctg} x$. 4.98. $y=\dfrac{x}{2}+\operatorname{arcctg} x$.

4.99. $y=e^{2x-x^2}$. 4.100. $y=xe^{-x^2/2}$.

4.101. $y=\dfrac{1}{x}e^{-1/x}$. 4.102. $y=\dfrac{1}{x^2}e^{-1/x^2}$.

4.103. $y=xe^{1/x}$. 4.104. $y=\dfrac{1}{x}e^{-1/x^2}$.

4.105. $y=(x-2)e^{-1/x}$. 4.106. $y=(2x-1)e^{2/x}$.
4.107. $y=(x^2+1)^{-x^2/2}$. 4.108. $y=x^2e^{2/x}$.
4.109. $y=x^3e^{x^2-x/2}$.

4.110. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. 4.111. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

4.112. $y=\dfrac{1}{x\ln x}$. 4.113. $y=x^2\ln x$.

4.114. $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$. 4.115. $y=x^2\ln^2 x$.

4.116. $y=x^2/\ln|x|$. 4.117. $y=x\ln^2|x|$.

4.118. $y=\ln|x^2-1|$. 4.119. $y=\dfrac{1}{x^2}\ln^2|x|$.

4.120. $y=x^x,\ x>0$. 4.121*. $y=x^{1/x},\ x>0$.

4.122. $y=(1+x)^{1/x},\ x>-1$. 4.123*. $y=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Constrúyanse las curvas definidas en la forma paramétrica:

4.124. $x=te^t,\quad y=te^{-t},\quad t\in\mathbb{R}$.

◀ Realicemos ciertos cálculos auxiliares:

$$x'_t=(1+t)\,e^t,\quad y'_t=(1-t)\,e^{-t},\quad y'_x=\frac{1-t}{1+t}\,e^{-2t},$$

$$x''_{tt}=(2+t)\,e^t,\quad y''_{tt}=(t-2)\,e^{-t},\quad y''_{xx}=2\,\frac{t^2-2}{(1+t)^3}\,e^{-3t}.$$

Dado que, para $t=-1$ y $x''_{tt}(-1)=\frac{1}{e}>0$, $x'_t=0$, entonces $x_{\text{mín}}=-\frac{1}{e}$. Dado que, para $t=1$ e $y''_{tt}(1)=-\frac{1}{e}<0$, $y'_t=0$, entonces $y_{\text{máx}}=\frac{1}{e}$. De aquí se deduce que la curva está dispuesta en el campo $\left\{(x,\,y)\mid x\in\left[-\frac{1}{e},\,+\infty\right),\ y\in\left(-+\infty,\,\frac{1}{e}\right]\right\}$.
De la expresión para la derivada y'_x determinamos los puntos críticos $t_1=1$ ($y'_x(1)=0$ y $t_2=-1$ ($y'_x(-1)$ no existen). Los puntos críticos de la primera derivada los hallamos a partir de la expresión para la segunda derivada y''_{xx}: $t_3=\sqrt{2}$ ($y''_{xx}(\sqrt{2})=0$), $t_4=-\sqrt{2}$ ($y''_{xx}(-\sqrt{2})=0$) y $t_5=-1$ ($y''_{xx}(-1)$ no existe). Por consiguiente, $A\left(-\sqrt{2}/e^{\sqrt{2}},\,-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\right)$ y $B\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},\,\sqrt{2}/e^{\sqrt{2}}\right)$ son los puntos de inflexión.

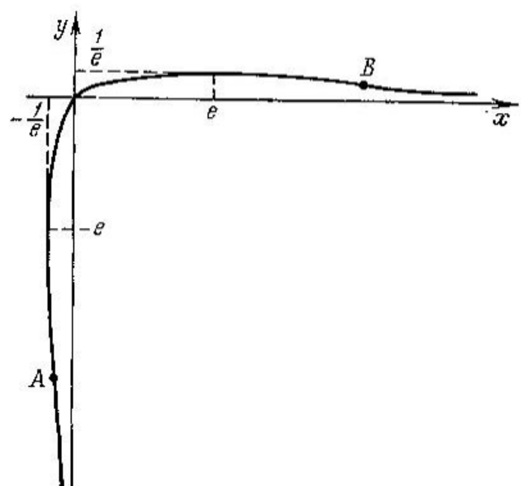


Fig. 54

Por fin, hallamos las asíntotas. Si $t\to-\infty$, entonces $x\to0$ e $y\to-\infty$, es decir, $x=0$ es la asíntota vertical. Indiquemos que

Tabla 4.3

t	x	y	y'_x	y''_{xx}	Comportamiento de la curva
$(-\infty, -\sqrt{2})$	<0	<0	>0	<0	Es convexa hacia las y positivas, monótona decreciente; $x=0$ es la asíntota vertical
$-\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{e\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2e}^{\sqrt{2}}$	—	>0	Punto de inflexión
$(-\sqrt{2}, -1)$	<0	<0	>0	>0	Es convexa hacia las y negativas, monótona decreciente
-1	$-\frac{1}{e}$	$-e$	no existe	no existe	Punto de retroceso
$(-1, 1)$	—	—	>0	<0	Es convexa hacia las y positivas, monótona creciente, el punto $(0, 0)$ se sitúa en la curva
1	e	$\frac{1}{e}$	0	—	Máximo
$(1, \sqrt{2})$	>0	>0	<0	<0	Es convexa hacia las y positivas, monótona decreciente
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$	—	0	Punto de reflexión
$(\sqrt{2}, +\infty)$	>0	>0	<0	>0	Ex convexa hacia las y negativas, monótona decreciente; $y=0$ es la asíntota horizontal

cuando los puntos de la curva se aproximan hacia dicha asíntota, sus coordenadas respecto de x quedan negativas. Si $t \to +\infty$, entonces $x \to +\infty$, mientras que $y \to 0$, es decir, $y = 0$ es la asíntota horizontal. Al aproximarse hacia esta asíntota, los puntos de la curva tienen coordenada positiva respecto de y.

Los resultados del análisis se reúnen en una tabla (tabla 4.3) y las deducciones necesarias se apuntan en su columna derecha.

Ha de notarse que la contradicción aparente entre el carácter positivo de la primera derivada y el decrecimiento monótono de la función para $t < -1$ se debe a que al variar el parámetro t de $-\infty$ hasta -1, los valores de x varían de 0 hasta $-1/e$ (es decir, decrecen) La curva se expone en la fig. 54. ▶

4.125. $x = t^2 - 2t,\ y = t^2 + 2t,\ t \in \mathbb{R}$.
4.126. $x = t + e^{-t},\ y = 2t + e^{-2t},\ t \in \mathbb{R}$.
4.127. $x = a\cos^3 t,\ y = a\operatorname{sen}^3 t,\ t \in [0, 2\pi)$.
4.128. $x = t^3 - 3\pi,\ y = t^3 - 6\operatorname{arctg} t,\ t \in \mathbb{R}$.

Constrúyanse las siguientes curvas dadas en el sistema de coordenadas polares:

4.129. $r = a\operatorname{sen} 3\varphi$. **4.130.** $r = a(1 + \cos\varphi)$.

4.131. $r = \sqrt{\dfrac{\pi}{\varphi}}$, **4.132.** $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$.

§ 5. Funciones vectoriales y complejas de una variable real

1. Definición de la función vectorial de una variable real. Si a cada valor de la variable real $t \in D \subset \mathbb{R}$ se le ha puesto en correspondencia un vector $\boldsymbol{a}(t) \in \mathcal{V}_3$, se dice que sobre el conjunto D está dada una *función vectorial* de la variable real $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$.

La definición de una función vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ es equivalente a la definición de tres funciones escalares $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ que representan las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = a_x(t)\,\boldsymbol{i} + a_y(t)\,\boldsymbol{j} + a_z(t)\,\boldsymbol{k},$$

o bien, en la forma más breve, $\boldsymbol{a} = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$. Si $\boldsymbol{a}$ es el radio vector del punto $M(x, y, z)$, entonces la función vectorial correspondiente se designará:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}.$$

Se denomina *hodógrafo* de la función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ una línea circunscrita en el espacio por el extremo del vector $\boldsymbol{r}$. Cualquier línea en el espacio puede considerarse como hodógrafo de cierto vector. Las ecuaciones paramétricas de un hodógrafo son:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

EJEMPLO 1. Hállese el hodógrafo de la función vectorial

$$r(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,i+\frac{2t}{1+t^2}\,j+k, t\in\mathbb{R}.$$

◀ Tenemos las ecuaciones paramétricas del hodógrafo

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2},\quad z=1.$$

Eliminando el parámetro t, obtendremos

$$x^2+y^2=\frac{(1-t^2)^2+4t^2}{(1+t^2)^2}=1.$$

Por consiguiente, el hodógrafo de la función vectorial $r(t)$ es la circunferencia

$$x^2+y^2=1,\quad z=1,$$

de la que está excluido el punto $(-1, 0, 1)$. Al variar t de $-\infty$ hasta $+\infty$, el punto $M(x, y, z)$ en el hodógrafo se desplaza desde el punto $(-1, 0, 1)$ en sentido antihorario (si se observa de un punto dispuesto por arriba del plano $z=1$), siendo en este caso $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x=-1$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y=0$. ▶

Hállense los hodógrafos de las funciones vectoriales:

5.1. $r=(2t-1)i+(-3t+2)j+4tk,\ t\in\mathbb{R}$.

5.2. $r=\sqrt{1-t^2}\,i+\sqrt{1+t^2}\,j,\ t\in[0, 1]$.

5.3. $r=4\operatorname{ch} t\cdot i-j+3\operatorname{sh} t\cdot k,\ t\in\mathbb{R}$.

5.4. $r=3ti+(2t-t^2)j,\ t\in\mathbb{R}$.

5.5. $r=\cos t\cdot i+\operatorname{sen} t\cdot j+tk,\ t\in\mathbb{R}$.

5.6. $r=2\cos^3 t\cdot i+2\operatorname{sen}^3 t\cdot j,\ t\in[0, 2\pi]$.

5.7. $r=ti+t^2j+t^3k, t\in\mathbb{R}$.

5.8. $r=\cos^2 t\cdot i+\operatorname{sen} t\cos t\cdot j+\operatorname{sen} t\cdot k,\ t\in[0, 2\pi]$.

5.9. $r=5\cos t\cdot i+4\operatorname{sen} t\cdot j+2k,\ t\in[0, 2\pi]$.

5.10. $r=(\operatorname{sh} t-1)\,i+\operatorname{ch}^2 t\cdot j+3k,\ t\in\mathbb{R}$.

2. Derivación de la función vectorial. Se denomina *derivada de la función vectorial* $a=a(t)$ respecto del argumento t la nueva función vectorial

$$\frac{da}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta a}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{a(t+\Delta t)-a(t)}{\Delta t}$$

Si $a(t)=(a_x(t), a_y(t), a_z(t))$, entonces

$$\frac{da}{dt}=\left(\frac{da_x(t)}{dt},\ \frac{da_y(t)}{dt},\ \frac{da_z(t)}{dt}\right).$$

Si $r = r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces la derivada $\frac{dr}{dr}$ será un vector dirigido a lo largo de la tangente al hodógrafo de la función vectorial $r(t)$ hacia el lado de crecimiento del argumento t.

Si t es el tiempo, $\frac{dr}{dt} = v$ será un vector de la velocidad del extremo del vector r.

Reglas de derivación de la función vectorial. ($a = a(t)$, $b = b(t)$).

1) $\frac{d}{dt}(a \pm b) = =\frac{da}{dt} \pm \frac{db}{dt}$.

2) $\frac{d}{dt}(\alpha a) = \alpha \frac{da}{dt}$, donde α es un escalar constante.

3) $\frac{dc}{dt} = 0$. donde c es un vector constante.

4) $\frac{d}{dt}(\varphi a) = \frac{d\varphi}{dt} a + \varphi \frac{da}{dt}$, donde $\varphi = \varphi(t)$ es una función escalar de t.

5) $\frac{d}{dt}(a, b) = \left(\frac{da}{dt}, b\right) + \left(a \frac{db}{dt}\right)$

6) $\frac{d}{dt}[a, b] = \left[\frac{da}{dt}, b\right] + \left[a, \frac{db}{dt}\right]$.

7) $\frac{d}{dt} a(\varphi(t)) = \frac{da}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$, donde $\varphi = \varphi(t)$ es una función escalar de t.

8) $\left(a, \frac{da}{dt}\right) = 0$, si $|a| = \text{const}$.

5.11. Dada la ecuación de movimiento $r = 3ti - 4tj$, determínense la trayectoria y la velocidad del movimiento.

5.12. Sea dada la ecuación de movimiento $r = 3ti + (4t - t^2)j$. Determínense la trayectoria y la velocidad del movimiento. Constrúyanse los vectores de la velocidad para los instantes $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$.

5.13. Sea dada la ecuación de movimiento $r = 2(t - \operatorname{sen} t) i + 2(1 - \cos t) j$. Determínense la trayectoria y la velocidad del movimiento. Constrúyanse los vectores de la velocidad para los instantes $t = \pi/2$, $t = \pi$.

5.14. Hállese el vector tangente unidad del hodógrafo de la función vectorial $r = e^{2t} i - (t + 8)^{4/3} j$ para $t = 0$.

5.15. Hállese el vector tangente unidad del hodógrafo de la función vectorial $r = (t^3 + t) i + t^2 j$ para $t = -1$.

5.16. Hállense las derivadas de las funciones vectoriales:

a) $r = \operatorname{sen} t \cdot i + \cos^2 t \cdot j + \operatorname{sen} t \cos t \cdot k$;

b) $r = t \cos t \cdot i + t \operatorname{sen} t \cdot j + tk$;

c) $\boldsymbol{r} = (t + \cos t)\, \boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + \operatorname{sen} t \cdot \boldsymbol{k}$.

5.17. Hállense las derivadas de las funciones vectoriales:

a) $\boldsymbol{r} = e^t \boldsymbol{i} + \cos t \cdot \boldsymbol{j} + (t^2 + 1)\boldsymbol{k}$ en el punto $(1, 1, 1)$;

b) $\boldsymbol{r} = t^3\boldsymbol{i} + (t+1)^2 \boldsymbol{j} + \sqrt{t^2+1}\, \boldsymbol{k}$ para $t = -2$.

5.18. Hállese $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, si

$\boldsymbol{a} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}.$

5.19. Hállese $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$.

5.20. Hállese $\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$, si $\boldsymbol{a} = u\boldsymbol{i} + u^2\boldsymbol{j} + u^3\boldsymbol{k}$, donde $u = \operatorname{sen} t$.

3. Tangente a una curva espacial y a un plano normal. La ecuación de la tangente a una curva espacial $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$, al cual corresponde el valor del parámetro t_0, tiene la forma

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}}$$

donde x, y, z son las coordenadas corrientes del punto de tangencia. La ecuación del plano normal en el mismo punto es:

$$(x - x_0)\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} + (y - y_0)\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} + (z - z_0)\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0} = 0.$$

EJEMPLO 2. Demuéstrese que una tangente a la línea helicoidal $\boldsymbol{r} = (a\cos t,\ a \operatorname{sen} t,\ bt)$ forma con el eje Oz un ángulo constante.

◀ Hallemos el vector que sea tangente al hodógrafo del vector $\boldsymbol{r}$:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (-a \operatorname{sen} t,\ a\cos t,\ b).$$

De aquí

$$\cos\gamma = \frac{z'(t)}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,$$

es decir, $\gamma = \text{const.}$ ▶

EJEMPLO 3. Escríbanse las ecuaciones de la tangente y del plano normal a la curva $x = t^2 - 1$, $y = t + 1$, $z = t^3$ en el punto $M_0(0, 2, 1)$.

◀ Al punto dado le corresponde el valor del parámetro $t = 1$. Tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = 3t^2.$$

Sustituyendo el valor de $t=1$, obtenemos

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1}=1, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1}=1, \quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1}=3.$$

La ecuación de la tangente:

$$\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{3}$$

La ecuación del plano normal:

$$2(x-0)+1\cdot(y-2)+3(z-1)=0,$$

o bien

$$2x+y+3z-5=0. \blacktriangleright$$

Para cada una de las curvas que siguen escríbanse la ecuación de la tangente y la del plano normal en el punto dado:

5.21. $x=4\,\mathrm{sen}^2 t$, $y=4\,\mathrm{sen}\,t\cos t$, $z=2\cos^2 t$ para $t=\pi/4$.

5.22. $x=\frac{1}{2}t^2$, $y=\frac{1}{3}t^3$, $z=\frac{1}{4}t^4$ para $t=2$.

5.23. $x=a\,\mathrm{ch}\,t$, $y=a\,\mathrm{sh}\,t$, $z=at$ para $t=0$.

5.24. $x^2+y^2=10$, $y^2+z^2=25$ en el punto $M_0(1, 3, 4)$.

5.25. $2x^2+3y^2+z^2=9$, $3x^2+y^2-z^2=0$ en el punto $M_0(1, -1, 2)$.

4. Segunda derivada de la función vectorial. Si

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t)),$$

se tiene

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Si t es el tiempo, entonces $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{w}$ es el vector de la aceleración del extremo del vector $\boldsymbol{r}$.

Supongamos que una curva en el plano Oxy representa el hodógrafo de la función vectorial $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=(x(s),\ y(s))$, donde s es la longitud del arco de la curva.

Se llama *curvatura* de la curva en el punto M_0 el número

$$K=\left|\lim_{M\to M_0}\frac{\varphi}{\Delta s}\right|,$$

donde φ es el ángulo de giro de la tangente correspondiente al arco $\overset{\frown}{M_0M}$ (fig. 55) de la curva dada, y Δs es la longitud de dicho arco. La magnitud $R=1/K$ se denomina *radio de curvatura*.

La curvatura K se define por la relación

$$K=\left|\frac{d^2r}{ds^2}\right|.$$

Las fórmulas para calcular la curvatura son: 1) si una curva viene definida mediante la ecuación en la forma explícita $y = f(x)$, entonces

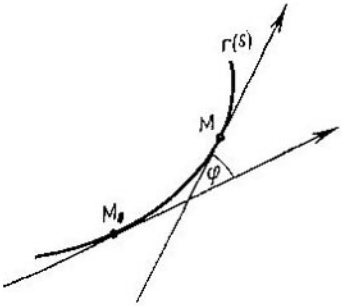


Fig. 55

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|;$$

2) si una curva está dada mediante la ecuación en la forma implícita*) $F(x, y) = 0$, entonces

$$K=\left|\frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{(F'^2_x+F'^2_y)^{3/2}}\right|;$$

3) si una curva está dada por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, entonces

$$K=\left|\frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}\right|;$$

4) si una curva está dada en las coordenadas polares por la ecuación $r = r(\varphi)$, entonces

$$K=\left|\frac{r^2+2r'^2-rr'}{(r^2+r'^2)^{3/2}}\right|.$$

Se denomina *círculo osculador* de una curva en su punto M una posición límite de la circunferencia trazada por el punto M y otros dos puntos de la curva P y Q, cuando $P \to M$ y $Q \to M$.

El radio del círculo osculador es igual al radio de curvatura y el centro del círculo osculador (*centro de curvatura*), correspondiente al punto M, se encuentra en la normal a la recta trazada en el punto M en dirección de la convexidad de la curva.

Las coordenadas X e Y del centro de curvatura son

$$X=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \qquad Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

Se llama *evoluta* de una curva una línea circunscrita por el centro de curvatura cuando dicho punto se mueve por la curva. Las fórmulas para las coordenadas del centro de curvatura determinan las ecuaciones paramétricas de la evoluta.

*) Aquí se usan las derivadas parciales de una función de dos variables; véase la definición en el p. 3, § 1, Cap. 7.

EJEMPLO 4. Hállese la ecuación de la evoluta de una parábola $y^2 = 2(x+1)$.

◀ Tenemos $2yy' = 2$, es decir, $y' = \frac{1}{y}$. Luego de realizar la derivación reiterada, obtenemos $y'^2 + yy' = 0$, de donde $y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{y^3}$. Hallamos las coordenadas del centro de curvatura:

$$X = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = \frac{y^2}{2} - 1 - \frac{\frac{1}{y}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}{-1/y^3} = \frac{3}{2}y^2,$$

$$Y = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{1+\frac{1}{y^2}}{-1/y^3} = -y^3;$$

de modo que quedan determinadas las ecuaciones paramétricas de la evoluta:

$$X = \frac{3}{2}y^2, \qquad Y = -y^3.$$

Eliminando el parámetro y, hallamos la ecuación de la evoluta en la forma

$$Y^2 = \frac{8}{27}X^3. \ ▶$$

5.26. Hállense las segundas derivadas de las funciones vectoriales:

a) $\boldsymbol{r} = \cos t \cdot \boldsymbol{i} + e^t\boldsymbol{j} + (t^2+1)\,\boldsymbol{k}$.

b) $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t\cos t \cdot \boldsymbol{j} + t \operatorname{sen} t \cdot \boldsymbol{k}$

para t arbitrario y $t = 0$.

5.27. Sea dada la ecuación de movimiento: $\boldsymbol{r} = 2(t - \operatorname{sen} t)\,\boldsymbol{i} + 2(1 - \cos t)\,\boldsymbol{j}$. Determínese la aceleración del movimiento. Constrúyanse los vectores de la aceleración para los instantes $t = \pi/2$, $t = \pi$.

5.28*. Sea dada la ecuación de movimiento: $\boldsymbol{r} = 3t\boldsymbol{i} + (4t - t^2)\,\boldsymbol{j}$. Determínense la aceleración w de movimiento y los componentes de ésta, tangencial w_τ y normal w_n, en cualquier instante t y para $t = 0$.

5.29. Sea dada la ecuación de movimiento: $\boldsymbol{r} = {}^1/_2\, t^2\boldsymbol{i} + {}^1/_3\,(2t+1)^{3/2}\,\boldsymbol{j}$. Determínense la aceleración de movimiento y sus componentes tangencial y normal en cualquier instante t y para $t = 0$.

Calcúlese la curvatura de la curva dada:

5.30. $y = x^2$ en el origen de coordenadas y en el punto $M(1, 1)$.

5.31. $x^2 + 9y^2 = 9$ en los vértices de una elipse A (3, 0) y B (0, 1).

5.32. $x^2 - xy + y^2 = 1$ en el punto M (1, 1).

5.33. $x = t^2$, $y = t - {}^1/_3\, t^3$ para $t = 1$.

5.34. $x = {}^1/_2\, t^2$, $y = {}^1/_3\, t^3$ en el punto M (${}^1/_2$, ${}^1/_3$).

5.35. $r = a\,(1 - \cos\varphi)$ en cualquier punto y para $\varphi = \pi$.

5.36. $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\varphi$ para $\varphi = \pi/4$.

Hállense los radios de curvatura (en cualquier punto) de las curvas dadas:

5.37. $y = \sqrt[3]{x}$. 5.38. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

5.39. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. 5.40. $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$.

5.41. $x = a\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$.

5.42. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. 5.43. $y = a\,\varphi$.

5.44*. Se llama *vértice* de una curva un punto suyo tal que la curvatura en él alcanza su máximo o mínimo. Hállese el vértice de la curva $y = e^{-x}$.

5.45. Hállese el vértice de la curva $y = \ln x$.

Calcúlense las coordenadas de los centros de curvatura y escríbanse las ecuaciones de los círculos osculadores de las curvas dadas en los puntos indicados:

5.46. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ en el punto M (0, a).

5.47. $y = e^{-x^2}$ en el punto M (0, 1).

5.48. $y = xe^x$ en el punto M (—1, —1/e).

5.49. $y = \operatorname{sen} x$ en el punto M (π/2, 1).

5.50. $x = a\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ en el punto M (πa, $2a$).

Hállense las evolutas de las curvas:

5.51. $y = x^3$. 5.42. $x^2 - y^2 = a^2$.

5.53. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

5.54. $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$.

5.55. $x = 2t$, $y = t^2 - 2$.

5. Características diferenciales de las curvas espaciales. En todo punto regular M (x, y, z) de una curva espacial $r = r\,(t)$ se pueden construir tres vectores recíprocamente perpendiculares:

$$T = \frac{dr}{dt} \text{ (vector director de la } \textit{tangente}\text{)},$$

$$B = \left[\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}\right] \text{ (vector director de la } \textit{binormal}\text{)},$$

$N = [B, T]$ (vector de la *normal principal*)
o bien *vectores unidad* básicos que les corresponden:

$$\tau = \frac{T}{|T|}, \quad \beta = \frac{B}{|B|}, \quad \nu = \frac{N}{|N|},$$

que pueden calcularse también según las fórmulas:

$$\tau = \frac{dr}{ds}, \quad \nu = \frac{d\tau}{ds} \Big/ \left|\frac{d\tau}{ds}\right|, \quad \beta = [\tau, \nu]$$

Un triedro que tiene su vértice en el punto M_0 y cuyas aristas están representadas por la tangente, la binormal y la normal principal, lleva el nombre de *triedro intrínseco* de una curva espacial. Las caras de dicho triedro son los planos: *osculador* (pasa por los vectores T y N), *normal* (pasa por los vectores N y B), *rectificante* (pasa por los vectores B y T).

Las ecuaciones de la normal principal son de la forma

$$\frac{x - x_0}{N_x} = \frac{y - y_0}{N_y} = \frac{z - z_0}{N_z},$$

donde x, y, z son coordenadas corrientes del punto de la normal principal; N_x, N_y, N_z son las coordenadas del vector N.

La ecuación de la binormal es:

$$\frac{x - x_0}{B_x} = \frac{y - y_0}{B_y} = \frac{z - z_0}{B_z}.$$

La ecuación del plano osculador es:

$$B_x (x - x_0) + B_y (y - y_0) + B_z (z - z_0) = 0.$$

La ecuación del plano rectificante es:

$$N_x (x - x_0) + N_y (y - y_0) + N_z (z - z_0) = 0.$$

EJEMPLO 5. Hállense los vectores unidad básicos τ, ν y β de la curva $x = 1 - \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = t$ en el punto M, al cual corresponde el valor del parámetro $t = 0$. Escríbanse las ecuaciones de la tangente, de la normal principal y de la binormal en el punto citado.

◀ Tenemos

$$r = (1 - \operatorname{sen} t)\, i + \cos t \cdot j + tk,$$

$$\frac{dr}{dt} = -\cos t \cdot i - \operatorname{sen} t \cdot j + k,$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \operatorname{sen} t \cdot i - \cos t \cdot j.$$

Para $t = 0$ obtendremos

$$T=\frac{dr}{dt}=-i+k, \qquad \frac{d^2r}{dt^2}=-j,$$

$$B=\left[\frac{dr}{dt},\ \frac{d^2r}{dt^2}\right]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=i+k,$$

$$N=[B,\ T]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-2j.$$

Por consiguiente,

$$\tau+\frac{-i+k}{\sqrt{2}}, \qquad \nu=-j, \qquad \beta=\frac{i+k}{\sqrt{2}}\ .$$

Por cuanto, para $t = 0$, tenemos $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, entonces:

$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{1}$ es la ecuación de la tangente;

$\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{0}$ es la ecuación de la normal principal;

$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{1}$ es la ecuación de la binormal. ►

Si una curva espacial viene dada como una intersección de dos superficies

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ z)=0, \\ G(x,\ y,\ z)=0, \end{cases}$$

entonces resulta más cómodo operar con los vectores $dr = (dx,\ dy,\ dz)$ y $d^2r = (d^2x,\ d^2y,\ d^2z)$ en lugar de los vectores $\dfrac{dr}{dt}$, y $\dfrac{d^2r}{dt^2}$, además una de las variables x, y, z puede considerarse independiente y su segunda diferencial, igual a cero.

Ejemplo 6. Escríbanse las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante de la curva

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^2 - y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

en su punto M (1, 1, 2).

◄ Derivando las ecuaciones dadas y considerando x como una variable independiente, obtendremos:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

$$x\,dx - y\,dy + z\,dz = 0$$

y

$$dx^2 + dy^2 + yd^2y + dz^2 + zd^2z = 0,$$
$$dx^2 - dy^2 - yd^2y + dz^2 + zd^2z = 0.$$

Para $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$ tenemos:

$$dy = 0, \qquad dz = -\frac{1}{2}\,dx,$$
$$d^2y = 0, \qquad d^2z = -\frac{3}{8}\,dx^2.$$

Por consiguiente,

$$d\boldsymbol{r} = \left(dx,\ 0,\ -\frac{1}{2}\,dx\right), \qquad d^2\boldsymbol{r} = \left(0,\ 0,\ -\frac{3}{8}\,dx^2\right).$$

Sustituyamos estos vectores por los vectores que les son colineale $(2, 0, -1)$ y $(0, 0, -1)$, de donde

$$\boldsymbol{T} = (2, 0, -1)$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{N} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(-\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}).$$

De aquí hallamos:

$y - 1 = 0$, la ecuación del plano osculador;

$2x - z = 0$, la ecuación del plano normal;

$x + 2z - 5 = 0$, la ecuación del plano rectificante. ▶

Hállense los vectores unidad básicos $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ y fórmense las ecuaciones de la tangente, de la normal principal y de la binormal de las curvas dadas:

5.56. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t$ para $t = 0$.

5.57. $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4 \operatorname{sen} \frac{t}{2}$ para $t = \pi$.

5.58. $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$ para $t = 1$.

5.59. $y = x$, $z = 2x^2$ en el punto $x = 1$.

5.60. Escríbanse las ecuaciones de los planos que forman un triedro intrínseco de la curva $x = t^2 + 1$, $y = \cos t$, $z = e^t$ en el punto $(1, 1, 1)$.

5.61. Escríbanse las ecuaciones de los planos que forman un triedro intrínseco de la curva $x = t/\sqrt{2}$, $y = t/\sqrt{2}$, $z = \ln \operatorname{sen} t$ para $t = \pi/2$.

5.62. Hállense los vectores $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ y escríbanse las ecuaciones de todas las aristas y de todos los planos que forman un triedro intrínseco de la curva $x = (t + 1)^2$, $y = t^3$, $z = \sqrt{t^2 + 1}$ en el punto (1, 0, 1).

5.63. Hállense los vectores, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ y escríbanse las ecuaciones de todas las aristas y de todos los planos que forman un triedro intrínseco de la curva

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \quad \text{en el punto } (1, 2, 3).$$

La *curvatura* de una curva espacial se determina igual que la de una curva plana. Si la curva viene dada mediante la ecuación $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, entonces

$$K = \frac{1}{R} = \left| \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \right|$$

En el caso de la definición paramétrica general de una curva tenemos

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\left| \left[\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \right] \right|}{\left| \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right|^3}$$

Se llama *torsión* (*curvatura de torsión*) de una curva espacial en el punto M el número

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \lim_{N \to M} \frac{\theta}{\Delta s},$$

donde θ es el ángulo de giro de la binormal, correspondiente al arco $\overset{\frown}{MN}$. La magnitud ρ se denomina *radio de torsión* o *radio de la curvatura de torsión*.

Si $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, se tiene

$$\sigma = \mp \left| \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} \right| = \frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds} \cdot \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \cdot \dfrac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}}{\left| \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \right|^2},$$

donde el signo menos se elige en el caso, cuando los vectores $\dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ y $\boldsymbol{\nu}$ tienen orientación igual y el signo más, en el caso contrario.

Si $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, donde t es un parámetro arbitrario, entonces

$$\sigma = \frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \cdot \dfrac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}}{\left| \left[\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \right] \right|^2}.$$

EJEMPLO 7. Hállense la curvatura y la torsión de la curva $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = e^t$ en cualquier punto

◀ Tenemos

$$r = (e^t \cos t,\ e^t \operatorname{sen} t,\ e^t),$$

$$\frac{dr}{dt} = (e^t (\cos t - \operatorname{sen} t),\ e^t (\operatorname{sen} t + \cos t),\ e^t),$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = (-2e^t \operatorname{sen} t,\ 2e^t \cos t,\ e^t),$$

$$\frac{d^3r}{dt^3} = (2e^t (\operatorname{sen} t + \cos t),\ 2e^t (\cos t - \operatorname{sen} t),\ e^t).$$

De aquí

$$\left[\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt^2}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ e^t (\cos t - \operatorname{sen} t) & e^t (\operatorname{sen} t + \cos t) & e^t \\ -2e^t \operatorname{sen} t & 2e^t \cos t & e^t \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2t} (\operatorname{sen} t - \cos t,\ -(\operatorname{sen} t + \cos t),\ 2),$$

$$\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} \cdot \frac{d^3r}{dt^3} = \begin{vmatrix} e^t (\cos t - \operatorname{sen} t) & e^t (\operatorname{sen} t + \cos t) & e^t \\ -2e^t \operatorname{sen} t & 2e^t \cos t & e^t \\ -2e^t (\operatorname{sen} t + \cos t) & 2e^t (\cos t - \operatorname{sen} t) & e^t \end{vmatrix} = 2e^{3t}.$$

Por consiguiente,

$$K = \frac{e^{2t} \sqrt{(\operatorname{sen} t - \cos t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2 + 4}}{e^{3t} \sqrt{((\operatorname{sen} t - \cos t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2 + 1)^3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-t},$$

$$\sigma = \frac{2e^{3t}}{e^{4t} ((\operatorname{sen} t - \cos t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2 + 4)} = \frac{e^{-t}}{3}. \ ▶$$

Calcúlense la curvatura y la torsión de las curvas:

5.64. $x = e^t$ $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ en cualquier punto y para $t = 0$.

5.65. $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ en cualquier punto y para $t = 0$.

5.66. $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z\ 3t + t^3$, en cualquier punto y para $t = 1$.

5.67. $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$, en cualquier punto y para $t = 1$.

5.68. $y = \frac{x^2}{2}$, $z = \frac{x^3}{3}$ para $x = 1$.

5.69. $2x = y^2$, $z = x^2$ en cualquier punto y para $y = 1$.

5.70*. Sea dada la ecuación de movimiento $r = ti + t^2 j + \frac{2}{3} t^3 k$.

Hállense la aceleración w del movimiento, los componentes tangencial w_τ y normal w_ν de la aceleración en cualquier instante t y $t = 1$.

6. Funciones complejas de una variable real. Si a cada valor de la variable real $t \in D \subset \mathbb{R}$ se le ha puesto en correspondencia determinado número complejo $z = x + iy$, entonces $z(t)$ se llamará *función compleja de la variable real* t con el campo de definición D:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t).$$

La definición de la función compleja $z = z(t)$ es equivalente a la definición de dos funciones reales $x = x(t)$, $y = y(t)$, o bien a la definición de una función vectorial $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$.

Se denomina *derivada* de la función compleja $z(t)$ una función compleja $z'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta z(t, \Delta t)}{\Delta t} = x'(t) + iy'(t)$. Para las funciones complejas de una variable real son válidas las reglas corrientes de derivación (véase el p. 1, § 1).

Ejemplo 8. Hállense una curva, que se define por la función $z = t^2 + it$, $t \in (-\infty, +\infty)$, y la derivada de dicha función.

◀ Si $z = x + iy$, se tiene $x = t^2$, $y = t$. La curva buscada será una parábola $y^2 = x$. Hallamos la derivada de la función dada $z' = 2t + i$. ▶

Constrúyanse las curvas, definidas por las ecuaciones $z = z(t)$, y hállese $z'(t)$:

5.71.* $z = 1 - i + te^{i\frac{\pi}{4}}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.
5.72. $z = 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.
5.73. $z = 3e^{it} + e^{-it}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.
5.74. $z = (2 + i)e^t + (2 - i)e^{-t}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.
5.75. $z = t^2 + it^4$, $t \in (-\infty, +\infty)$.
5.76. $z = t + i - ie^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
5.77. $z = ae^{it}(1 - it)$, $a \in \mathbb{R}$, $t \in (-\infty\ +\infty)$.
5.78. $z = e^{(\alpha + i\beta)t}$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

5.79.* Se sabe que $z = z(t)$ define la ley del movimiento de un punto en un plano. Hállense los componentes de la velocidad y de la aceleración en dirección de la tangente a la curva $z = z(t)$ y en dirección perpendicular a la primera.

5.80. * Un punto z recorre una circunferencia $|z| = R$ a la velocidad angular constante igual a la unidad. Hállese el vector de la velocidad del punto w que se mueve junto con z según la ley $w = f(z)$.

§ 6. Métodos numéricos de la función de una sola variable

1. Resolución numérica de las ecuaciones. Una raíz $\xi \in (a, b)$ de la ecuación $f(x) = 0$ *está aislado* en el segmento $[a, b]$, si en dicho segmento no hay otras raíces de la ecuación mencionada. El segmento $[a, b]$ recibe el nombre de *segmento de aislación de la raíz.*

MÉTODO DE CUERDAS. Supongamos que en el segmento $[a, b]$ de aislación de la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ se cumplen las condiciones:

a) las funciones $f(x)$, $f'(x)$, y $f''(x)$ son continuas;

b) $f(a) \cdot f(b) < 0$;

c) las funciones $f'(x)$ y $f''(x)$ no cambian de signo.

Definamos los números x_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) mediante las igualdades

$$x_n = \begin{cases} x_{n-1} - \dfrac{(x_{n-1} - a) f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(a)}, & x_0 = b, \quad \text{si} \quad f(a) \cdot f(x_1) < 0, \\[2ex] x_{n-1} - \dfrac{(b - x_{n-1}) f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}, & x_0 = a, \quad \text{si} \quad f(a) \cdot f(x_1) \geqslant 0. \end{cases}$$

Entonces, la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge hacia la raíz ξ cuando $n \to \infty$, y para todos los números naturales n se cumplen las desigualdades

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m},$$

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{M - m}{m} |x_n - x_{n-1}|,$$

donde $m = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$ y $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$.

EJEMPLO 1. Hállense las raíces de la ecuación

$$x \cdot \operatorname{arctg} x - 1 = 0$$

empleando el método de cuerdas con una exactitud de hasta 0,0001.

◀ Habiendo construido las gráficas de las funciones $y = \operatorname{arctg} x$ e $y = 1/x$, concluimos, según la disposición de los puntos de intersección, que la citada ecuación tiene dos raíces ξ_1 y ξ_2, iguales en valor absoluto y distintos por su signo. Hallemos la raíz positiva ξ_1, eligiendo el segmento $[1, \sqrt{3}]$ como segmento de aislación de dicha raíz. Para la función $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - 1$ tenemos

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1 + x^2}, \qquad f''(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^2}$$

y

$$f(1) \cdot f(\sqrt{3}) = \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1\right) = -0{,}2146019 \cdot 0{,}8137992 < 0,$$

por lo cual las condiciones a), b) y c) quedan cumplidas. Por cuanto $f''(x) > 0$ cuando $x \in [1, \sqrt{3}]$, entonces $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, donde

$$m = f'(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = 1{,}2853981,$$

$$M = f'(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 1{,}4802102,$$

y $\frac{M-m}{m} = 0{,}1515577$. Con el fin de determinar el signo del producto $f(1)\cdot f(x_1)$, hallemos x_1. Dado que

$$x_1 = 1 - \frac{(\sqrt{3}-1)\,f(1)}{f(\sqrt{3}) - f(1)} = 1{,}1527608,$$

los números x_n se deben calcular según la fórmula

$$x_n = x_{n-1} - \frac{(\sqrt{3} - x_{n-1})\,f(x_{n-1})}{f(\sqrt{3}) - f(x_{n-1})}.$$

Reunamos los cálculos en una tabla:

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$-(x_n - x_{n-1})$	x_n	$\frac{M-m}{m}(x_n - x_{n-1})$
1	1	$-0{,}2146019$	$-0{,}1527608$	1,1527608	0,023152
2	1,1527608	$-0{,}0129601$	$-0{,}0090807$	1,1618415	0,0013762
3	1,1618415	$-0{,}0006758$	$-0{,}000473$	1,1623145	0,0000716

La última columna determina el error absoluto límite*). De este modo, $\xi_1 = 1{,}1623 \pm 0{,}0001$ y $\xi_2 = -1{,}1623 \pm 0{,}0001$. ▶

MÉTODO DE LAS TANGENTES. Supongamos que en el segmento $[a, b]$ de aislación de la raíz ξ de la ecuación $f(x) = 0$ se cumplen las condiciones a), b) y c), mencionadas más arriba, y los números x_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) se determinan por la ecuación

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

siendo

$$x_0 = \begin{cases} a, & \text{si } f(a)\cdot f(c) < 0, \\ b, & \text{si } f(a)\cdot f(c) > 0, \\ c, & \text{si } \quad f(c) = 0, \end{cases}$$

*) Aquí y en todos los problemas de cálculo que se dan ulteriormente, los cálculos intermedios se realizan con un número de signos decimales asegurado por la computadora electrónica que se emplea.

donde

$$c = a - \frac{(b-a) f(a)}{f(b) - f(a)} .$$

En este caso la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge hacia la raíz ξ cuando $n \to \infty$, y para todos los números naturales n se verifican las desigualdades

$$| x_n - \xi | \leqslant \frac{| f(x_n) |}{m} \quad \text{y} \quad | x_n - \xi | \leqslant \frac{M_1}{2m} (x_n - x_{n-1})^2,$$

donde

$$m = \min_{a \leqslant x \leqslant b} | f'(x) |, \quad M_1 = \max_{a \leqslant x \leqslant b} | f''(x) |.$$

EJEMPLO 2. Hállese la raíz positiva de la ecuación $x \cdot \operatorname{arctg} x - 1 = 0$, empleando el método de las tangentes con una exactitud de hasta 0,0001.

◀ Al igual que en el ejemplo antecedente, el segmento $[1, \sqrt{3}]$ será el de aislación. Por cuanto para la función $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - 1$ tenemos $c = 1 - \frac{(\sqrt{3}-1) f(1)}{f(\sqrt{3}) - f(1)} = 1{,}1527608 > 0$, entonces los números x_n se calculan conforme a la fórmula

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad x_0 = \sqrt{3}.$$

Las funciones $f'(x)$, $f''(x)$ y el valor de $m = 1{,}2853981$ se han hallado en el ejemplo 1. Luego, $M_1 = f''(1) = 0{,}25$, puesto que $f'''(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^3} < 0$ en el segmento de aislación. Por fin, $\frac{M_1}{2m} = 0{,}0972461$.

Los resultados de los cálculos se reúnen en la tabla:

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f'(x_{n-1})$	$-(x_n - x_{n-1})$	x_n	$\frac{M_1}{2m}(x_n - x_{n-1})^2$
1	1,7320508	0,8137992	1,4802102	0,5497862	1,1822646	0,0534645
2	1,1822646	0,0270628	1,3617976	0,0198728	1,1623918	0,0000384

Por consiguiente, la raíz de la ecuación $\xi = 1{,}16239 \pm 0{,}00004$. ▶

Convénzase de que las ecuaciones no tienen raíces reales

6.1. $2^x - x - {}^1/_2 = 0$, **6.2.** $x^2 - \operatorname{arctg} x + 1 = 0$.

6.3. $(x^2 + 2x + 2)^2 = 0$. **6.4.** $\sqrt{2x-1} + \lg \frac{1}{x} = 0$.

6.5. $x^4 - x^2 + 1 = 0$.

6.6.** La raíz ξ de la ecuación $f(x) = 0$ está aislada en el segmento $[a, b]$, la función $f(x)$ es continua y $f(a) \cdot f(b) < 0$. Fórmese en FORTRAN el subprograma de reducción del segmento de aislación en 2^n veces, aprovechando la partición sucesiva del segmento por la mitad. Elíjanse en calidad de parámetros las magnitudes F, A, B, N, donde F es el identificador de la función-subprograma para el cálculo de valores de la función $f(x)$, A y B son los extremos del segmento de aislación inicial antes de los cálculos y los extremos del segmento de aislación obtenido después de los mismos, N es el exponente de potencia en la expresión para 2^n que caracteriza la disminución del segmento de aislación.

6.7. Resuélvase la ecuación $x^3 + x^2 - 3 = 0$ por el método combinado, empleando el método de cuerdas y el de las tangentes, compárense los resultados.

◀ Habiendo construido las gráficas de las funciones $y = x^3$ e $y = 3 - x^2$, llegamos a la conclusión de que la ecuación citada tiene en el segmento $[1, 2]$ una raíz real ξ. Disminuyamos en cuatro veces el segmento de aislación, empleando el método de división por la mitad. Para $f(x) = x^3 + x^2 - 3$ tenemos $f(1) = -1 < 0$, y $f(2) = 9 > 0$. Hallemos $f(1{,}5) = \frac{21}{8} > 0$, por lo cual el segmento de aislación más estrecho será $[1,\ 1{,}5]$. Hallado $f(1{,}25) = 0{,}515625 > 0$ obtenemos el segmento $[1,\ 1{,}25]$. Por cuanto

$$c = 1 - \frac{(1{,}25 - 1)\, f(1)}{f(1{,}25) - f(1)} = 1{,}1649484 > 0,$$

entonces, aplicando el método de cuerdas, se debe utilizar la fórmula

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} - \frac{(1{,}25 - \bar{x}_{n-1})\, f(\bar{x}_{n-1})}{f(1{,}25) - f(\bar{x}_{n-1})} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

y, aplicando el método de tangentes, la fórmula

$$\tilde{x}_n = \tilde{x}_{n-1} - \frac{f(\tilde{x}_{n-1})}{f'(\tilde{x}_{n-1})} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \quad \tilde{x}_0 = 1{,}25.$$

Los resultados de los cálculos se reúnen en dos tablas:

a) para el método de cuerdas:

n	$\bar{x}_{n-1}$	$f(\bar{x}_{n-1})$	$-(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1})$	$\bar{x}_n$
1	1	−1	−0,1649484	1,1649484
2	1,1649484	−0,0619384	−0,0091209	1,1740693
3	1,1740693	−0,0031786	−0,0004651	1,1745344

b) para el método de tangentes:

n	$\tilde{x}_{n-1}$	$f(\tilde{x}_{n-1})$	$f'(\tilde{x}_{n-1})$	$-(\tilde{x}_n-\tilde{x}_{n-1})$	$\tilde{x}_n$
1	1,25	0,515625	7,1875	0,0717391	1,1782609
2	1,1782609	0,0240767	6,5214179	0,0036919	1,1745690

Calculando por el método de cuerdas, hemos obtenido una sucesión creciente $(\bar{x}_n)$ de las aproximaciones de la raíz ξ:

$$1 < 1{,}1649484 < 1{,}1740693 < 1{,}1745344 < \ldots < \xi,$$

y calculando por el método de las tangentes, una sucesión decreciente $(\tilde{x}_n)$:

$$\xi < \ldots < 1{,}1745690 < 1{,}1782609 < 1{,}25.$$

Los signos decimales coincidentes de los términos de ambas sucesiones son exactos para la raíz ξ. Partiendo del error absoluto límite ε, el valor de n, para el cual se alcanza la exactitud requerida, se halla de la desigualdad

$$|\bar{x}_n - \tilde{x}_n| < \varepsilon$$

siendo $\xi = \frac{1}{2}(\bar{x}_n + \tilde{x}_n) \pm \varepsilon$. De este modo,

$$\xi = 1{,}17455 \pm 0{,}00003. \blacktriangleright$$

Empleando uno de los métodos mencionados, calcúlense con una exactitud de hasta 0,0001 las raíces reales de las ecuaciones: a) por el método de cuerdas, b) por el método de tangentes, c) por el método combinado:

6.8. $x^3 + 2x - 8 = 0$, **6.9.** $x^3 + x + 1 = 0$.
6.10. $x^4 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$, **6.11.** $x^3 + 2x - 30 = 0$.
6.12. $x^6 - 3x^2 + x - 1 = 0$. **6.13.** $x^3 - 2x - 5 = 0$.
6.14. $x^3 - 5x + 1 = 0$. **6.15.** $2x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$.
6.16. $(x + 1)^3 - x = 0$. **6.17.** $x^4 - 2x - 2 = 0$.
6.18. $x^4 - 4x + 1 = 0$. **6.19.** $x^5 + x + 1 = 0$.
6.20. $x = \sqrt[3]{5 - x}$. **6.21.** $x = 2 + \sqrt[4]{x}$.
6.22. $x^3 + 60x - 80 = 0$. **6.23.** $x^5 - x - 2 = 0$.
6.24. $x = 10 \lg x$. **6.25.** $x = 2 - \lg x$.
6.26. $x^2 = -\ln x$. **6.27.** $x^2 = \ln (x + 1)$.
6.28. $4x = 2^x$. **6.29.** $x^2 = e^x + 2$.
6.30. $x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$. **6.31.** $x - \cos x = 0$.
6.32. $x^2 = \cos x$. **6.33.** $x = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}$.

6.34. $\ln x = \operatorname{arctg} x$. **6.35.** $x^2 + \ln x - 4 = 0$.

6.36. $x^2 \operatorname{arctg} x - 1 = 0$.

6.37. Fórmese en FORTRAN un programa para la resolución del siguiente problema: hállense, empleando el método de cuerdas, las raíces de la ecuación $e^{x-2} - x = 0$ con una exactitud de hasta 0,0001.

◀ Se debe representar el programa como un conjunto de tres unidades de programa: programa principal, función-subprograma para determinar la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ por el método de cuerdas en el segmento de aislación de la raíz $[a, b]$, función-subprograma para calcular los valores de la función $f(x)$.

Función-subprograma para calcular los valores de la función:

```
FUNCTION F (X)
F = EXP (X - 2) - X
RETURN
END
```

Función-subprograma para determinar la raíz por el método de cuerdas. Los parámetros: F, A, B, S, EPS, F es el nombre de la función-subprograma para calcular los valores de la función $f(x)$, A y B son los extremos del segmento de aislación de la raíz, S es el valor mínimo de $|f'(x)|$ en el segmento de aislación, EPS es el error absoluto límite.

```
  FUNCTION CHORD (F, A, B, S, EPS)
  FA = F (A)
  FB = F (B)
  X = A - (B - A) * FA/(FB - FA)
  FX = F (X)
  IF (FA * FX.GT.0) GO TO 2
1 X = X - (X - A) * FX/(FX - FA)
  FX = F (X)
  IF (FX/S.GT.EPS) GO TO 1
  CHORD = X
  RETURN
2 X = X - (B - X) * FX/(FB - FX)
  FX = F (X)
  IF (FX/S.GT.EPS) GO TO 2
  CHORD = X
  RETURN
  END
```

Los operadores FA = F (A), FB = F (B) y FX = F (X) se emplean en el subprograma citado para evitar cálculos superfluos de los valores de la función $f(x)$; al realizarse el programa, la notación F (X) conlleva el acceso a la función-subprograma y el cálculo del valor correspondiente de esta función.

Programa principal. Analizando el comportamiento de la función $f(x) = e^{x-2} - x$ y de su derivada $f'(x) = e^{x-2} - 1$, concluimos que la ecuación $e^{x-2} - x = 0$ tiene dos raíces en los segmentos [0, 0,3] y [3, 3,2]. Por cuanto $f''(x) = e^{x-2} > 0$, entonces $f'(x)$ crece y se cumplen las desigualdades $0{,}864665 = e^{-2} - 1 \leqslant f'(x) \leqslant e^{-1,7} - 1 = -0{,}817316$ para $x \in [0,\ 0{,}3]$, $1{,}718281 = e - 1 \leqslant f'(x) \leqslant e^{1,2} - 1 = 2{,}320116$ para $x \in [3,\ 3{,}2]$. Por esta razón, $|f'(x)| > 0{,}8173$ en el primer caso y $|f'(x)| > 1{,}7182$, en el segundo. Estos números determinan, junto con los extremos de los segmentos de aislación y el error absoluto límite dado, los valores de los parámetros, esto es, como suele decirse, son parámetros verdaderos para el subprograma CHORD. El programa principal tiene la forma siguiente:

```
  EXTERNAL F
  ROOT 1 = CHORD (F, 0, 0, 0.3, 0.8173, 0.0001)
  ROOT 2 = CHORD (F, 3, 3.2, 1.7182, 0.0001)
  WRITE (3,1) ROOT 1, ROOT 2
1 FORMAT ('RAÍCES DE LA ECUACIÓN', F6.4', y', F6.4)
  STOP
  END
```

▶

Fórmense en FORTRAN las funciones-subprogramas para hallar, mediante el método indicado, las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ en el segmento de aislación $[a, b]$. Los parámetros: F, A, B, S, EPS; F es el nombre de la función-subprograma para calcular el valor de la función $f(x)$, A y B son extremos del segmento de aislación, S es un parámetro definido más abajo, EPS, el error absoluto límite. El parámetro FD es el nombre de la función-subprograma para el cálculo de $f'(x)$.

6.38. Método de las cuerdas. Parámetros: F, A, B, S, EPS, $S = \frac{M-m}{m}$, donde $M = \max |f'(x)|$ y $m = \min |f'(x)|$ para $x \in [a, b]$.

6.39. Método de las tangentes. Parámetros: F, FD, A, B, S, EPS, $S = \frac{M_1}{2m}$, donde $M_1 = \max |f''(x)|$ y $m = \min |f'(x)|$ para $x \in [a, b]$.

6.40. Método combinado. Parámetros: F, FD, A, B, EPS.

6.41. Fórmese en FORTRAN, para la ecuación $f(x) = 0$ en uno de los problemas 6.8—6.36, la función-subprograma para calcular los valores de la función $f(x)$.

Fórmense en FORTRAN los programas de resolución de uno de los probemas 6.8—6.36, aplicando el método indicado.

6.42. Método de cuerdas. Utilícense las soluciones de los problemas 6.38 y 6.41.

6.43. Método de tangentes. Hágase uso de las soluciones de los problemas 6.39 y 6.41.

6.44. Método combinado. Utilícense las soluciones de los problemas 6.40 y 6.41.

2. Interpolación de las funciones. Supongamos que la función $y = f(x)$ toma en los nudos de interpolación $x_k \in [a, b]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, los valores $f(x_k) = y_k$; entonces las *diferencias partidas* se determinan mediante las igualdades:

$$\Delta y(x_k, x_{k+1}) = \frac{y_k - y_{k+1}}{x_k - x_{k+1}},$$

$$\Delta y(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = \frac{\Delta y(x_k, x_{k+1}) - \Delta y(x_{k+1}, x_{k+2})}{x_k - x_{k+2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta y(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l-1}, x_{k+l}) =$$

$$= \frac{\Delta y(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l-1}) - \Delta x(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l})}{x_k - x_{k+l}},$$

y el *polinomio de interpolación* de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ tiene por expresión

$$p_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}) \Delta y(x_0, x_1, \ldots, x_k); \quad (1)$$

además, en el caso de existencia de la derivada continua $f^{(n+1)}(x)$ en $[a, b]$ se verifica la desigualdad

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|, \quad (2)$$

donde

$$M_{n+1} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Ejemplo 3. Hállese $\sqrt{2}$ con una exactitud de hasta 0,0001, construyendo para la función $f(x) = \sqrt{x}$ un polinomio de interpolación en el segmento $[1,69, 2,25]$.

◀ Elijamos $n = 2$ y los nudos de interpolación $x_0 = 1,69$, $x_1 = 1,96$, $x_2 = 2,25$. Estimemos la exactitud según la fórmula (2). Puesto que $f^{(IV)}(x) = -\frac{15}{16} x^{-7/2} < 0$, la función $f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-5/2}$ va decreciendo en el segmento $I = [1,69, 2,25]$; por esta razón

$$M_3 = \max_{x \in I} f'''(x) = f'''(1,69) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{(1,69)^2 \cdot 1,3} = 0,1009984.$$

En este caso para la diferencia $r_2(x) = f(x) - p_2(x)$ obtendremos la desigualdad

$$|r_2(x)| < \frac{M_3}{3!} |(x-1{,}69)(x-1{,}96)(x-2{,}25)|,$$

de donde proviene el cumplimiento de la desigualdad

$$|r_2(x)| < \frac{0{,}1009984}{6} 0{,}31 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}25 = 0{,}0000521$$

y la obtención de la exactitud deseada.

Hallemos los coeficientes del polinomio de interpolación, calculando las diferencias partidas y reuniendo los resultados de los cálculos en la tabla:

k	x_k	y_k	$\Delta y(x_k, x_{k+1})$	$\Delta y(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$
0	1,69	1,3	$\frac{1{,}3-1{,}4}{1{,}69-1{,}96}=0{,}3703703$	$\frac{0{,}3703703-0{,}3448275}{1{,}69-2{,}25}=$
1	1,96	1,4		$=-0{,}0456121$
2	2,25	1,5	$\frac{1{,}4-1{,}5}{1{,}96-2{,}25}=0{,}3448275$	

El polinomio tiene la forma

$$p_2(x) = 1{,}3 + 0{,}3703703(x-1{,}69) - 0{,}0456121(x-1{,}69) \times \\ \times (x-1{,}96),$$

$$p_2(2) = 1{,}3 + 0{,}3703703 \cdot 0{,}31 - 0{,}0456121 \cdot 0{,}31 \cdot 0{,}04 = \\ = 1{,}3 + 0{,}1148147 - 0{,}0005655 = 1{,}4142492.$$

De aquí

$$\sqrt{2} = 1{,}4142 \pm 0{,}0001. \blacktriangleright$$

Las *diferencias finitas* $\Delta^k y_i$ ($k = 1, 2, \ldots; i = 0, 1, 2, \ldots$) se determinan por las igualdades

$$\Delta^1 y_i = \Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$
$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i.$$

Para los *nudos equidistantes* $x_k = x_0 + kh$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) donde el paso de interpolación $h > 0$, el polinomio de interpolación (1) adquiere la forma

$$p_n(x)=y_0+\sum_{k=0}^{n}\frac{t(t-1)\ldots(t-k+1)}{k!}\Delta^k y_0, \qquad (3)$$

donde $t=\frac{x-x_0}{h}$ y $\Delta^k y_0$ son diferencias finitas de k-ésimo orden, mientras que la desigualdad (2) toma la forma

$$|f(x)-p_n(x)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}h^{n+1}\left|\prod_{k=0}^{n}(t-k)\right|. \qquad (4)$$

EJEMPLO 4. La función $y=f(x)$ está dada por la tabla

x	1,0	1,1	1,2	1,3
y	2,7854	2,8330	2,8761	2,9151

Determínese la expresión analítica, por medio de la cual la función citada puede representarse en el segmento [1, 1,3] y calcúlese $f(1,15)$.

◀ Una expresión analítica que permite calcular los valores de la función $f(x)$, que no se dan en la tabla, la buscaremos en forma de un polinomio cuyos valores coinciden con los valores dados de la función, es decir, en forma del polinomio $p_3(x)$ que satisface las correlaciones $p_3(x_k)=f(x_k)$ para $k=0, 1, 2, 3$. Un único polinomio que posee estas propiedades es el polinomio de interpolación $p_3(x)$, definido por la igualdad (3). Hallemos las diferencias finitas, reuniendo los resultados de los cálculos en la siguiente tabla:

k	x_k	y_k	Δy_k	Δy_k^2	Δy_k^3
0	1	2,7854			
1	1,1	2,8330	0,0476	−0,0045	
2	1,2	2,8761	0,0431	−0,0041	0,0004
3	1,3	2,9151	0,0390		

Aplicando la fórmula (3) para $h=0,1$, $n=3$ y $x_0=1$, obtendremos

$$p_3(x)=2,7854+0,476(x-1)-0,225(x-1)(x-1,1)+$$
$$+0,0666(x-1)(x-1,1),(x-1,2).$$

Entonces

$$p_3(1,15)=2,7854+0,476\cdot 0,15-0,225\cdot 0,15\cdot 0,05+$$
$$+0,0666\cdot 0,15\cdot 0,05(-0,05)=2,7854+0,0714-$$
$$-0,0017+0,0000=2,8551.$$

Para calcular $f(1,15)$ observemos que $f(1,15)=p_3(1,15)$ y como error absoluto límite de la igualdad $f(x)=p_n(x)$ se considerará, siempre que la derivada $f^{(n+1)}(x)$ sea desconocida, el módulo del último de los sumandos que figuran en la suma (3). Por eso $f(1,15) = 2,8551$. ▶

6.45*. Demuéstrese la igualdad

$$\Delta^k y_i = \sum_{\nu=0}^{k} C_k^\nu (-1)^\nu y_{k+i-\nu},$$

donde $C_k^\nu = \dfrac{k!}{\nu!\,(k-\nu)!}$, $0! = 1$.

6.46*. Demuéstrese la igualdad

$$\Delta y(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{y_\nu}{w_k'(x_\nu)}$$

donde $w_k = \prod_{i=1}^{k} (x - y_i)$.

6.47. Para la función $f(x) = \cos \frac{\pi}{12} x$ constrúyase un polinomio de interpolación, eligiendo los nudos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Hállese $\cos \frac{\pi}{10}$ y estímese la exactitud.

6.48. Para la función $f(x) = \ln x$ constrúyase un polinomio de interpolación eligiendo los nudos $x_0 = 9$, $x_1 = 10$, $x_2 = 12$, $x_3 = 15$ y empleando los valores de $\ln 2 = 0,693147$, $\ln 3 = 1,098613$ y $\ln 5 = 1,609438$. Hállese $\ln 11$ y estímese la exactitud.

La función $y = f(x)$ viene dada por medio de una tabla. Hállense los valores de esta función para los valores indicados x_1 y x_2 del argumento x que no figuran en la tabla.

6.49.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
y	1,0[illegible]2	1,061	1,087	1,119	1,160	1,212	1,274	1,350

$x_1 = 1,26$, $x_2 = 1,58$.

6.50.

x	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
y	1,958	2,107	2,268	2,443	2,632	2,841	3,071	3,324

$x_1 = 1,89$, $x_2 = 2,43$.

6.51.

x	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
y	0,742	0,789	0,835	0,880	0,924	0,967	1,008	1,046

$x_1 = 0{,}83$, $x_2 = 0{,}97$.

6.52.

x	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	2,05
y	1,2322	1,2097	1,1789	1,1380	1,0888	1,0281	0,9558	0,8713

$x_1 = 1{,}74$, $x_2 = 1{,}97$.

6.53.

x	2,70	2,75	2,80	2,85	2,90	2,95	3,00	3,05
y	1,5827	1,4865	1,3721	1,2383	1,0838	0,9071	0,7069	0,4817

$x_1 = 2{,}72$, $x_2 = 2{,}93$.

6.54.

x	10	15	20	25	30	35	40	45
y	0,985	0,966	0,940	0,906	0,866	0,819	0,766	0,707

$x_1 = 23$, $x_2 = 41$.

6.55.

x	1,1	1,6	2,1	2,6	3,1	3,6	4,1	4,6
y	1,029	1,389	1,649	1,800	1,852	1,822	1,739	1,632

$x_1 = 1{,}3$ $x_2 = 4{,}0$.

6.56.

x	0,13	0,18	0,23	0,28	0,33	0,38	0,43	0,48
y	0,1296	0,1790	0,2280	0,2764	0,3242	0,3712	0,4173	0,4626

$x_1 = 0{,}20$, $x_2 = 0{,}41$.

6.57.

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
y	0,1198	0,0897	0,0660	0,0477	0,0339	0,0236	0,0162	0,0109

$x_1 = 1{,}25$, $x_2 = 1{,}76$.

6.58.

x	50	55	60	65	70	75	80	85
y	0,285	0,319	0,223	0,042	−0,148	−0,273	−0,283	−0,178

$x_1 = 58$, $x_2 = 79$.

6.59. Calcúlese el valor del *seno integral* $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ para $x = 0{,}26$ y $x = 0{,}45$, haciendo uso de la tabla de sus valores:

x	0,17	0,22	0,27	0,32	0,37	0,42	0,47	0,52
$\mathrm{Si}(x)$	0,16973	0,21941	0,26891	0,31819	0,36720	0,41591	0,46427	0,51225

6.60. Calcúlense los valores de la *integral de probabilidades* $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ para $x = 0{,}27$ y $x = 0{,}58$, haciendo uso de la tabla de sus valores:

x	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75
$\Phi(x)$	0,05637	0,16800	0,27633	0,37938	0,47548	0,56332	0,64203	0,71116

6.61. Empleando la interpolación, resuélvase la ecuación

$$x \cdot \ln x - 1 = 0.$$

◀ En un segmento de aislación de la raíz $I = [1{,}6,\ 1{,}9]$ para la función $y = x \ln x - 1$ tenemos:

x	1,6	1,7	1,8	1,9
y	−0,2479952	−0,0979324	0,0580148	0,2195226

La función $y = x \ln x - 1$ crece en el segmento I, puesto que $y' = \ln x + 1 > 0$ para $x \in I$. Por consiguiente, existe una función inversa $x = \varphi(y)$, para la cual, considerando ahora y como argumento y x, como valor de la función, construimos el polinomio de interpolación $x_3(y)$. Este procedimiento lleva el nombre de *interpolación in-*

versa. Reuniendo en la tabla los resultados de los cálculos obtenemos:

k	y	x	$\Delta x(y_k, y_{k+1})$	$\Delta x(y_k, y_{k+1}, y_{k+2})$	$\Delta x(y_k, y_{k+2}, y_{k+3})$
0	—0,2479952	1,6			
1	—0,0979324	1,7	0,6663876	—0,0821705	
2	0,0580148	1,8	0,6412420	—0,0695452	0,0270049
3	0,2195226	1,9	0,6191651		

De aquí el polinomio buscado tiene la forma

$$x_3(y) = 1{,}6 + 0{,}6663876\,(y + 0{,}2479952) -$$
$$- 0{,}0821705\,(y + 0{,}2479952)\,(y + 0{,}0979324) +$$
$$+ 0{,}0270049\,(y + 0{,}2479952)\,(y + 0{,}0979324)\,(y - 0{,}0580148).$$

Para hallar la raíz, se debe poner $y = 0$. Obtenemos

$$x_3(0) = 1{,}6 + 0{,}1652609 - 0{,}0019956 - 0{,}000038 = 1{,}7632273.$$

Por consiguiente, la raíz es igual a $1{,}76323 \pm 0{,}00004$, donde el error absoluto límite se supone igual a la magnitud absoluta del último sumando en la expresión para $x_3(0)$. ▶

6.62. Haciendo uso de la tabla para los valores de la función $y = f(x)$, hállese el valor x_0, para el cual $f(x_0) = 0{,}569$:

x	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85
y	—1,125	—0,926	—0,704	—0,458	—0,187	0,109	0,432	0,782

6.63. Haciendo uso de la tabla para los valores de la función $y = f(x)$, hállese el valor x_0, para el cual $f(x_0) = 4{,}498$:

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y	2,431	2,928	3,497	4,144	4,875	5,696

6.64. Haciendo uso de la tabla resuélvase, por el método de la interpolación inversa, la ecuación sh $x = 4{,}9370$:

x	2	2,2	2,4	2,6
y	3,6269	4,4571	5,4662	6,6947

6.65. Haciendo uso de la tabla, resuélvase por el método de la interpolación inversa la ecuación $\operatorname{tg} x = 1,767$:

x	60°	61°	62°
y	1,732	1,804	1,881

Fórmense en FORTRAN los subprogramas siguientes:

6.66. El subprograma de cálculo de las diferencias partidas $\Delta y(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\Delta y(x_1) = y(x_1)$. Los parámetros: X, Y, N, donde N es el número de elementos de las tablas X e Y que contienen los valores del argumento y los de la función, respectivamente. El resultado de los cálculos se contiene en la tabla Y.

6.67. * El subprograma de cálculo de las diferencias finitas $\Delta_{y_i}^k$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. Y y N son los parámetros (Y es una tabla que contiene N elementos) de los valores de la función a la entrada y las diferencias finitas, a la salida del subprograma.

6.68*. La función-subprograma de cálculo de los valores del polinomio de interpolación para una función dada por medio de una tabla. Los parámetros: X, Y, N, KEY, ARG, donde X es la tabla de valores del argumento, Y es la tabla de valores de la función, si KEY = 0, y la tabla de diferencias partidas, si KEY $\neq$ 0, N es la dimensión de las tablas X e Y, ARG es el valor del argumento del polinomio.

6.69. El subprograma de cálculo de los valores del polinomio de interpolación de una función dada por medio de una tabla. Los parámetros: X, Y, N, KEY, ARG, P, EPS, donde X es la tabla de valores del argumento, Y es la tabla de valores de la función, si KEY = 0, y la tabla de diferencias partidas, si KEY $\neq$ 0, N es la dimensión de las tablas X e Y, ARG es el valor del argumento del polinomio, P es el valor del polinomio, EPS es el módulo del último sumando que figura en el polinomio de interpolación.

6.70. La función-subprograma de cálculo de los valores del polinomio de interpolación de una función dada por medio de una tabla, siendo equidistantes los nudos de interpolación. Los parámetros: X, H, Y, N, KEY, ARG, donde X es el nudo de interpolación inicial, H es el paso, Y es la tabla de valores de la función, si KEY = 0, y la tabla de las diferencias finitas de coeficientes correspondientes, si KEY $\neq$ 0, N es la magnitud de la tabla, ARG es el valor del argumento del polinomio.

6.71. Haciendo uso de la función-subprograma obtenida en el problema 6.70, resuélvase con ayuda de una computadora electrónica uno de los problemas del 6.49 al 6.60.

6.72. Utilizando la función-subprograma obtenida en el problema 6.68, resuélvase con ayuda de una computadora electrónica uno de los problemas del 6.61 al 6.65.

6.73. Haciendo uso del subprograma obtenido en el problema 6.69, resuélvase con ayuda de una computadora electrónica uno de los problemas del 6.62 al 6.63.

3. Diferenciación numérica. Las fórmulas para la diferenciación numérica se obtienen como resultado de la derivación de las fórmulas de interpolación:

$$f'(x) \approx p_n'(x) = \Delta y(x_0, x_1) + ((x - x_0) + (x - x_1)) \times$$
$$\times \Delta y(x_0, x_1, x_2) + ((x - x_0)(x - x_1) + (x - x_0)(x - x_2) +$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2)) \Delta y(x_0, x_1, x_2, x_3) + \ldots,$$

con la particularidad de que el error de la igualdad aproximada $f'(x) = p_n'(x)$ es igual a la derivada del error $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$.

En el caso de los nudos equidistantes $x_k = x_{k-1} + h$ ($k = 1, \ldots, n$), $x_k \in [a, b]$ y $f(x_k) = y_k$ son válidas las relaciones

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{6}\Delta^3 y_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{2t^3-9t^2+11t-3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right). \qquad (5)$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y + (t-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6t^2-18t+11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right), \qquad (6)$$

donde $t = \frac{1}{h}(x - x_0)$. Las fórmulas (5) y (6) tienen cada una n y $n - 1$ sumandos, respectivamente.

EJEMPLO 5. Un punto material M se mueve rectilíneamente. La ley de movimiento $s = f(\tau)$ está representada por medio de una tabla (τ es el tiempo en segundos, s es el camino en metros):

τ	0	1	2	3	4	5	6
s	0	2	10	30	68	130	222

Hállese la velocidad v y la aceleración w del punto M en el instante de tiempo $\tau = 3,5$.

◀ Formemos la tabla de diferencias finitas de la función $s = f(\tau)$

τ	s	Δs	$\Delta^2 s$	$\Delta^3 s$	$\Delta^4 s$
0	0				
		2	6		
1	2			6	
		8	12		0
2	10			6	
		20	18		0
3	30			6	
		38			0
4	68		24	6	
		62			
5	130		30		
		92			
6	222				

Considerando $\tau = 3$ como el instante de tiempo inicial, más próximo a $\tau = 3{,}5$, tendremos $t = \frac{3{,}5-3}{1} = 0{,}5$. Aplicando las fórmulas (5) y (6), obtenemos:

$$v = f'(3{,}5) = \frac{1}{1}\left(38 + \frac{2\cdot 0{,}5-1}{2}\,24 + \frac{3\cdot(0{,}5)^2-6\cdot 0{,}5+2}{6}\cdot 6\right) = \\ = 37{,}75 \text{ m/s}.$$

$$w = f''(3{,}5) = \frac{1}{1^2}\left(24 + (0{,}5-1)\cdot 6 + \frac{6\cdot(0{,}5)^2-18\cdot 0{,}5+11}{12}\cdot 0\right) = \\ = 21 \text{ m/s}^2. ▶$$

La función $f(x)$ viene dada por la tabla. Calcúlense los valores de la derivada $f'(x)$ en los puntos indicados x_1 y x_2:

6.74.

x	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$f(x)$	1,44013	1,54722	1,67302	1,81973	1,98970	2,18547	2,40978	2,66557

$x_1 = 2{,}03$, $x_2 = 2{,}22$.

6.75.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
$f(x)$	1,0083	1,1134	1.2208	1,3310	1,4449	1,5634	1,6876	1,8186

$x_1 = 1{,}14$, $x_2 = 1{,}42$.

6.76.

x	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
$f(x)$	3,92847	4,41016	4,93838	5,51744	6,15213	6,84782	7,61045	8,44671

$x_1 = 3,02$, $x_2 = 3,31$.

6.77.

x	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
$f(x)$	0,2803	0,3186	0,3592	0,4021	0,4472	0,4945	0,5438	0, 5952

$x_1 = 0,82$, $x_2 = 1,03$

6.78.

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
$f(x)$	0,8802	0,9103	0,9340	0,9523	0,9661	0,9764	0,9838	0,9891

$x_1 = 1,34$, $x_2 = 1,65$.

Calcúlense los valores de $f'(x)$ y $f''(x)$ en el punto que se indica:

6.79.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	5	21	55	113	201

$x = 2$.

6.80.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	3	19	85	261	631

$x = 2,5$.

Fórmense en FORTRAN las siguientes funciones-subprogramas:

6.81*. La función-subprograma de cálculo de los valores de la primera derivada del polinomio $w_n(t) = \prod_{k=0}^{n}(t-k)$. Los parámetros son: N, T.

6.82*. La función-subprograma de cálculo de los valores de la segunda derivada del polinomio $w_n(t) = \prod_{k=0}^{n}(t-k)$. Los parámetros son: N, T.

6.83. La función-subprograma de cálculo de los valores de la primera derivada del polinomio de interpolación

$$p_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{t(t-1)\ldots(t-k+1)}{k!}\Delta^k y_0, \quad t = \frac{x-x_0}{h}.$$

Los parámetros: X, H, Y, N, KEY, ARG, donde X es el nudo de interpolación inicial, Y es la tabla de valores de la función para KEY = 0 y la tabla que contiene las magnitudes y_0, $\frac{1}{k!}\Delta^k y_0$ $(k = 1, \ldots, n)$ para KEY $\neq 0$, ARG es el valor del argumento, para el cual se calcula la derivada, N es $n+1$.

6.84. La función-subprograma de cálculo de los valores de la segunda derivada del polinomio de interpolación $p_n(x)$. Los parámetros son los mismos que en el problema 6.83.

6.85. Haciendo uso de la función-subprograma formada en el problema 6.83, escríbase en FORTRAN el programa de resolución de uno de los problemas del 6.74 al 6.78.

6.86. Haciendo uso de las funciones-subprogramas formadas durante la resolución de los problemas 6.83 y 6.84, escríbanse en FORTRAN el programa de resolución de uno de los problemas 6.79, 6.80.

RESPUESTAS

1.1. 0,331. 1.2. 0,5. 1.3. -1. 1.5. $(\Delta x)^2 - 2\Delta x$. 1.6. $e(e^{\Delta x}-1)$. 1.7. $\log_2(1+\Delta x)$. 1.9. $-\frac{2}{x^3}$. 1.10. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 1.11. $2^x \ln 2$. 1.12. $\frac{1}{x} \times \times \log_2 e$. 1.14. ● Utilícese la identidad: $xf(x_0) - x_0f(x) = (xf(x_0) - x_0f(x_0)) - (x_0f(x) - x_0f(x_0))$. 1.15. $f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = f'_-(1) = 0$, $f'_+(1) = 2$. 1.17. $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$.

1.18. $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$. 1.19. $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=0$.

1.20. ● La función $y=\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ no tiene límite para $x\to 0$.

1.21. $-2+\frac{8}{3}x^3$. 1.22. $-\frac{25x^4}{a^2}$ 1.23. $\frac{\sqrt{x}\,(19x^5+9a)}{6\sqrt[3]{(x^5+a)^2}}$.

1.24. $-\frac{3}{5}a\frac{1}{\sqrt[5]{x^8}}+\frac{2}{3b\sqrt[3]{x}}$. 1.25. $\frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$. 1.26. $\frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$.

1.27. $\frac{2}{\sqrt{x}\,(2-\sqrt{x})^2}$. 1.28. $-\frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$. 1.29. $\frac{2\cos^3 x-3}{\cos^2 x}$.

1.30. $\frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$. 1.31. $-\frac{1}{(x^2+4)\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}}$.

1.32. $\frac{x^2-1}{3x^2\cos^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{\left(1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)^2}}$.

1.33. $-\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}\cdot\operatorname{sen}\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{3}\right)$. 1.34. $\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\operatorname{sen}\sqrt{x}}}$.

1.35. $\frac{1}{2(1+x^2)}$. 1.36. $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}\operatorname{sgn}(\operatorname{sen}x)$. 1.37. $\frac{e^{x/2}}{2\sqrt{x}}\times$ $\times(1+x)$. 1.38. $-e^{-x^2}\frac{1+2x^2}{2x^2}$. 1.39. $2^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\ln 2$.

1.40. $2^{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}}\cdot\ln 2\cdot\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\operatorname{sen}x)$. 1.41. $3^{2^x}\cdot 2^x\ln 3\cdot\ln 2$.

1.42. $\frac{1}{x}\lg\left(\frac{x^2}{10}\right)$. 1.43. $\frac{1}{x^{\ln 2}\cdot\ln 2x}$.

1.44. $\frac{e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}(2ax+b)}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}\,(ax^2+bx+c)}$.

1.45. $\frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}$. 1.46. $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

1.47. $\operatorname{ch}x$. 1.48. $\operatorname{sh}x$. 1.49. $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. 1.50. $-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

1.51. $\frac{(x-3)(19x-17)}{(x+1)^4}$. 1.52. $\frac{10-2x-2x^2}{3x^2\sqrt[3]{x^2(x+2)^2(x-1)}}$.

1.53. $-\frac{2x^2+9x+1}{2\sqrt{x+2}\sqrt[3]{(x-1)^5(2x+1)^4}}$.

1.54. $\frac{11x^5-7x^4-58x^3+48x^2}{4\sqrt{x-1}\sqrt{(x+2)^3}\sqrt[4]{(x-2)^5}}$. 1.55. $x^x(\ln x-1)$.

1.56. $x^{2^x}\cdot 2^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\cdot\ln 2\right)$. 1.57. $(\sqrt{x})^{\sqrt[3]{x}}\,\frac{3+\ln x}{6\sqrt[3]{x^2}}$.

1.58. $(\ln x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-\ln x \cdot \ln \ln x}{x^2 \ln x}$. 1.59. $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arcsen} x}\left(\frac{\ln \operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x^2}}+\right.$ $\left.+\operatorname{arcsen} x \cdot \operatorname{ctg} x\right)$. 1.60. $x^{x^x} \cdot x^{x-1}(1+x \ln x(\ln x-1))$. 1.61. $\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \times$ $\times\left(\ln \ln x+\frac{1}{\ln x}-\frac{2 \ln x}{x}\right)$. 1.62. $x^{x^2+1}\left(1+\ln x^2\right)+x^{2x} \cdot 2^x \times$ $\times\left(\frac{1}{x}+\ln 2 \cdot \ln x\right)+2^{x^x} \ln 2 \cdot x^x(\ln x+1)$, $x>0$. ● Hállese la derivada de cada uno de los sumandos. 1.63. $-\operatorname{sen} 2x \times$ $\times \frac{1+2\sqrt{1+\cos^2 x}}{2\sqrt{1+\cos^2 x}\left(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)}$. ● A título de derivada intermedia se toma $u=\cos^2 x$, y, a continuación, se hace uso de la regla de derivación de una función compuesta. 1.64. $-\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \times$ $\times(2 \ln \arccos x+1)$. 1.65. $-2xe^{-x^2} \frac{\operatorname{arcsen} e^{-x^2}+e^{-x^2}\left(1-e^{-2x^2}\right)^{1/2}}{\left(1-e^{-2x^2}\right)^{3/2}}$.

1.66. $-\frac{a^{-x} \ln a}{\left(1+a^{-2x}\right)^2}\left(4a^{-x} \operatorname{arctg} a^{-x}+a^{-2x}-1\right)$. 1.67. $a=2$, $b=0$. ● Las condiciones de continuidad $\lim\limits_{x \to -0} f(x)=\lim\limits_{x \to +0} f(x)$ y las de derivabilidad $f'_-(0)=f'_+(0)$ constituyen en total un sistema de dos ecuaciones respecto de a y b. 1.68. $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$.

1.69. $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{\left(1-x^6\right)^2\left(1-x^3\right)^2}}$. 1.70. $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

1.71. $\frac{1}{m+n}\left(n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{m}{m+n}}-m\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{n}{m+n}}\right)$. 1.72. $-\operatorname{sen} \times$ $\times 2x \cos(\cos 2x)$. 1.73. $\frac{m \operatorname{sen} mx}{\cos^{n+1} mx}=\frac{m \operatorname{tg} mx}{\cos^n mx}$. 1.74. $\left(\frac{a}{b}\right)^x \times$ $\times\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{a}{x}\right)^b\left(\frac{b-a}{x}+\ln \frac{a}{b}\right)$, $x>0$. 1.75. $\frac{n}{x \ln mx}$. 1.76. $\frac{1}{3x^2-2}$, $|x|<\sqrt{\frac{2}{3}}$. 1.77. $2\pi \log_2 e \operatorname{ctg}\left(2\pi x+\frac{\pi}{2}\right)$.

1.78. $\frac{2 \operatorname{tg} x\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)}{1+\operatorname{tg}^4 x}$. 1.79. $-\frac{1}{x \ln^2 x}$. 1.80. $(\operatorname{sen} x)^{\cos x} \times$ $\times(\operatorname{ctg} x \cos x-\operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x)$. 1.81. $\frac{1}{2}(\sqrt{x})^{\operatorname{sen}^2 x}\left(\operatorname{sen} 2x \ln x+\right.$ $\left.+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\right)$. 1.82. $-\frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}} a^{\sqrt{\cos x}}\left(1+\sqrt{\cos x} \ln a\right)$.

1.83. $\operatorname{th}^3 x\left(1+\frac{1}{2\operatorname{sh} x}\right)$. 1.84. $\frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$. 1.85. $e^{-x}(a \operatorname{ch} ax - \operatorname{sh} ax)$.
1.86. $\frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x}$. 1.88. $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 1.89. $\cos(x-\pi k)$, si $x \in (\pi k, \pi(k+1))$, si en cambio, $x=\pi k$, entonces $y'_-(\pi k)=-1$, $y'_+(\pi k)=1$, $k \in \mathbb{Z}$. 1.90. $\frac{1}{1+x^2}$, $x>0$; $-\frac{1}{1+x^2}$, $x<0$; $y'_-\times(0)=-1$, $y'_+(0)=+1$. 1.92. -1, $x \leqslant 0$; $-e^{-x}$, $x>0$.
1.93. 1, $x \leqslant 0$; $\frac{1}{1+x}$, $x>0$. 1.94. 0, $|x| \geqslant 1$; $2xe^{-x^2}(1-x^2)$, $|x|<1$. 1.95 $\frac{2x^4+4x^3-36x^2+54}{3(1-x)^2(9-x^2)}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$.
1.96. $y\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}$. 1.97. $a^{x^a}\cdot x^{a-1}\cdot a\ln a$. 1.98. $(\log_x a)^x\left(-\frac{1}{\ln x}-\right.$ $\left.-\ln\log_a x\right)$. 1.99. $\cos x\cos(\operatorname{sen} x)\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$. 1.100. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\frac{\ln x-1}{x^2}$. 1.101. $-\frac{\operatorname{sen} x}{3^x}(1+\ln^2 3)$.
1.102. $\frac{a\cos ax\cos bx+b\operatorname{sen} ax\operatorname{sen} bx}{\cos^2 bx}\left(3^{\frac{\operatorname{sen} ax}{\cos bx}}\ln 3+\frac{\operatorname{sen}^2 ax}{\cos^2 bx}\right)$
1.105. $\varphi(x_0)$. ● Hágase uso de la definición de la derivada.
1.106. $\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$. 1.107. $\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$.
1.108. $\psi(x)^{\varphi(x)}\left(\varphi'(x)\ln\psi(x)+\frac{\varphi(x)\psi'(x)}{\psi(x)}\right)$. 1.110. $\frac{f'(\ln x)}{x}$.
1.111. $\frac{f'(x)}{f(x)}$. 1.113. $f'(f(x))f'(x)$. 1.114. $\frac{4}{3}$. 1.115. $-\frac{1}{e}$.
1.116. $-\frac{b^2x}{a^2y}$. 1.117. $\frac{x(y^2-2x^2)}{y(2y^2-x^2)}$. 1.118. $-\sqrt{\frac{y}{x}}$.
1.119. $\frac{1}{2(1+\ln y)}$. 1.120. $\frac{e^x\operatorname{sen} y+e^y\operatorname{sen} x}{e^y\cos x-e^x\cos y}$. 1.121. $-\frac{y}{x}$.
1.122. $\frac{2^x(2y-1)}{2^y(1-2^x)}=-2^{y-x}$. 1.123. $\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\cdot\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-y^2}}$.
1.124. $\frac{x+y}{x-y}$. 1.125. $\frac{y}{x}\,\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$. 1.126. $\frac{y}{x}\cdot\frac{x\ln y-y}{y\ln x-x}$.
1.127. $\frac{y}{x}$. 1.130. $\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. ● La función $y=\operatorname{ch} x$, $x\in(-\infty, +\infty)$, no tiene inversa, por lo cual se deben analizar dos intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, en cada uno de los cuales la función

dada es monótona y, por consiguiente, tiene inversa. **1.131.** $\log_2 e \times$ $\times \operatorname{ctg} x$. **1.132.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+8x}}$. **1.134.** $\dfrac{1}{1+e^{\alpha(x)}}$. **1.135.** $\dfrac{2}{1+6\alpha^2(x)}$.
1.136. $\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)+\log_2 e}$. **1.137.** $\dfrac{1}{1+\ln\alpha(x)}$. **1.138.** $3t-\dfrac{5}{2}$.
1.139. $\dfrac{1}{3t}$. **1.140.** $-\dfrac{2t}{t+1}$. **1.141.** -2^{3t+1}. **1.142.** $-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$.
1.143. $2\cos^2 t\cdot(\cos 2t-2\operatorname{sen} 2t)$. **1.144.** 1. **1.145.** $\dfrac{t}{2}$. **1.146.** $\dfrac{2}{3}\ln\times$ $\times 2\operatorname{ctg} 2t$. **1.147.** $-\dfrac{\sqrt{2-t^2}}{\sqrt{1-4t^2}}$. **1.148.** $\sqrt[6]{\dfrac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}$.
1.149. $\dfrac{b}{a}\operatorname{th} t$. **1.150.** 1. **1.151.** -1. **1.152.** $2+\sqrt{3}$. **1.153.** $-\dfrac{4}{3}$.
1.154. $-2\cos 2x$. **1.155.** $\dfrac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$. **1.156.** $-\dfrac{2}{3\ln 2}\,\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$.
1.157. $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. **1.158.** $\dfrac{3x}{(1-x^2)^2}+\dfrac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{5/2}}$.
1.159. $x^{\sqrt{x}-1}(2+\ln x)\left(\dfrac{1}{4}\ln x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(2+\ln x)}\right)$.
● Hágase uso de la derivada logarítmica. **1.160.** $y'(0)=3$, $y''(0)=12$, $y'''(0)=9$. **1.161.** 2. **1.162.** 6. **1.163.** $y(0)=1$, $y'(0)=$ $=\ln 2$, $y''(0)=\ln^2 2-1$. **1.164.** $y'=-\dfrac{2}{x^3}f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, $y''=\dfrac{6}{x^4}f'\times$ $\times\left(\dfrac{1}{x^2}\right)+\dfrac{4}{x^6}f''\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. **1.165.** $y'=\dfrac{e^x f'(e^x)}{f(e^x)}$, $y''=e^{2x}\left(\dfrac{f'(e^x)}{e^x f(e^x)}+\right.$ $\left.+\dfrac{f''(e^x)}{f(e^x)}-\dfrac{f'^2(e^x)}{f^2(e^x)}\right)$. **1.167.** $y'=\dfrac{uu'+vv'}{\sqrt{u^2+v^2}}$;
$y''=\dfrac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$. **1.168.** $y'=\dfrac{u'}{u}-\dfrac{v'}{v}$,
$y''=\dfrac{uu''-u'^2}{u^2}-\dfrac{vv''-v'^2}{v^2}$. **1.169.** $\dfrac{m!}{(m-n)!}\cdot x^{m-n}$, si $n\leqslant m$; 0, si $n>m$. **1.170.** $(k\ln a)^n a^{kx}$. **1.171.** $\operatorname{sen}\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$. ● $y'=$ $=\cos x=\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y''=\left(\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=$ $=\operatorname{sen}(x+\pi)$, etc. **1.172.** $(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{x^n}$. **1.173.** $2^{n-1}\cos\times$ $\times\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$. ● Hágase uso de la fórmula $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$.
1.174. $\dfrac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$. **1.176.** $\dfrac{(x-1)^{50}-(x-2)^{50}}{(x^2-3x+2)^{51}}$.

1.177. $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ \dots\ 37\,(79-x)}{2^{20}\,(1-x)^{20}\sqrt{1-x}}$. ● Hágase uso de la igualdad $1+x=$ $=2-(1-x)$. 1.178. $\cos x\,(209-x-x^2)-15\,\mathrm{sen}\,x\,(2x+1)$. 1.179. $e^x\,(x^2+30x+360)$. 1.180. $4\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)e^{-x}$.

1.181. $\dfrac{8!\log_2 e}{x^9}$. 1.182. $x\,\mathrm{sh}\,x+100\,\mathrm{ch}\,x$. 1.183. ● Realícese la demostración por el método de la inducción matemática 1.186. $-\dfrac{24c^3\,(ad-bc)}{d^5}$. 1.187. -48. 1.193. $-\dfrac{p^2}{y^3}$.

1.194. $e^{2y}\dfrac{2-xe^y}{(1-xe^y)^3}$. 1.195. $-\dfrac{2\,(1+y^2)}{y^5}$.

1.196. $\dfrac{y\,((1+y)^2+(x-1)^2)}{x^2\,(1+y)^3}$. 1.197. $-\dfrac{f''_{xx}}{(f'_x)^3}$. 1.200. $-\mathrm{ctg}^3\,t$ o bien $\dfrac{1}{(x^2-1)^{3/2}}$, $x\in(1,+\infty)$. 1.201. $-\dfrac{2}{1-t^2}$ o bien $-2\sec^2 x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. 1.202. $2\,(1+t^2)$ o bien $2\sec^2 x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

1.203. $\dfrac{1}{3a\cos^4 t\,\mathrm{sen}\,t}$ o bien $\dfrac{a^{2/3}}{3x^{1/3}\sqrt{a^{2/3}-x^{2/3}}}$, $x\in(0,\ a)$.

1.205. $7x+y-3=0$, $x-7t+71=0$. 1.206. $y-5=0$, $x+2=0$. 1.207. $x-4y+4=0$, $4x+y-18=0$. 1.208. $y-2x=0$, $2y+x=0$. 1.209. $x-y-1=0$, $x+y-1=0$. 1.210. $2x-y+3=0$, $x+2y-1=0$. 1.211. $7x-10y+6=0$, $10x+7y-34=0$. 1.212. $y=0$, $(\pi+4)\,x+(\pi-4)\,y-\pi^2\sqrt{2}/4=0$. 1.213. $5x+6y-13=0$, $6x-5y+21=0$, 1.214. $x+y-2=0$. 1.215. $\mathrm{arctg}\,\dfrac{2}{e}$. 1.216. $M_0\,(1/8,\ -1/16)$. 1.217. $y=x^2-x+1$. 1.219. $2x-y-1=0$. 1.220. $4x-4y-21=0$. 1.221. 3,75. 1.224. En el punto $M_1\,(0,0)$ el ángulo es igual a 0 (las tangentes se tocan) y en el punto $M_2\,(1,\ 1)$ el ángulo $\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{7}$. 1.225. $\mathrm{arctg}\dfrac{8}{15}$. 1.226. $\mathrm{arctg}\,2\sqrt{2}$. 1.227. $\pi/4$ y $\pi/2$.

1.230. $2/\sqrt{5}$. 1.232. ◀ Si la curva viene dada por la ecuación $r=r\,(\varphi)$, entonces las coordenadas cartesianas de los puntos M de dicha curva se dan en función del ángulo φ por las expresiones

$$x=r\,(\varphi)\cos\varphi,\quad y=r\,(\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

De aquí $\overline{OM}=r\,(\varphi)\cos\varphi\cdot\boldsymbol{i}+r\,(\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi\cdot\boldsymbol{j}$, es decir, el vector $\boldsymbol{\rho}\,(1,\ \mathrm{tg}\,\varphi)$ es colineal con el $\overline{OM}$. El vector $\boldsymbol{\tau}\,(1,\ y'_x)$ es un vector director de la tangente TT', y como

$$y'_x=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{r'\,\mathrm{sen}\,\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\,\mathrm{sen}\,\varphi}=\frac{r+r'\,\mathrm{tg}\,\varphi}{r'-r\,\mathrm{tg}\,\varphi}$$

el vector $e\,(r' - r\,\mathrm{tg}\,\varphi,\ r + r'\,\mathrm{tg}\,\varphi)$ será colineal con τ. Por consiguiente,

$$\cos\theta = \frac{(\rho,\ e)}{|\rho|\cdot|e|} = \frac{r'}{\sqrt{r^2+(r')^2}},$$

de donde $\mathrm{tg}\,\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}} = \dfrac{r}{r'}$. ▶ **1.233.** $\theta = \mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{k}$.

1.234. $\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2\varphi$. **1.235.** a) $t_1 = 0$, $t_2 = 8$; b) $t \in (0,\ 4) \cup (8,\ +\infty)$;

c) $t_1 = \dfrac{4}{3}\,(3+\sqrt{3})$, $t_2 = \dfrac{4}{3}\,(3-\sqrt{3})$. **1.236.** $-\,a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t$

1.237. 242. **1.238.** $\dfrac{7}{18}\,\pi$. **1.239.** $a\omega e^{a\varphi}$. **1.240.** $v_x = -\,2a\omega\,\mathrm{sen}\,2\varphi$,

$v_y = -2a\omega\cos 2\varphi$. **1.241.** En los puntos (3, 16/3) y (—3, —16/3). **1.242.** $4\pi r^2 v$ y $8\pi r v$. **1.243.** 2π radianes/seg.

2.2. $(\Delta y)_1 = 1{,}261$, $(dy)_1 = 1{,}2$, $(\Delta y)_2 = 0{,}120601$, $(dy)_2 = 0{,}12$. **2.3.** $\Delta s = 2x\,\Delta x + \Delta x^2$, $ds = 2x\,\Delta x$. **2.4.** $ds = f'(t_1)\,\Delta t$ es el camino recorrido por el punto M durante el intervalo de tiempo Δt, con un movimiento uniforme a la velocidad $f'(t_1)$. **2.5.** $ds = 0{,}1$, $\Delta s = 0{,}08$. **2.6.** a) 0; b) $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$. **2.7.** Las igualdades a) y c) no son posibles; la igualdad b) es posible, si la función es lineal (véase el problema 2.1). **2.8.** 2 cm. **2.9.** 3 cm. **2.10.** $2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

2.11. $x\,\mathrm{sen}\,x\,dx$. **2.12.** $\mathrm{arctg}\,x\,dx$. **2.13.** $\ln x\,dx$. **2.14.** $\mathrm{arcsen}\,x\,dx$.

2.15. $\dfrac{2x\,dx}{1+5y^2}$. **2.16.** $\dfrac{x+y}{x-y}\,dx$. **2.17.** $\dfrac{dx}{e^y-1}$. **2.18.** a) 0,05;

b) 0,805; c) 0,2. **2.19.** 2,93. **2.20.** 1,2. **2.21.** $\Delta V \approx 2\pi rh\,\Delta r$. ● Como h es constante, la función v será la función de un solo argumento r: $v = \pi hr^2$. **2.22.** $\Delta V \approx -\dfrac{RT}{p^2}\,\Delta p$. ● Siendo T constante,

el volumen V será la función de un solo argumento p: $V = RT\,\dfrac{1}{p}$.

2.23. $-ab^2\,(\mathrm{sen}\,(bx+c)\,dx^2 = -b^2y\,dx^2$. **2.24.** $3^{-x^2}\ln 9\,(2x^2\ln 3 - 1)\,dx^2$. **2.25.** $\dfrac{(2-x^2)\,\mathrm{sen}\,x - 2x\cos x}{x^3}\,dx^2$. **2.26.** $2a\,dx^2$.

2.27. $\dfrac{2\,dx^2}{(x+2y)^3}$. **2.28.** $-\dfrac{R^2\,dx^2}{(y-b)^3}$. **2.29.** $6\,\dfrac{x\,(1+3y^2)\,dx^2}{(1-3y^2)^3}$.

2.30. $\dfrac{(x-y)\,dx^2}{(1-a\cos y)^3}$.

3.1. $f(x)$ es discontinua para $x = 0 \in [-1,\ 1]$. **3.2.** 0. **3.4.** ● Realícese la demostración por reducción al absurdo, habiendo previamente establecido que la derivada del primer miembro de la ecuación tiene una única raíz real $x = 1$. **3.5.** ● Realícese la demostración por reducción al absurdo, habiendo previamente establecido que la derivada del primer miembro de la ecuación no tiene raíces reales. 3.6. ● $F(b) = F(a)$. 3.7. $\xi = 1/\sqrt{3}$. 3.11. ● Hágase uso del resultado del problema 3.8. 3.13. $\xi_1 = 1/2$, $\xi_2 = 5/3$. 3.14. 2/3. 3.15. $\frac{2}{3\sqrt[6]{5}}$. 3.16. a^2/b^2. 3.17. 2. 3.18. 2/3. 3.19. $-1/2$. 3.20. 2. 3.21. 9/50. 3.22. 1/2. 3.23. 1/2. 3.24. 0. 3.25. 1/2. 3.26. $-\infty$. 3.27. $\cos 3$. 3.28. -2. 3.29. 0. 3.30. $+\infty$. 3.31. $1/\pi$. 3.32. a. 3.33. 0. 3.34. -1. 3.35. 0. 3.36. 1/12. 3.37. -1. 3.38. 2/3. 3.39. 1. 3.40. 1. 3.41. 1. 3.42. e. 3.43. 1. 3.44. 2. 3.45. $1/e$. 3.46. 1. 3.47. $1/e$. 3.48. 1. 3.49. e^{-6}. 3.50. e^2. 3.51. $-9 + 17(x+1) - 9(x+1)^2 + 2(x+1)^3$. 3.52. $7 + 11(x-1) + 10(x-1)^2 + 4(1+\theta(x-1))(x-1)^3$; a) $\theta = 1/4$; b) θ es un número real cualquiera; c) $\theta = 1/4$. 3.53. $P(-1) = 143$, $P'(0) = -60$, $P''(1) = 26$.

3.54. $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$. 3.55. $\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} + \frac{\operatorname{sen}\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}$, n es impar; $\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\operatorname{sen}\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}$, n es par. 3.56. $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\cos\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}$, n es impar! $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{x^n}{n!} + \frac{\cos\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}$, n es par. 3.57. $x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$, $x > -1$. 3.58. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)$, n es impar; $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_{n+1}(x)$, n es par. ● El término residual se escribirá en la forma general. 3.59. $1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!} \times x^{n+1}$, $x > -1$. 3.60. $2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + \frac{(x-2)^4}{(1+\theta(x-2))^5}$. 3.61. $x + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1+2\operatorname{sen}^3 \theta x}{\cos^4 \theta x}$. 3.62. $x + \frac{x^3}{6} +$

$+\frac{x^4}{4!}\frac{90x+60^3x^3}{(1-\theta^2x^2)^{7/2}}$. **3.63.** $1-\frac{(x-1)}{2}+\frac{3}{8}(x-1)^2-\frac{5}{16}(x-1)^3+$ $\frac{35}{128}\frac{(x-1)^4}{(1+\theta(x-1))^{9/2}}$. **3.64.** a) 0,842; b) 1,648; c) 0,049, d) 2,012. **3.65.** El error: a) $\frac{1}{16}\frac{x^3}{(1+\theta x)^{5/2}}$; b) $\frac{5}{81}\frac{x^3}{(1+\theta x)^{8/3}}$. **3.67.** a) 1; b) 1/2; c) 1/2.

4.1. ● Hágase uso del desarrollo de la función según la fórmula de Taylor en el entorno del punto x_0 hasta un miembro de orden k inclusive. **4.2.** $f(x_0)=0$ es el mínimo, si $\varphi(x_0)>0$ y n es par; $f(x_0)=0$ es el máximo, si $\varphi(x_0)<0$ y n es par; no hay extremo, si n es impar. **4.3.** ● Hágase uso de la primera condición suficiente de extremo. **4.4.** En $(-1,\ -1/\sqrt{2})\cup(1/\sqrt{2},\ 1)$ va decreciendo, en $(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ va creciendo; $y_{\text{mín}}=y(-1/\sqrt{2})=-1/\sqrt{2}$, $y_{\text{máx}}=$ $=y(1/\sqrt{2})=1/2$. **4.5.** En $(-\infty,\ -1)\cup(0,\ 1)$ va creciendo, en $(-1,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$ va decreciendo; $y_{\text{máx}}=y(-1)=y(1)=1$. **4.6.** En $(0,\ 1)\cup(1,\ e)$ va decreciendo, en $(e,\ +\infty)$ va creciendo; $y_{\text{mín}}=y(e)=e$.

4.7. En $\left(\frac{\pi}{3}(6k-1),\ \frac{\pi}{3}(6k+1)\right)$ decrece en $\left(\frac{\pi}{3}(6k+1),\ \frac{\pi}{3}(6k+5)\right)$ crece; $y_{\text{mín}}=y\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)=2k\pi+\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\approx 2k\pi-0{,}685$, $y_{\text{máx}}=y\left(2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right)=2(k+1)\pi-\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\approx(2k+1)\pi+0{,}685$, $k\in\mathbb{Z}$. **4.8.** En $(0,\ 2)$ decrece, en $(2,\ +\infty)$ crece; $y_{\text{mín}}=y(2)=2(1-\ln 2)\approx 0{,}61$. **4.9.** Va creciendo en todo el dominio de definición. **4.10.** En $\left(\frac{\pi}{4}(8k-3),\ \frac{\pi}{4}\times\right.$ $\left.\times(8k+1)\right)$ crece, en $\left(\frac{\pi}{4}(8k+1),\ \frac{\pi}{4}(8k+5)\right)$ decrece, $y_{\text{máx}}=$ $=y\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=e^{2k\pi}\left(e^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 1{,}55e^{2k\pi}$, $y_{\text{mín}}=y\left(2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)=-e^{2k\pi}\left(e^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx-1{,}55e^{2k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$. **4.11.** En $(0,\ 1/e)$ decrece, en $(1/e,\ +\infty)$ crece; $y_{\text{mín}}=y(1/e)=(1/e)^{\frac{1}{e}}\approx 0{,}69$.
4.12. En $(-\infty,\ 0)$ decrece, en $(0,\ +\infty)$ crece; $y_{\text{mín}}=y(0)=2$.
4.13. $M=3$, $m=-24$. **4.14.** $M=8$, $m=0$. **4.15.** $M=0{,}6$, $m=-1$.
4.16. $M=1$, $m=0{,}6$. **4.17.** $M=2$, $m=\sqrt[3]{2}\approx 1{,}26$. **4.18.** $M=\pi/4$, $m=0$. **4.19.** $M=1$, $m=-1$. **4.20.** $M=1/\sqrt{e}\approx 0{,}61$, $m=-1/\sqrt{e}\approx-0{,}61$. **4.21.** ● Analícese la función $y=e^x-$

$-(1+x)$ y muéstrese que ella tiene un único mínimo: $y_{\min}= = y(0)=0$. **4.25.** $\dfrac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}$. **4.26.** $|AP|=\left(500-\dfrac{100}{\sqrt{3}}\right)$ km $\approx \approx 442{,}3$ km. **4.27.** $x=\dfrac{2p}{4+\pi}$; $y=\dfrac{1}{2}\left(p-x-\dfrac{\pi x}{2}\right)$. **4.28.** $\alpha = =\dfrac{2\pi}{3}$. **4.29.** $\dfrac{ah}{4}$. **4.30.** πa^3. **4.31.** $\dfrac{4}{27}\pi r^2 h$. **4.32.** $\dfrac{8}{3}\pi r^3$.

4.33. $\dfrac{2\pi}{9\sqrt{3}}e^3$. **4.34.** $2r^2$. **4.35.** $N(1, 1)$. **4.36.** $x=R\sqrt{2}, y=R/\sqrt{2}$.

4.37. Divídase el segmento en dos partes iguales.

4.38. $r=\dfrac{RH\sqrt{R^2+H^2}}{(\sqrt{R^2+H^2}-R)(\sqrt{R^2+H^2}+2R)}$. **4.39.** $h=(e^{2/3}- - d^{2/3})^{3/2}$. **4.40.** En $(-\infty, 0)$ la convexidad es hacia las y positivas, en $(0, +\infty)$, la convexidad es hacia las y negativas, $M(0, 1)$ es el punto de inflexión, $k=7$. **4.41.** La gráfica es convexa hacia las y negativas en todos los puntos. **4.42.** En $(-\infty, 2)$ la convexidad es hacia las y positivas, en $(2, +\infty)$, la convexidad es hacia las y negativas, $M(2, 0)$ es el punto de inflexión, $k=0$. **4.43.** En $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$ la convexidad es hacia las y negativas, en $(-1, 1)$ la convexidad es hacia las y positivas, $M_1(-1, \sqrt[3]{2})$ y $M_2(1, \sqrt[3]{2})$ son los puntos de inflexión, $k_1=k_2=\infty$. **4.44.** La gráfica es convexa hacia las y positivas en todos los puntos. **4.45.** En $(-\infty, -1)$ la convexidad es hacia las y positivas, en $(-1, +\infty)$ la convexidad es hacia las y negativas, $M(-1, 1-e^{-2})$ es el punto de inflexión, $k=-e^{-2}\approx -0{,}14$. **4.46.** En $(-\infty, 0)$ la convexidad es hacia las y positivas, en $(0, +\infty)$ la convexidad es hacia las y negativas, $M(0, 0)$ es el punto de inflexión, $k=\infty$.

4.47. En $(0, e^{-5/6})$ la convexidad es hacia las y positivas, en $(e^{-5/6}, +\infty)$ la convexidad es hacia las y negativas, $M\left(e^{-5/6}, 1- -\dfrac{5}{6}e^{-5/6}\right)$ es el punto de inflexión, $k=-\dfrac{3}{2}e^{-5/3}\approx = -0{,}28$.

4.48. $a=-\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{9}{2}$. **4.49.** $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2}}$. **4.51.** ● Si x_0 es la abscisa del punto de inflexión, entonces $x_0 \operatorname{tg} x_0=2$. En este caso $y_0^2=y^2(x_0)=x_0^2\operatorname{sen}^2 x_0=\dfrac{4x_0^2}{4+x_0^2}$. **4.52.** $x=2$, $y=1$. **4.53.** $y=x- -\dfrac{1}{3}$. **4.54.** $x=0$, $y=1$ (la derecha), $y=-1$ (la izquierda). **4.55.** $y=3x+\dfrac{\pi}{2}$ (la derecha), $y=3x-\dfrac{\pi}{2}$ (la izquierda). **4.56.** $x= =0$, $y=2x$, $x=-1$ (la derecha). **4.57.** $y=0$. **4.58.** $x=-\dfrac{1}{e}$,

$y=x+\frac{1}{e}$. 4.59. $y=\frac{\pi}{2}x-1$. 4.61. $y_{\min}=y(0)=-1$; $\left(\pm 1,\ -\frac{64}{125}\right)$ y $(\pm\sqrt{5},0)$ son los puntos de inflexión. 4.62. $y_{\text{máx}}=y(\pm 1)=1$, $y_{\min}=(y\pm\sqrt{3})=y(0)=0$; $\left(\pm\sqrt{\frac{6+\sqrt{21}}{5}},\ \frac{6-\sqrt{21}}{20}\left(\frac{6-\sqrt{21}}{5}-3\right)^2\right)$ y $\left(\pm\sqrt{\frac{6+\sqrt{21}}{5}},\ \frac{6+\sqrt{21}}{20}\left(\frac{6+\sqrt{21}}{5}-3\right)^2\right)$ son los puntos de inflexión. 4.63. $y_{\text{máx}}=y(-\sqrt{3})=\sqrt{3}$, $y_{\min}=y(\sqrt{3})=-\sqrt{3}$; $(0,0)$ y $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2},\ \mp\frac{7\sqrt{6}}{16}\right)$ son los puntos de inflexión. 4.64. $y_{\min}=y(3)=\frac{27}{8}$; $(0,0)$ es el punto de inflexión; $x=1$ e $y=\frac{x+2}{2}$ son asíntotas. 4.65. $y_{\text{máx}}=y(0)=0$, $y_{\min}=y(\sqrt[3]{4})=\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$; $\left(-\sqrt[3]{2},\ -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$ es el punto de inflexión, $x=1$ e $y=x$ son asíntotas. 4.66. $(0,0)$ es el punto de inflexión; $x=\pm 1$ $y=x$ son las asíntotas. 4.67. $y_{\text{máx}}=y(\sqrt[3]{4})=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$, $y_{\min}=y(0)=0$; $\left(\sqrt[3]{2},\ \frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$ es el punto de inflexión; $x=-1$ e $y=x$ son las asíntotas. 4.68. $y_{\text{máx}}=y(1)=\frac{1}{3}$, $\left(\sqrt[3]{4},\ \frac{1}{6}\sqrt[3]{4}\right)$ es el punto de inflexión; $x=-\sqrt[3]{2}$ e $y=0$ son las asíntotas. 4.69. $(0,0)$ es el punto de inflexión; $x=\pm 1$ e $y=0$ son asíntotas. 4.70. $y_{\text{máx}}=y(0)=0$, $y_{\min}=y(-\sqrt[3]{2})=-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$; $\left(-\sqrt[3]{\frac{7+\sqrt{45}}{2}},\ -\frac{\sqrt[3]{2(7+\sqrt{45})^2}}{9+\sqrt{45}}\right)$ y $\left(-\sqrt[3]{\frac{7-\sqrt{45}}{2}},\ -\frac{\sqrt[3]{2(7-\sqrt{45})^2}}{9-\sqrt{45}}\right)$ son los puntos de inflexión; $x=1$ e $y=0$ son asíntotas. 4.71. $(0,0)$ es el punto de inflexión; $x=-2$, $x=2$, $y=0$ son las asíntotas. 4.72. $y_{\text{máx}}=y(-3)=-4{,}5$, $y_{\min}=y(3)=4{,}5$; $(0,0)$ es el punto de inflexión; $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$, $y=x$ son las asíntotas. 4.73. $y_{\min}=y(-1)=-1/3$; $(-\sqrt[3]{4},\ -\sqrt[3]{4}/6)$ es el punto de inflexión; $x=\sqrt[3]{2}$ e $y=0$ son asíntotas. 4.74. $y_{\min}=y(0)=-1$, $(\pm\sqrt{3}/3,\ -1/2)$ son puntos de inflexión; $y=1$ es la asíntota. 4.75. $(0,0)$ y $(\sqrt[3]{4}/2,\ 1/3)$ son los puntos de inflexión; $x=-1$ e $y=1$ son las asíntotas. 4.76. $y_{\text{máx}}=y(0)=2$, $(\pm 1, \sqrt[3]{2})$ son los puntos de inflexión; $y=0$ es la asíntota. 4.77. $y_{\text{mín}}=y(1)=-1$; $(0, 0)$ y $(2, 0)$ son los puntos de inflexión. 4.78. $y_{\text{máx}}=y(0)=2$, $y_{\text{mín}}=$ $=y(\pm 1)=\sqrt[3]{4}$. 4.79. $(0, 0)$ es el punto de inflexión; $x=-1$, $x=1$, $y=0$ son asíntotas. 4.80. $(0, 1)$ y $(1, 0)$ son puntos de inflexión; $y=-x$ es la asíntota. 4.81. $(0, 0)$, $(\pm 1, \pm\sqrt[3]{2})$ son puntos de inflexión. 4.82. $(0, 0)$, $(\pm 1, \pm\sqrt[3]{2})$ son los puntos de inflexión; $y=2x$ es la asíntota. 4.83. $(0, 0)$, $(\pm 1, \pm\sqrt[3]{2})$ son los puntos de inflexión; $y=x$ es la asíntota. 4.84. $(0, 0)$ es el punto de inflexión; $y=-1$ es la asíntota izquierda, $y=1$ es la asíntota derecha. 4.85. $y_{\text{mín}}=y(-\sqrt[3]{3})=1$; $(0, 0)$ es el punto de inflexión; $x=-\sqrt[3]{2}$ es la asíntota. 4.86. $y_{\text{máx}}=y(0)=0$, $y_{\text{mín}}=$ $=y(2)=\sqrt[3]{16}$; $(-\sqrt[3]{4}, -\sqrt[3]{2})$ es el punto de inflexión; $x=\sqrt[3]{4}$ e $y=x$ son las asíntotas. 4.87. $y_{\text{máx}}=y(-\sqrt[3]{6})=-3/\sqrt[3]{2}$; $(0, 0)$ y $(\sqrt[3]{3}, 3/\sqrt[3]{25})$ son los puntos de inflexión; $x=-\sqrt[3]{2}$ e $y=x$ son las asíntotas. 4.88. $y_{\text{mín}}=y(0)=0$, $(\pm\sqrt{2}, 2/\sqrt{3})$ son los puntos de inflexión; $y=x$ es la asíntota derecha, $y=-x$ es la asíntota izquierda. 4.89. $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ y $(-1, -1)$ son los puntos de inflexión; $x=0$ e $y=1$ son las asíntotas. 4.90. $y_{\text{máx}}=y(1)=1/\sqrt[3]{4}$, $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{0{,}16})$ es el punto de inflexión; $x=-1$, $y=0$ son las asíntotas. 4.91. $y_{\text{máx}}=y(-\sqrt{3})=0$, $y_{\text{mín}}=y(\sqrt{3})=0$; $(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ son los puntos de inflexión; $x=0$ es una asíntota, $y=1$ es la asíntota derecha, $y=-1$ es la asíntota izquierda. 4.92. $y_{\text{mín}}=$ $=y(0)=0$, $y_{\text{mín}}=y(\pm\sqrt{2})=2$, $x=\pm 1$ son las asíntotas, $y=x$ es la asíntota derecha, $y=-x$ es la asíntota izquierda. 4.93. $y_{\text{máx}}=$ $=y(0)=1$, $y_{\text{mín}}=y(\pm 1)=0$. 4.94. $y_{\text{máx}}=y(0)=2\sqrt{2}$, $y_{\text{mín}}=$ $=y(\pm\sqrt{2})=0$; $(\pm 1, 1)$ son los puntos de inflexión. 4.95. $y_{\text{mín}}=$ $=y\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)=-\sqrt{2}$, $y_{\text{máx}}=y\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\sqrt{2}$; $\left(\frac{3\pi}{4}+\right.$ $\left.+k\pi, 0\right)$ son los puntos de inflexión $k\in\mathbb{Z}$. 4.96. $y_{\text{mín}}=y\left(\frac{\pi}{4}+\right.$ $\left.+2k\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{\text{máx}}=y\left(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$ son las asíntotas, $k\in\mathbb{Z}$. 4.97. $y_{\text{mín}}=y(0)=0$, $y=-\frac{\pi x}{2}-1$ es la asíntota izquierda, $y=\frac{\pi x}{2}-1$ es la asíntota derecha. 4.98. $y_{\text{mín}}=$ $=y(1)=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$, $y_{\text{máx}}=y(-1)=-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ son los puntos de inflexión; $y=\frac{x}{2}+\pi$ es la asíntota izquierda, $y=\frac{x}{2}$ es la asíntota derecha. 4.99. $y_{máx}=y(1)=e$, $\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}, e^{1/2}\right)$ son los puntos de inflexión; $y=0$ es la asíntota 4.100. $y_{máx}=y(1)=$ $=\frac{1}{\sqrt{e}}$, $y_{mín}=y(-1)=-\frac{1}{\sqrt{e}}$: $(0, 0)$, $\left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}\right)$ son los puntos de inflexión; $y=0$ es la asíntota. 4.101. $y_{máx}=y(1)=$ $=\frac{1}{e}$, $\left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, (2\pm\sqrt{2})\,e^{-(2\mp\sqrt{2})}\right)$ son los puntos de inflexión; $x=0$ es la asíntota izquierda, $y=0$ es la asíntota. 4.102. $y_{máx}=$ $=y(\pm 1)=\frac{1}{e}$, $y_{mín}=y(0)=0$; $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, 3e^{-3}\right)$ y $\left(\pm\sqrt{2}, \frac{1}{2}e^{-1/2}\right)$ son los puntos de inflexión; $y=0$ es la asíntota. 4.103. $y_{mín}=$ $=y(1)=e$; $y=x+1$ es la asíntota, $x=0$ es la asíntota derecha. 4.104. $y_{máx}=y(\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{2e}}$, $y_{mín}=y(-\sqrt{2})=-\frac{1}{\sqrt{2e}}$, $\left(\pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}\right)$, $\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{17}}\,e^{-\frac{1}{4}(5+\sqrt{17})}\Big)$ y $\left(\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}\,e^{-\frac{1}{4}(5-\sqrt{17})}\right)$ son los puntos de inflexión; $y=0$ es la asíntota. 4.105. $y_{máx}=y(-2)=-4\sqrt{e}$, $y_{mín}=y(1)=-1/e$; $(0{,}4\ -1{,}6e^{-5/2})$ es el punto de inflexión; $x=0$ es la asíntota izquierda, $y=x-3$ es la asíntota. 4.106. $(1, e^2)$ es el punto de inflexión, $x=0$ es la asíntota derecha, $y=2x+3$ es la asíntota. 4.107. $y_{máx}=y(\pm 1)=2/\sqrt{e}$, $y_{mín}=y(0)=1$; $\Big(\pm\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $(3-\sqrt{3})\,e^{-\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\Big)$ y $\left(\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}, (3+\sqrt{3})e^{-\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)$ son los puntos de inflexión; $y=0$ es la asíntota. 4.108. $y_{mín}=y(1)=e^2$, $x=0$ es la asíntota derecha. 4.109. $y_{máx}=y(\sqrt{3})=3\sqrt{3}\,e^{-3/2}$, $y_{mín}=$ $=y(-\sqrt{3})=-3\sqrt{3}\,e^{-3/2}$; $(0, 0)$, $(\pm 1, \pm e^{-1/2})$, $(\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{6}\,e^{-3})$ son los puntos de inflexión; $y=0$ es la asíntota. 4.110. $(0, 0)$ es el punto de inflexión 4.111. $y_{máx}=y(e)=\frac{1}{e}$, $\left(e\sqrt{e}, \frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$ es el punto de inflexión; $x=0$ e $y=0$ son las asíntotas derechas. 4.112. $y_{máx}=y\left(\frac{1}{e}\right)=-e$; $x=1$ es la asíntota, $x=0$ e $y=0$ son las asíntotas derechas. 4.113. $y_{mín}=y\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$; $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$ es el punto de inflexión 4.114. $y_{máx}=y(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$; $\left(\sqrt[6]{e^5}, \frac{5}{6\sqrt[3]{e^5}}\right)$ es el punto de inflexión, $x=0$ e $y=0$ son las asíntotas derechas. 4.115. $y_{máx}=y(1/e)=1/e^2$, $y_{mín}=y(1)=0$;

$\left(e^{-1,5-\sqrt{1,25}}, \frac{7+3\sqrt{5}}{2}e^{-3-\sqrt{5}}\right)$ y $\left(e^{-1,5+\sqrt{1,25}}, \frac{7-3\sqrt{5}}{2}\times\right.$ $\left.\times e^{-3+\sqrt{5}}\right)$ son los puntos de inflexión. **4.116.** $y_{\text{máx}}=y(0)=0$, $y_{\text{mín}}=y(\pm\sqrt{e})=2e$; $x=\pm 1$ son las asíntotas. **4.117.** $y_{\text{máx}}=$ $=y(1/e^2)=4/e^2$, $y_{\text{máx}}=y(-1)=0$, $y_{\text{mín}}=y(-1/e^2)=-4/e^2$; $(0, 0)$, $(\pm 1/\sqrt{e}, \pm 1/\sqrt{e})$ son los puntos de inflexión. **4.118.** $y_{\text{máx}}=$ $=y(0)=0$; $x=\pm 1$ son las asíntotas. **4.119.** $y_{\text{máx}}=y(\pm e)=1/e^2$, $y_{\text{mín}}=y(\pm 1)=0$; $\left(\pm e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}}, \left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)^2 e^{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}\right)$, $\left(\pm e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}}, \left(\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right)^2 e^{-\frac{5+\sqrt{13}}{2}}\right)$ son los puntos de inflexión; $x=0$ o $y=0$ son las asíntotas. **4.120.** $y_{\text{mín}}=y(1/e)=(1/e)^{1/e}\approx$ $\approx 0,69$, es convexa hacia las y negativas, $y\to 1$ para $x\to +0$, es decir, $M(+0, 1)$ es el punto final. **4.121.** $y_{\text{máx}}=y(e)=e^{1/e}\approx 1,44$; $(0,58, 0,12)$ y $(4,35, 1,4)$ son los puntos de inflexión; $M(+0, 0)$ es el punto final; $y=1$ es la asíntota. ● Se puede no hallar los puntos de inflexión, es suficiente probar que éstos se encuentran de la ecuación $\ln^2\frac{x}{e}+2x\ln\frac{x}{e}-x=0$. **4.122.** $x=0$ es el punto de discontinuidad evitable $(y_-(0)=y_+(0)=e)$, la función es decreciente, convexa hacia las y negativas, $x=-1$ es la asíntota vertical, $y=1$ es la asíntota. **4.123.** $x=0$ es el punto de discontinuidad evitable, $y=0$ es la asíntota. Los puntos de extremo satisfacen la ecuación $\operatorname{tg} x=x$. Los puntos de inflexión satisfacen la ecuación $\operatorname{tg} x=\frac{2x}{2-x^2}$. ● Se puede no hallar los puntos de extremo y de inflexión. **4.125.** $x_{\text{mín}}=$ $=-1$ para $t=1$ $(y(1)=3)$, $y_{\text{mín}}=-1$ para $t=-1$ $(x(-1)=$ $=3)$; una parábola cuyo vértice se encuentra en el origen de coordenadas y cuyo eje es la recta $y=x$ $(x>0, y>0)$. **4.126.** $x_{\text{mín}}=y_{\text{mín}}=$ $=1$ para $t=0$ (punto de retroceso); $y=2x$ es la asíntota cuando $t\to+\infty$. **4.127.** Astroide (véase § 3, cap. 2, fig. 27). **4.128.** $\left(-1, -3\pi, -1+\frac{3\pi}{2}\right)$ es el máximo, $\left(1-3\pi, 1-\frac{3\pi}{2}\right)$ es el mínimo, $(-3\pi, 0)$ es el punto de inflexión, $y=x$ e $y=x+6\pi$ son las asíntotas. **4.129.** Una rosácea de tres pétalos; $D=[0, \pi/3]\cup[2\pi/3, \pi]\cup[4\pi/3, 5\pi/3]$; los extremos tienen lugar para $\varphi=\pi/6$, $\varphi=5\pi/6$, $\varphi=3\pi/2$. **4.130.** Cardioide, el polo es un punto de retroceso, $r_{\text{máx}}=r(0)=2a$, $r_{\text{mín}}=r(\pi)=0$. **4.131.** $D=(0, +\infty)$; la línea da vueltas espiralmente en torno al polo, aproximándose hacia éste asintóticamente; $(\sqrt{2\pi}, 1/2)$ es el punto de inflexión; el eje polar $(\varphi=0)$ es una asín tota horizontal. **4.132.** Lemniscata de Bernoulli (véase § 3, cap. 2 fig. 21).

5.1. La recta $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{4}$. **5.2.** En el plano Oxy un arco de la circunferencia $x^2+y^2=2$ entre los puntos $(1, 1)$ y $(0, \sqrt{2})$ recorrido en sentido antihorario. 5.3. La rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{z}{9}=1$, $y=-1$, recorrida de abajo arriba si se mira por la parte del origen de coordenadas. 5.4. En el plano Oxy una parábola $y=\frac{1}{9}(6x-x^2)$ recorrida de izquierda a derecha. 5.5. La línea helicoidal $x=\cos t$, $y=\operatorname{sen} t$, $z=t$. 5.6. Astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=2^{2/3}$, $z=0$. 5.7. La línea de corte de los cilindros $y=x^2$, $z=x^3$, recorrida de abajo arriba. 5.8. La *curva de Viviani* es una línea, donde se cortan la esfera y el cilindro circular: $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=x$. 5.9. Una elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, $z=2$. 5.10. Una parábola $y=x^2+x$, $z=3$, recorrida dos veces. 5.11. Una recta $4x+3y=0$, $z=0$; $v=3i-4j$. 5.12. Una parábola (en el plano Oxy) $y=\frac{1}{9}(12x-x^2)$; $v=3i+(4-2t)j$, $v|_{t=0}=3i+4j$, $v|_{t=1}=3i+2j$, $v|_{t=2}=3i$, $v|_{t=3}=3i-2j$. 5.13. Una cicloide (en el plano Oxy) $x=2(t-\operatorname{sen} t)$, $y=2(1-\cos t)$; $v=2(1-\cos t)\,i+2\operatorname{sen} t\cdot j$; cuando $t=\frac{\pi}{2}$, $v=2(i+j)$; cuando $t=\pi$, $v=4i$. 5.14. $0{,}6i-0{,}8j$. 5.15. $\frac{1}{\sqrt{5}}(2i-j)$. 5.16. a) $\cos t\cdot i-\operatorname{sen} 2t\cdot j+\cos 2t\cdot k$; b) $(\cos t-t\operatorname{sen} t)\,i+(\operatorname{sen} t+t\cos t)\,j+k$; c) $(1-\operatorname{sen} t)\,i+j+\cos t\cdot k$. 5.17. a) i; b) $12i-2j-\frac{2}{\sqrt{5}}k$. 5.18. $1+3t^2+5t^4$. 5.19. $(3t^2-2t)\,i+(3t^2-2t)\,j-2tk$. 5.20. $\cos t\,(i+2uj+3u^2k)$. 5.21. $x+2z=4$, $y=2$ (una tangente); $2x-z=3$ (un plano normal). 5.22. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-\frac{8}{3}}{2}=\frac{z-4}{3}$ (una tangente); $3x+6y+12z-70=0$ (un plano normal) 5.23. $y=z$, $x=a$ (una tangente); $y+z=0$ (un plano normal). 5.24. $\frac{x-1}{12}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-4}{3}$ (una tangente); $12x-4y+3z=12$ (un plano normal). 5.25. $\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7}$ (una tangente); $8x+10y+7z=12$ (un plano normal). 5.26. a) $\frac{d^2r}{dt^2}=-\cos t\cdot i+e^t j+2k$, $\left.\frac{d^2r}{dt^2}\right|_{t=0}=-i+j+2k$; b) $\frac{d^2r}{dt^2}=-(2\operatorname{sen} t+t\cos t)\,j+(2\cos t-t\operatorname{sen} t)\,k$; $\left.\frac{d^2r}{dt^2}\right|_{t=0}=2k$. 5.27. $w=2\operatorname{sen} t\cdot i+2\cos t\cdot j$; $w|_{t=\pi/2}=2i$; $w|_{t=\pi}=-2j$. 5.28. $w=-2j$, $w_\tau=\frac{4(t-2)}{\sqrt{4t^2-16t+25}}$, $w_n=\frac{6}{\sqrt{4t^2-16t+15}}$; para $t=0$ $w_\tau=-1{,}6$, $w_n=1{,}2$ ● $w_\tau=\frac{dv}{dt}$, $w_n=\sqrt{w^2-w_\tau^2}$. 5.29. $w=i+\frac{1}{\sqrt{2t+1}}j$, $w_\tau=1$, $w_n=$

$=\frac{1}{\sqrt{2t+1}}$; para $t=0$ $w=i+j$, $w_n=1$. **5.30.** $K|_{x=0}=2$, $K|_{x=1}=\frac{2}{5\sqrt{5}}$. **5.31.** $K_A=3$, $K_B=1/9$. **5.32.** $3/\sqrt{2}$. **5.33.** $1/2$. **5.34.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **5.35.** $K=\frac{3}{4a\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}$, $K|_{\varphi=\pi}=\frac{3}{4a}$. **5.36.** $\frac{3}{a}$. **5.37.** $\frac{(9x^{4/3}+1)^{3/2}}{6x^{1/3}}$. **5.38.** $\frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4}$, **5.39.** $\sqrt[3]{|axy|}$. **5.40.** $\frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4}=\frac{(a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}$. **5.41.** $4a\left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right|$, **5.42.** $\frac{a^2}{3r}$. **5.43.** $\frac{(a^2+r^2)^{3/2}}{2a^2+r^2}$. **5.44.** $\left(\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ● Fórmese la expresión para la curvatura K y hállese su punto de extremo. **5.45.** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{\ln 2}{2}\right)$. **5.46.** $\left(0,\frac{a}{2}\right)$; $x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$. **5.47.** $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$; $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. **5.48.** $\left(-1,\ e-\frac{1}{e}\right)$; $(x+1)^2+\left(y-e+\frac{1}{e}\right)^2=e^2$. **5.49.** $\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$; $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+y^2=1$. **5.50.** $(\pi a,\ -2a)$; $(x-\pi a)^2+(y+2a)^2=16a^2$. **5.51.** $X=\frac{x-9x^5}{2}$, $Y=\frac{15x^4+1}{6x}$. **5.52.** $X^{2/3}-Y^{2/3}=(2a)^{2/3}$. **5.53.** $(X+Y)^{2/3}+(X-Y)^{2/3}=2a^{2/3}$. **5.54.** $Y=a\operatorname{ch}\frac{X}{a}$. **5.55.** $X^2=\frac{4}{27}Y^3$. **5.56.** $\boldsymbol{\tau}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{\nu}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$; $\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$; $x-1=-(y-1)=z$ (una tangente); $x=y$, $z=0$ (normal principal); $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$ (binormal). **5.57.** $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{\nu}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$; $y=2$, $z=4$ (una tangente); $y-z+2=0$ $x=\pi$ (normal principal); $y+z=6$, $x=\pi$ (binormal). **5.58.** $\boldsymbol{\tau}=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{\nu}=\frac{1}{3}(-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$; $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ (una tangente); $\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{2}$ (normal principal); $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{-1}$ (binormal). **5.59.** $\boldsymbol{\tau}=\frac{1}{\sqrt{18}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{\nu}=-\frac{1}{3}(2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{\beta}=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$; $x-1=y-1=\frac{z-2}{4}$ (tangente); $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$ (normal principal); $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{0}$ (binormal), **5.60.** $x+2y=3$ (plano osculador); $z=1$ (plano normal); $2x-y=1$ (plano rectificante). **5.61.** $y=x$ (plano osculador); $x+y=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (plano normal); $z=0$ (plano rectificante). **5.62.** $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{j}$, $y=0$, $z=1$. (tangente); $x=1$, $y=0$ (normal principal); $x=1$, $z=1$ (binormal); $y=0$ (plano osculador); $x=1$ (plano normal); $z=1$ (plano rectificante). **5.63.** $\boldsymbol{\tau}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2i-j)$, $\boldsymbol{\nu}=-\frac{1}{\sqrt{30}}(i+2j+5k)$, $\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{\sqrt{6}}\times$ $\times(i+2j-k)$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{0}$ (una tangente); $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=$ $=\frac{z-3}{5}$ (normal principal); $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$ (binormal); $x+2y-$ $-z-2=0$ (plano osculador); $2x-y=0$ (plano normal); $x+2y+$ $+5z-20=0$ (plano rectificante). **5.64.** $K=\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$, $\sigma=-\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$; para $t=0$ $K=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\sigma=-\frac{\sqrt{2}}{4}$. **5.65.** $K=2\sqrt{\frac{9t^4+9t^2+1}{(9t^4+4t^2+1)^3}}$, $\sigma=\frac{3}{9t^4+9t^2+1}$; para $t=0$, $K=2$, $\sigma=3$. **5.66.** $K=\sigma=\frac{1}{3(t^2+1)^2}$; para $t=1$ $K=\sigma=\frac{1}{12}$. **5.67.** $K=\frac{2t}{(2t^2+1)^2}$, $\sigma=-\frac{2t}{(2t^2+1)^2}$; para $t=1$ $K=\frac{2}{9}$, $\sigma=-\frac{2}{9}$. **5.68.** $K=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\sigma=\frac{1}{3}$. **5.69.** $K=$ $=\sqrt{\frac{9y^4+4y^6+1}{(y^6+y^2+1)^3}}$, $\sigma=-\frac{6y}{9y^4+4y^6+1}$; para $y=1$ $K=\frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{3}}$; $\sigma=-\frac{3}{7}$. **5.70.** $\boldsymbol{w}=2\boldsymbol{j}+4t\boldsymbol{k}$, $w_\tau=4t$, $w_\nu=2$; $w_\tau|_{t=1}=4$. ● $w_\tau=$ $=\frac{dV}{dt}$, $w_\nu=\frac{v^2}{R}$. **5.71.** La recta $x-y=2$; $z'(t)=e^{i\frac{\pi}{4}}$.

● Utilícese la fórmula de Euler $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi$. **5.72.** La semicircunferencia superior $y=\sqrt{4-x^2}$; $z'(t)=2ie^{it}$. **5.73.** Una elipse $x=4\cos t$, $y=2\operatorname{sen}t$; $z'(t)=i(3e^{it}-e^{-it})$. **5.74.** La rama derecha de una hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$; $z'(t)=(2+i)e^t-(2-$ $-i)e^{-t}$. **5.75.** La rama «derecha» (recorrida dos veces) de la parábola $y=x^2$; $z'(t)=2t+4it^3$. **5.76.** Un arco de la cicloide $x=t-$ $-\operatorname{sen}t$, $y=1-\cos t$; $z'(t)=1-e^{-it}$. **5.77.** La evolvente de una circunferencia $x=a(\cos t+t\operatorname{sen}t)$, $y=a(\operatorname{sen}t-t\cos t)$;

$z'(t) = aie^{it}$. 5.78. La espiral logarítmica $r = e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}$, $\alpha\beta \neq 0$; si $\alpha = 0$, entonces la función $r = 1$; si $\beta = 0$, el rayo $\varphi = 0$; $z'(t) = (\alpha + i\beta) \times \times e^{(\alpha+i\beta)t}$. 5.79. $r', r\varphi'$; $r'' - r\varphi'^2$, $2r'\varphi' + r\varphi''$. ● Represéntese la ley de movimiento en la forma exponencial $z = re^{i\varphi}$ y hállense las derivadas z' y z''. Las magnitudes buscadas son coeficientes de $e^{i\varphi}$ e $ie^{i\varphi}$. 5.80. La velocidad $v = izf'(z)$. ● Hágase uso de la forma exponencial del número complejo: $z = Re^{i\varphi}$ y hállese la derivada $\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$.

6.6. ◀ Según la condición $f(a) \cdot f(b) < 0$. Definamos los números x_n $(n = 0, 1, \ldots)$ mediante la igualdad

$$x_n = (a_n + b_n)/2,$$

donde $a_0 = a$, $b_0 = b$, $p_n = f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, y

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1}, & \text{si} \quad p_n < 0, \\ x_{n-1}, & \text{si} \quad p_n \geqslant 0, \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} x_{n-1}, & \text{si} \quad p_n \leqslant 0, \\ b_{n-1}, & \text{si} \quad p_n > 0. \end{cases}$$

Obtendremos $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$, $n = 1, 2, \ldots$, con la particularidad de que $[a_n, b_n]$ es un segmento de aislación de la raíz, cuya longitud es 2^n veces menor que la del segmento inicial. En particular, $a_n = b_n = x_{n-1}$, si $f(x_{n-1}) = 0$.

El programa tiene la forma siguiente:

```
  SUBROUTINE FORK (F, A, B, N)
  K = 0
  AN = A
  BN = B
1 X = (AN + BN)/2
  S + F (X)
  IF (S.EQ.O.) CO TO 4
  IF (F (AN) * S.GT.0) GO TO 2
  BN = X
  GO TO 3
2 AN = X
3 K = K + 1
  IF (K.LT.N) GO TO 1
  A = AN
  B = BN
  RETURN
4 A = X
  B = X
  RETURN
  END
```

El programa dado puede emplearse también para hallar la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en el segmento $[a, b]$, tomando como valor de la raíz la magnitud $(a_n + b_n)/2$; en este caso el error absoluto límite es igual a $(b_n - a_n)/2^{n+1}$. ▶

6.8. 1,6702. 6.9. −0,6823. 6.10. −2,2340, 0,3276. 6.11. 2,8931. 6.12. −1,4305, 1,2963. 6.13. 2,0946. 6.14. −2,3300, 0,2016, 2,1284. 6.15. 0,3684. 6.16. −2,3247. 6.17. −0,7976, 1,4945. 6.18. 0,2510, 1,4934. 6.19. −0,7549. 6.20. 1,5160. 6.21. 3,3532. 6.22. 1,2970. 6.23. 1,2672. 6.24. 1,3713. 6.25. 1,7556. 6.26. 0,6529. 6.27. 0, 0,7469. 6.28. 4,0,3099. 6.29. −1,4916. 6.30. 0,5110. 6.31. 0,7391. 6.32. ±0,8241. 6.33. ±0,7339, 0. 6.34. 3,6926. 6.35. 1,8411. 6.36. 1,0967.

6.38.
```
      FUNCTION CHORD (F, A, B, S, EPS)
      FA = F (A)
      FB = F (B)
```

```
      X = A — (B — A) * FA/(FB — FA)
      X1 = X
      FX = F (X)
      IF (FA * FX.GT.0.) GO TO 2
    1 X = X — (X — A) * FX/(FX — FA)
      FX = F (X)
      DX = S * ABS (X — X1)
      X1 = X
      IF (DX.GT.EPS) GO TO 1
      CHORD = X
      RETURN
      2X = X — (B — X) * FX/(FB — FX)
      FX = F (X)
      DX = S * ABS (X — X1)
      X1 = X
      IF (DX.GT.EPS) GO TO 2
      CHORD = X
      RETURN
      END
```

6.39.
```
      FUNCTION TANGEN (F, FD, A, B, S, EPS)
      FA = F (A)
      C = A — (B — A) * FA/(F (B) — FA.
      P = FA * F (C)
      IF (P) 2, 1, 3
    1 TANGEN = C
      RETURN
    2 X = A
      GO TO 4
    3 X = B
    4 X1 = X
      X = X — F (X)/FD (X)
      IF (S * (X1 — X)** 2.GT.EPS) GO TO 4
      TANGEN = X
      RETURN
      END
```

6.40.
```
      FUNCTION COMBI (F, FD, A, B, EPS)
      FA = F (A)
      FB = F (B)
      X = A — (B — A) * FA/(FB — FA)
      FX = F (X)
      IF (FA * FX.GT.0) GO TO 2
      XT = A
```

```
1 X = X - (X - A) * FX/(FX - FA)
  FX = F (X)
  XT = XT - F (XT)/FD (XT)
  IF (ABS (X - XT).GT.EPS) GO TO 1
  COMBI = (X + XT)/2.
  RETURN
2 XT = B
3 X = X - (B - X) * FX/(FB - FX)
  FX = F (X)
  XT = XT - F (XT)/FD (XT)
  IF (ABS (X - XT).GT.EPS) GO TO 3
  COMBI = (X + XT)/2.
  RETURN
  END
```

6.41. Respuesta al problema 6.8:

```
FUNCTION F (X)
F = X** 3 + 2. * X - 8.
RETURN
END
```

Las respuestas a otros problemas difieren en segundos operadores.

6.42. El problema para una computadora electrónica consta de tres unidades de programa: función subprograma FUNCTION F (X), función subprograma FUNCTION CHORD (F, A, B, S, EPS) y programa principal que para el problema 6.17 tiene la forma siguiente:

```
  EXTERNAL F
  ROOT1 = CHORD (F, -1, -0.5, 1.4, 0.0001)
  ROOT2 = CHORD (F, 1.2, 1.8, 3.4, 0.0001)
  WRITE (3,1) ROOT1, ROOT2
1 FORMAT ('LAS RAICES DE LAS ECUACIONES', F8.4, 'Y', F8.4)
  STOP
  END
```

6.43. El problema para una computadora electrónica contiene 4 unidades de programa. La respuesta al problema 6.35 tiene la forma siguiente:

1) Función subprograma para el cálculo de los valores de la función:

```
FUNCTION F (X)
F = X** 2 + ALOG (X) - 4.
RETURN
END
```

2) función subprograma para el cálculo de los valores de la derivada:

```
FUNCTION FD (X)
FD = 2. * X + 1./X
RETURN
END
```

3) Función subprograma para el cálculo de la raíz, empleando el método de las tangentes:

```
  FUNCTION TANGEN (F, D, A, B, S, EPS)
```

4) programa principal:

```
  EXTERNAL F, FD
  ROOT = TANGEN (F, FD). 1., 2., 0.3, 1E — 4)
  WRITE (3,1) ROOT
1 FORMAT ('RAÍZ =', F6.4)
  STOP
  END
```

6.44. Véase la respuesta al problema 6.43. El programa principal para el problema 6.35 tiene la forma siguiente:

```
  EXTERNAL F, FD
  ROOT = COMBI (F, FD, 1., 2., 1E — 4)
  WRITE (3,1) ROOT
1 FORMAT (12H RAÍZ =, F6.4)
  STOP
  END
```

6.45. y **6.46.** ● Hágase uso del método de inducción matemática. **6.47.** $f\left(\frac{12}{10}\right) = \cos\frac{\pi}{10} = 0{,}9511 \pm 0{,}0001$. **6.48.** $\ln 11 = 2{,}3979 \pm \pm 0{,}0003$. ● Con el fin de hallar los valores de la función en los nudos de interpolación, hágase uso de las ecuaciones $\ln 9 = 2 \ln 3$, $\ln 10 = \ln 5 + \ln 2$, $\ln 12 = 2 \ln 2 + \ln 3$, $\ln 15 = \ln 5 + \ln 3$. **6.49.** $f(1{,}26) = 1{,}105$, $f(1{,}58) = 1{,}261$. **6.50.** $f(1{,}89) = 2{,}092$, $f(2{,}43) = 3{,}144$. **6.51.** $f(0{,}83) = 0{,}817$, $f(0{,}97) = 0{,}942$. **6.52.** $f(1{,}74) = 1{,}2148$, $f(1{,}97) = 1{,}0007$. **6.53.** $f(2{,}72) = 1{,}5463$, $f(2{,}93) = 0{,}9805$. **6.54.** $f(23) = 0{,}921$, $f(41) = 0{,}755$. **6.55.** $f(1{,}3) = 1{,}184$ $f(4{,}0) = 1{,}758$. **6.56.** $f(0{,}20) = 0{,}1987$, $f(0{,}41) = 0{,}3990$. **6.57.** $f(1{,}25) = 0{,}0771$, $f(1{,}76) = 0{,}0128$. **6.58.** $f(58) = 0{,}275$, $f(79) = -0{,}291$. **6.59.** $\mathrm{Si}\,(0{,}26) = 0{,}25903$, $\mathrm{Si}\,(0{,}45) = 0{,}44497$. **6.60.** $\Phi(0{,}27) = 0{,}29742$ $\Phi(0{,}58) = 0{,}58792$. **6.62.** 1,82. **6.63.** 1,45. **6.64.** 2,3. **6.65.** 60° 30′.

6.66.

```
  SUBROUTINE DEL (X, Y, N)
  DIMENSION X (N), Y (N)
  N1 = N — 1
  DO 2 I = 1, N1
  A = Y (I)
  DO 1 K = I, N1
  C = X (K) — X (K + I)
  B = (Y (K) — Y (K + 1))/C
  Y (K) = A
```

6.67.

```
  SUBROUTINE DELTA (Y, N)
  DIMENSION Y (N)
  N1 = N — 1
  DO 2 I = 1, N1
  A = Y (I)
  DO 1 K = I, N1
  B = Y (K + 1) — Y (K)
  Y (K) = A
1 A = B
```

```
1 A = B                              2 Y (N) + A
2 Y (N) = A                            RETURN
  RETURN                               END
  END
```

El programa del problema 6.67 se aclara por el siguiente esquema (N = 6):

$$
\begin{array}{llllll}
y_1 \\
y_2 & \Delta y_1 \\
y_3 & \Delta y_2 & \Delta^2 y_1 & \Delta^3 y_1 \\
y_4 & \Delta y_3 & \Delta^2 y_2 & \Delta^3 y_2 & \Delta^4 y_1 & \Delta^5 y_1 \\
y_5 & \Delta y_4 & \Delta^2 y_3 & \Delta^3 y_3 & \Delta^4 y_2 \\
y_6 & \Delta y_5 & \Delta^2 y_4
\end{array}
$$

Al haberse realizado los operadores del ciclo exterior, para I = 3 la tabla Y contendrá las magnitudes y_1, Δy_1, $\Delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_1$, $\Delta^3 y_2$, $\Delta^3 y_3$, y finalizado todo el programa, las magnitudes y_1, Δy_1, $\Delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_1$, $\Delta^4 y_1$, $\Delta^5 y_1$.

6.68.

```
  FUNCTION POLINT (X, Y, N, KEY, ARG)
  DIMENSION X (N), Y (N)
  N1 = N - 1
  IF (KEY) 4, 1, 4
1 DO 3 I = 1, N1
  A = Y (I)
  DO 2 K = I, N1
  B = (Y (K) - Y (K + 1))/(X (K) - X (K + 1))
  Y (K) = A
2 A = B
3 Y (N) = A
4 POLINT = Y (N)
  DO 5 K = 1, N1
5 POLINT = POLINT * (ARG - X (N - K)) + Y (N -
  - K)
  RETURN
  END
```

6.69.

```
  SUBROUTINE POLIN (X, Y, N, KEY, ARG, P, E, EPS)
  DIMENSION X (N), Y (N)
  N1 = N - 1
  IF (KEY) 4, 1, 4
1 DO 3 I = 1, N1
  A = Y (I)
  DO 2 K = I, N1
```

```
      B = (Y (K) — Y (K + 1))/(X (K) — X (K + 1))
      Y (K) = A
    2 A = B
    3 Y (N) = A
    4 P = Y (1)
      EPS = 1
      DO 5 I = 1, N1
      EPS = EPS * (ARG — X (I))
    5 P = P + EPS * Y (I + 1)
      EPS = EPS * Y (N)
      EPS = ABS (EPS)
      RETURN
      END
```

El polinomio de interpolación se calcula según el esquema:

$$p_{n-1}(x) = (\ldots((Y(N)(x - X(N-1) + Y(N-1))(x - \\ - X(N-2)) + Y(N-2))\ldots)(x - X(1)) + Y(1),$$

donde todas las expresiones entre paréntesis se calculan sucesivamente, partiendo de los paréntesis interiores.

6.70.

```
      FUNCTION POLIN (X, H, Y, N, KEY, ARG)
      DIMENSION Y (N)
      M = N — 1
      IF (KEY) 5, 1,5
    1 DO 3 I = 1, M
      A = Y (I)
      DO 2 K = I, M
      B = Y (K + 1) — Y (K)
      Y (K) = A
    2 A = B
    3 Y (N) = A
      F = 1.
      DO 4 I = 3, N
      FI = I — 1
      F = F * FI
    4 Y (I) = Y (I)/F
    5 T = (ARG — X)/H
      POLIN = Y (N)
      DO 6 K = 1, M
    6 POLIN = POLIN * (T — M + K) + Y (N — K)
      RETURN
      END
```

6.71. El problema para una computadora electrónica debe contener dos unidades de programa:

a) función subprograma

```
FUNCTION POLIN (X, H, Y, N, KEY, ARG)
```

b) programa principal que para el problema 6.50 tiene la forma:

```
  DIMENSION  Y (8)
  DATA Y/1.958, 2.107, 2.268, 2.443, 2.632, 2.841, 3.071, 3.324/
  P1 = POLIN (1.8, 0.1, Y, 8, 0,1.89)
  P2 = POLIN (1.8, 0.1, Y, 8, 1, 2.43)
  WRITE (3,1) P1, P2
1 FORMAT ('F (1.89) =', F5.3', F (2.43) =' , F5.3)
  STOP
  END
```

6.72. a) La función subprograma:

```
FUNCTION POLINT (X, Y, N, KEY, ARG)
```

b) programa principal (al 6.63):

```
  DIMENSION X (6), Y (6)
  DATA X/1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6/, Y/2.431, 2.928, 3.497, 4.144,
  4.875, * 5.696/
  XO = POLINT (Y, X, 6, 0, 4.498)
  WRITE (3,1) XO
1 FORMAT (30X, 'F(',F3.2,') = 4.498')
  STOP
  END
```

En el acceso a la función subprograma POLINT el primer parámetro es, para las designaciones cualesquiera, una tabla de los nudos de interpolación, y el segundo, la tabla de los valores correspondientes de la función.

6.73. a) El subprograma:

```
SUBROUTINE POLYN (X, Y, N, KEY, ARG, P, EPS)
```

b) el programa principal (al 6.62):

```
  DIMENSION X (8), Y (8)
  DATA X/1.5, 1.55, 1.6, 1.65, 1.7, 1.75, 1.8, 1.85/, Y/—1.125,
  —0.926, *—0.704, —0.458, —0.187, 0.109, 0.432, 0.732/
  CALL POLYN (Y, X, 8, 0, 0.569, POLY, EPSI)
  WRITE (3,1) POLY, EPSI
1 FORMAT ('F (X) = 0.569, DONDE X =' , F4.2, *' CON EXA-
  CTITUD DE HASTA', F5.4)
  STOP
  END
```

6.74. $f'(2{,}03) = 1{,}42249$, $f'(2{,}22) = 1{,}87640$. **6.75.** $f'(1{,}14) = 1{,}0704$, $f'(1{,}42) = 1{,}1698$. **6.76.** $f'(3{,}02) = 5{,}63133$, $f'(3{,}31) = 7{,}34833$. **6.77.** $f'(0{,}82) = 0{,}8077$, $f'(1{,}03) = 0{,}9914$. **6.78.** $f'(1{,}34) = 0{,}1873$, $f'(1{,}65) = 0{,}0741$. **6.79.** $f'(2) = 9$, $f''(2) = 12$. **6.80.** $f'(2{,}5) = 63{,}5$, $f''(2{,}5) = 75$.

6.81.

```
  FUNCTION DW1 (T, N)
  TN = N
  S = 0.
  DW1 = 1.
  D = 0.
1 IF ((T - S).EQ.0.) GO TO 3
  DW1 = DW1 * (T - S)
  D = D + 1./(T - S)
  S = S + 1
  IF (S.LE.TN) GO TO 1
  DW1 = DW1 * D
  RETURN
2 DW1 = DW1 * (T - S)
3 S = S + 1.
  IF (S.LE.TN) GO TO 2
  RETURN
  END
```

● Para $w_n(t) = \prod_{k=0}^{n} (t-k)$, $n = 0, 1, \ldots,$

$$w_n'(t) = \begin{cases} w_n(t) \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{t-k}, & t \neq \nu, \\ \prod\limits_{\substack{k=0 \\ k\neq\nu}}^{n} (t-k), & t = \nu, \end{cases} \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n.$$

6.82.

```
  FUNCTION DW2 (T, N)
  TN = N
  TK = 0.
  S1 = 0.
  S2 = 0.
  DW2 = 1.
  IF (T.EQ.0) GO TO 4
1 S1 = S1 + .1/(T - TK)
  DW2 = DW2 * (T - TK)
  TK = TK + 1.
  IF ((T - TK).EQ.O) GO TO 5
  S2 = S2 + (1./T - TK)) * S1.
2 IF (TK.LT.TN) GO TO 1
  DW2 = DW2 * (T - TN)
3 DW2 = DW2 * S2
  RETURN
4 TK = TK + 1.
  GO TO 1
5 IF (T.EQ.TN) GO TO 3
  TK = TK + 1.
  S2 = (1./(T - TK)) * S1
  GO TO 2
  END
```

● Para $w_n(t) = \prod_{k=0}^{n} (t-k)$

$$w_n''(t) = \left(w_n(t) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k}\right)' = w_n'(t) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k} + w_n(t) \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k}\right)' =$$

$$= w_n(t)\left(\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{t-k}\right)^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(t-k)^2}\right)=$$

$$=2w_n(t)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{t-k}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{t-j}=$$

$$=2w_n(t)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{t-j}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{t-k}\quad \text{para}\quad t\neq\nu,$$

$$w_n''(t)=2\prod_{\substack{k=0\\k\neq\nu}}^{n}(t-k)\sum_{j=\nu+1}^{n}\frac{1}{t-j}\sum_{\substack{k=0\\k\neq\nu}}^{j-1}\frac{1}{t-k}$$

para $t=\nu,\ \nu=0,\ 1,\ \ldots,\ n$

6.83.

```
  FUNCTION POLID1 (X, H, Y, N, KEY, ARG)
  DIMENSION Y (N)
  M = N - 1
  IF (KEY) 5, 1, 5
1 DO 3 I = 1, M
  A = Y (I)
  DO 2 K = I, M
  B = Y (K + 1) - Y (K)
  Y (K) = A
2 A = B
3 Y (N) = B
  F = 1.
  DO 4 I = 3, N
  FI = I - 1
  F = F * FI
4 Y (I) = Y (I)/F
5 T = (ARG - X)/H
  POLID1 = Y (2)
  DO 6 I = 2, M
6 POLID1 = POLID1 + DW1 (T, I - 1) * Y (I + 1)
  RETURN
  END
```

6.84. La función-subprograma

```
FUNCTION POLID2 (X, H, Y, N, KEY, ARG)
```

se diferencia del subprograma del problema 6.83 en los siguientes tres operadores (quinto, cuarto y tercero a contar del fin):

```
  POLID2 = Y (3)
  DO 6 I = 3, M
6 POLID2 = POLID2 + DW2 (T, I — 1) * Y (I + 1)
```

6.85. El problema para una computadora electrónica debe contener tres unidades de programa:

a) función-programa FUNCTION DW1 (T, N)

b) función-subprograma

FUNCTION POLID1 (X, H, Y, N, KEY, ARG)

c) programa principal que para el problema 6.75 tiene la forma siguiente:

```
  DIMENSION Y (8)
  DATA Y/1.0083, 1.1134, 1.2208, 1.331, 1.4449, 1.5634, 1.6876,
  1.8186/
  DX1 = POLID1 (1., 0.1, Y, 8,0, 1.14)
  DX2 = POLID1 (1., 0.1, Y, 8, 1, 1.42)
  WRITE (3,1) DX1,DX2
1 FORMAT ('VALORES DE LA DERIVADA', F7.4, *'PARAX =
  = 1.14 Y', F7.4, 'PARA X = 1.42')
  STOP
  END
```

6.86. El problema para una computadora electrónica debe contener cinco unidades de programa

funciones subprogramas:

a) FUNCTION DW1 (T, N)

b) FUNCTION DW2 (T, N)

c) FUNCTION POLID1 (X, H, Y, N, KEY, ARG)

d) FUNCTION POLID2 (X, H, Y, N, KEY, ARG)

e) programa principal que para el problema 6.79 tiene la forma siguiente:

```
  DIMENSION Y (6)
  DATA Y/1., 5., 21., 55., 113., 201./
  D1 = POLID1 (., 1., Y, 6, 0,2.)
  D2 = POLID2 (1., 1., Y, 6, 1, 2.)
  WRITE (3, 1) D1, D2
1 FORMAT ('PARA X = 2 1 raDERIVADA = ', F4.1, *'2 — DA =
  = ', F4.1)
  STOP
  END
```

CAPÍTULO 6

CÁLCULO INTEGRAL DE LAS FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE

§ 1. Métodos principales de cálculo de la integral indefenida

1. Función primitiva e integral indefenida. Una función $F(x)$ se denomina función *primitiva* $f(x)$, definida en cierto conjunto X, si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Si $\Phi(x)$ y $F(x)$ son dos primitivas de una misma función $f(x)$, entonces

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

donde $C = \text{const}$. Viceversa, si $F(x)$ es una función primitiva $f(x)$, entonces $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ es la totalidad de todas las primitivas suyas llamada *integral indefenida* de la función $f(x)$ y denotada por el símbolo $\int f(x)\,dx$. De este modo, por definición

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}, \tag{1}$$

donde $F(x)$ es una de las funciones primitivas de $f(x)$, y la constante C toma valores reales.

De acuerdo con la tradición, la igualdad (1) se anota sin una designación explícita del conjunto en el segundo miembro, es decir, en la forma

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

denominándose C constante arbitraria.

Propiedades de la integral indefenida

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$.

3. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \; a \neq 0$.

4. $\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$.

Tabla de las integrales indefenidas principales

1. $$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+2} + C, \quad (n \neq -1).$$

2. $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

3. $$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0,\ a \neq 1; \quad \int e^x\,dx = e^x + C.$$

4. $$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$$

5. $$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C.$$

6. $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

7. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

8. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

9. $$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

10. $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \ (a \neq 0).$$

11. $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C.$$

12. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcson}\frac{x}{a} + C, \quad |x| < |a|.$$

13. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C, \quad |x| > |a|.$$

14. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C.$$

15. $$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$$

16. $$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$$

17. $$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

18. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

Hállense las funciones primitivas de las siguientes funciones:

1.1. $2x^7$. **1.2.** $4\sqrt[3]{x}$. **1.3.** $\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}$.

1.4. $\frac{x^3+5x^2-1}{x}$. **1.5.** $\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}}$.

1.6. $1-2\,\mathrm{sen}^2\frac{x}{2}$. **1.7.** $\frac{1}{\sqrt{a+bx}}$. **1.8.** e^{2-3x}.

1.9. $\frac{1}{\sqrt[3]{5x}}$. **1.10.** $\frac{1}{\cos^2 4x}$. **1.11.** $\frac{x^3+1}{x-1}$.

1.12. $1-8\,\mathrm{sen}^2 2x\cos^2 2x$.

1.13. $\left(\cos^2\frac{x}{2}+2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\mathrm{sen}^2\frac{x}{2}\right)^2$.

1.14. $\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)+\mathrm{sen}(\alpha+x)\,\mathrm{sen}(\alpha-x)$.

El proceso de búsqueda de una integral indefenida con ayuda de la tabla de integrales principales y transformaciones idénticas lleva el nombre de integración inmediata.

Ejemplo 1. Calcúlese $\int\frac{dx}{x^2-x^4}$.

◀ $$\int\frac{dx}{x^2-x^4}=\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)}=\int\frac{1-x^2+x^2}{x^2(1-x^2)}dx=$$
$$=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{1-x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$ ▶

Haciendo uso de la tabla de las integrales principales, hállense las siguientes integrales:

1.15. $\sqrt{mx}\,dx$. **1.16.** $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$. **1.17.** $\int\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}}dx$.

1.18. $\int\frac{x^3+2}{x}dx$. **1.19.** $\int 2^x e^x\,dx$.

1.20. $\int(2x+3\cos x)\,dx$. **1.21.** $\int\frac{2-\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}^2 x}dx$.

1.22*. a) $\int\mathrm{tg}^2 x\,dx$; b) $\mathrm{th}^2 x\,dx$. **1.23.** $\int\frac{dx}{x^2+4}$.

1.24. $\frac{dx}{5-x^2}$. **1.25.** $\int\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$.

1.26. $\int\frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2-9}}dx$. **1.27.** $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$.

1.28. $\int (x+a)(x+b)\,dx$. **1.29.** $\int (a^{1/3}+x^{1/3})^3\,dx$.

1.30. $\int \frac{\cos^2 x+3\cos x-2}{\cos^2 x}\,dx$.

1.31. a) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$; b) $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$.

1.32. $\int \frac{dx}{x^2-7}$. **1.33.** $\int \frac{x^2-9}{x^2-8}\,dx$.

2. Integración por cambio de variable. Existen dos variantes de este método.

a) *Método en el que una función se toma bajo el signo de la diferencial.* Sea que se requiere calcular la integral $\int f(x)\,dx$. Supongamos que existen las funciones derivables $u=\varphi(x)$ y $g(u)$ tales que la expresión subintegral $f(x)\,dx$ pueda ser escrita en la forma

$$f(x)\,dx = g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = g(u)\,du$$

(la transformación mencionada se denomina introducción de $u = \varphi(x)$ bajo el signo de la diferencial). Observemos que se verifica la relación

$$\int f(x)\,dx = \int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int g(u)\,du\,\Big|_{u=\varphi(x)}.$$

Por ello, el cálculo de la integral $\int f(x)\,dx$ se reduce al cálculo de otra integral $\int g(u)\,du$ (la cual puede resultar más simple que la inicial) y a la sustitución ulterior de $u=\varphi(x)$.

EJEMPLO 2. Calcúlese la integral $\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx = \int \operatorname{sen}^3 x\,d(\operatorname{sen} x) = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4}\Big|_{u=\operatorname{sen} x} + C = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + C. \text{ ▶}$$

EJEMPLO 3. Calcúlese la integral $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx = \int \frac{d(x^2+x-3)}{x^2+x-3} = \int \frac{du}{u} = \ln|u|\,\Big|_{u=x^2+x-3} + C = \ln|x^2+x-3| + C. \text{ ▶}$$

La operación de introducción de la función $\varphi(x)$ bajo el signo de diferencial es equivalente a la sustitución de la variable x por una variable nueva $u = \varphi(x)$.

EJEMPLO 4. Calcúlese la integral $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}$.

◀ Realicemos el cambio de la variable según la fórmula

$$u = 3x + 1.$$

Entonces, $du = 3\,dx$, es decir, $dx = \frac{1}{3}\,du$ y

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^{2/3}} = u^{1/3}\Big|_{u=3x+1} + C = \sqrt[3]{3x+1} + C.$$

La transformación ejecutada es equivalente a la puesta de la función $u = 3x + 1$ bajo el signo de diferencial. ▶

Calcúlense las integrales con ayuda de un cambio adecuado:

1.34. $\int \sqrt{3+x}\,dx$. **1.35.** $\int (3-4\,\mathrm{sen}\,x)^{1/3}\cos x\,dx$.

1.36. $\int \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,x\,dx$. **1.37.** $\int \frac{\sec^2 x}{\mathrm{tg}^4 x}\,dx$.

1.38. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$. **1.39.** $\int \frac{dx}{a+bx}$.

1.40. $\int \frac{\sec^2 x}{a-b\,\mathrm{tg}\,x}\,dx$. **1.41.** $\int \frac{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}}{2-3\,\mathrm{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}}\,dx$.

1.42. $\int \mathrm{ctg}\,x\,dx$. **1.43.** $\int 3^{4x}\,dx$.

1.44. $\int \cos(ax+b)\,dx$. **1.45.** $\int \mathrm{sen}(\ln x)\,\frac{dx}{x}$.

1.46. $\int \mathrm{sen}\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$. **1.47.** $\int \frac{dx}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

1.48. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 3x}$. **1.49.** $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx$.

1.50. $\int x\cdot 5^{-x^2}\,dx$. **1.51.** $\int \frac{dx}{1-4x^2}$.

1.52. $\int \frac{e^{-ax}}{1+e^{-2ax}}\,dx$. **1.53.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5-3x^2}}$.

1.54. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$. 1.55. $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\sqrt{\cos^2 x+4}}$,

1.56. $\int \frac{x^3\, dx}{x^8+1}$. 1.57. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

1.58. $\int \frac{dx}{a^2+b^2x}$. 1.59. $\int \frac{\operatorname{sen} ax}{\cos^3 ax}\, dx$.

1.60. $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh} x\, dx$. 1.61. $\int \frac{e^x}{(7-e^x)^2}\, dx$.

1.62. $\int \operatorname{tg} x\, dx$. 1.63. $\int \operatorname{cth} 4x\, dx$.

1.64. $\int \frac{a^{1/x}}{x^2}\, dx$. 1.65. $\frac{x\, dx}{\operatorname{ch}^2 (x^2+1)}$.

1.66. $\int \frac{dx}{(a-b)\, x^2-(a+b)}$ $(0<b<a)$.

1.67. $\int \frac{dx}{4x^2+7}$. 1.68. $\int \frac{x\, dx}{4x^2+7}$.

1.69. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^6+1}}$. 1.70. $\int \frac{a^x}{\sqrt{a^{2x}-1}}\, dx$.

Hállense las integrales indefenidas aplicando diferentes procedimientos:

1.71*. $\int \frac{x-1}{(x+2)^2}\, dx$. 1.72. $\int \frac{x^2}{3+x^2}\, dx$.

1.73. $\int \frac{x^2-2x+3}{x^2+4}\, dx$. 1.74. $\int \frac{x\, dx}{a^2x^4-b^2}$.

1.75. $\int \frac{x^3}{9-4x^8}\, dx$. 1.76. $\int \frac{x^4+1}{x^5+5x-8}\, dx$.

1.77. $\int x^3 \sqrt[4]{5x^4-3}\, dx$.

1.78. $\int \left(3-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

1.79. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx$. 1.80. $\int \frac{a^2+\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a^2+b^2x^2}\, dx$.

1.81. $\frac{dx}{\sqrt[5]{a^x}}$. 1.82. $\int e^x \sqrt[3]{4+e^x}\, dx$.

1.83. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4}}\, dx$. 1.84*. $\int \frac{dx}{2^x+1}$.

1.85. $\int \frac{e^{\arcsin x}+x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

1.86. $\int \frac{xe^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx,$ **1.87.** $\int \sqrt{3-\operatorname{ch} x}\,\operatorname{sh} x\,dx.$

1.88. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}}.$ **1.89.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}.$

1.90*. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx.$ **1.91*.** $\int \cos^2 x\,dx.$

1.92. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}}.$ **1.93.** $\int (\operatorname{sen} ax+\cos ax)^2\,dx.$

1.94. $\int \frac{x^2}{\cos(x^3)}\,dx.$ **1.95.** $\int \frac{(1+\cos 2x)^3}{\cos 2x}\,dx.$

1.96. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{3-\cos^2 x}}\,dx.$ **1.97.** $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\cos^4 x+3}}\,dx.$

1.98*. $\frac{dx}{\operatorname{sen} x\cos x}.$ **1.99.** $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}\sqrt{3}\,x}.$

1.100. $\int \operatorname{th} ax\,dx.$

1.101. $\int \operatorname{tg}^2(ax+b)\,dx.$

1.102. $\int x^2\operatorname{ctg}^2(x^3-3)\,dx.$

1.103. $\int e^{\sec x}\operatorname{tg} x\sec x\,dx.$

b) *Método de sustitución.* Supongamos que se requiere calcular la integral $\int f(x)\,dx$, donde la función $f(x)$ está definida en cierto conjunto X. Introduzcamos una nueva variable u mediante la fórmula

$$x=\varphi(u)\colon\ U\to X,$$

donde la función $\varphi(u)$ es derivable en cierto conjunto U y realiza una aplicación biunívoca de U sobre X, es decir, tiene su inversa

$$u=\varphi^{-1}(x)\colon X\to U.$$

Al sustituir $x=\varphi(u)$ en la expresión subintegral inicial, obtenemos

$$f(x)\,dx=f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du=g(u)\,du.$$

Luego, resulta válida la igualdad

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du\,\Big|_{u=\varphi^{-1}(x)} = \int g(u)\,du\,\Big|_{u=\varphi^{-1}(x)},$$

es decir, el cálculo de la integral $\int f(x)\,dx$ se reduce al cálculo de otra integral $\int g(u)\,du$ (la cual puede resultar más simple que la de partida) y la sustitución ulterior $u = \varphi^{-1}(x)$.

EJEMPLO 5. Calcúlese la integral $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

◀ En el caso que se considera el campo de definición de la función subintegral es $X = [0, +\infty)$. Realicemos la sustitución

$$x = \varphi(u) = u^2, \quad u \in [0, +\infty).$$

Entonces, $dx = 2u\,du$, $u = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$, de donde

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{u^3+u}{u+1}\,du = 2\int (u^2-u+2)\,du - 4\int \frac{du}{u+1} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + 2u\right) - 4\ln(u+1) + C\,\Big|_{u=\sqrt{x}} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x + 2x^{1/2}\right) - 4\ln(\sqrt{x}+1) + C. \ ▶$$

Empleando las sustituciones indicadas, hállense las integrales:

1.104. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$, $x = (1-t^2)^{1/3}$.

1.105. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$, $x = \frac{2}{t}$.

1.106. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$, $x = t^2$.

1.107. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$, $x = \ln t$.

Aplicando las sustituciones adecuadas, hállense las integrales:

1.108. $\int x(5x-1)^{19}\,dx$. **1.109.** $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}\,dx$.

1.110. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+1}\,dx$. **1.111.** $\int \frac{x}{(3-x)^7}\,dx$.

1.112. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}$. **1.113.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

3. Integración por partes. Si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones derivables, se verifica la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{2}$$

Esta fórmula se usa en aquellos casos cuando la expresión subintegral $f(x)\,dx$ puede ser representada en la forma $u\,dv$ de modo tal que la integral en el segundo miembro de (2) pueda resultar más sencilla que la integral inicial, siempre que se elijan adecuadamente las expresiones de u y dv. En este caso se debe tomar en consideración que u ha de reunir los factores que se simplifican en la derivación. Por ejemplo, si bajo el signo de integral figura el producto de un polinomio por una función trigonométrica o exponencial, u debe incorporar el polinomio, mientras que la expresión restante debe formar parte de dv. La fórmula (2) puede aplicarse más de una vez.

Ejemplo 6. Hállese $\int x^2 \cos x\,dx$.

◀ Suponemos $u = x^2$ y $dv = \cos x\,dx$. En este caso $du = 2x\,dx$ y $v = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$ (la constante C aquí se supone igual a cero, es decir, a título de v se toma una de las primitivas). De acuerdo con la fórmula (2) se tiene

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \operatorname{sen} x - \int 2x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Apliquemos otra vez la fórmula de integración por partes a la integral que figura en el segundo miembro, con la particularidad de que u nuevamente incorpora el polinomio (es decir, $2x$). Tenemos: $u = 2x$, $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. De aquí

$$du = 2\,dx \ \text{ y } \ v = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x.$$

Aplicando la fórmula (2), obtenemos en definitiva:

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \operatorname{sen} x - \left(-2x\cos x - \int (-\cos x)\,2\,dx\right) =$$
$$= x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C. \ ▶$$

Si la función subintegral contiene en calidad de factor una función logarítmica o trigonométrica inversa, éstas últimas deben tomarse por u, puesto que se simplifican como resultado de la derivación.

Ejemplo 7. Hállese $\int \ln x\,dx$.

◀ Suponemos $u = \ln x$, $dv = dx$. Entonces, $du = \dfrac{dx}{x}$ y $v = \int dx = x$. Sustituyendo en la fórmula (2), hallamos

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C. \ ▶$$

A veces, aplicada dos veces la fórmula de integración por partes, aparece en el segundo miembro una expresión que contiene la integral de partida, es decir, obtenemos una ecuación con la integral buscada a título de incógnita.

EJEMPLO 8. Hállese $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$.

◀ Suponemos $u = e^{ax}$, $dv = \operatorname{sen} bx\, dx$. Entonces, $du = ae^{ax}\, dx$, $v = -\frac{1}{b} \cos bx$. Sustituyendo en (2), tenemos

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Ahora suponemos $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\, dx$. Entonces, $du = ae^{ax}\, dx$, $v = \frac{1}{b} \operatorname{sen} bx$ y

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \left(\frac{e^{ax}}{b} \operatorname{sen} bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx \right).$$

De resultas se ha obtenido una ecuación respecto de la integral desconocida $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$. Resolviendo esta ecuación, hallamos

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = e^{ax} \frac{a \operatorname{sen} bx - b \cos bx}{b^2} + C_1,$$

o bien

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{e^{ax} (a \operatorname{sen} bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C. \ ▶$$

Hállense las integrales aplicando la fórmula de integración por partes:

1.114. $\int \arccos x\, dx$. **1.115.** $\int x \cos x\, dx$.

1.116. $\int x \ln x\, dx$. **1.117.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\, dx$.

1.118. $\int (x^2 - x + 1) \ln x\, dx$. **1.119.** $\int x^2 \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

1.120. $\int x^2 e^{-x}\, dx$. **1.121.** $\int x^3 e^x\, dx$.

1.122*. $\int x^3 e^{-x^2}\, dx$. **1.123.** $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\, dx$.

1.124. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$. **1.125.** $\int \frac{x \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\, dx$.

1.126. $\int e^{ax} \cos bx\, dx$. **1.127.** $\int e^{\arccos x}\, dx$.

1.128. $\int \ln (x + \sqrt{1 + x^2})\, dx$. **1.129.** $\int x^3 \ln x\, dx$.

1.130. $\int x3^x\,dx$. **1.131.** $\int (x^2-2x+3)\cos x\,dx$.

1.132. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. **1.133.** $\int \cos(\ln x)\,dx$.

Hállense las integrales, empleando métodos diferentes:

1.134*. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$. **1.135.** $\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx$.

1.136. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2}\,dx$. **1.137.** $\int x\operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

1.138. $\int \frac{\cos^2 x}{e^x}\,dx$. **1.139*.** $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$.

1.140.** Dedúzcase la fórmula recurrente para la integral $I_n=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$. Hállense I_2 y I_3.

Hállense las integrales:

1.141.** $\int \sqrt{x^2+a}\,dx$. **1.142**.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$.

1.143. $\int x\operatorname{arcsen} x\,dx$. **1.144.** $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$.

1.145. $\int x^2\operatorname{arctg} x\,dx$. **1.146.** $\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

1.147*. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

§ 2. Integración de las clases principales de funciones elementales

1. Integrales elementales que contienen un trinomio de segundo grado. Las *integrales del tipo*

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

se reducen a las integrales tabulares 10—14 (véase el p. 1, § 1) *formando un cuadrado perfecto* en el trinomio de segundo grado.

Ejemplo 1. Hállese $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$.

◀ Tenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{5-(x+2)^2}}=\operatorname{arcsen}\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C. \blacktriangleright$$

Las *integrales de la forma*

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx \quad \text{y} \quad \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

se reducen a las del tipo

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

formando en el numerador la derivada $2ax+b$ del trinomio de segundo grado.

Ejemplo 2. Hállese $\int \frac{x-1}{3x^2+2x+1}\,dx$.

◀ Por cuanto $(3x^2+2x+1)'=6x+2$, $x-1=\frac{1}{6}(6x^2+2)-\frac{4}{3}$, se tiene

$$\int \frac{x-1}{3x^2+2x+1}\,dx=\frac{1}{6}\int \frac{6x+2}{3x^2+2x+1}\,dx-\frac{4}{3}\int \frac{dx}{3\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln(3x^2+2x+1)-\frac{4}{9}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln(3x^2+2x+1)-\frac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{2}+C. \text{ ▶}$$

Las *integrales del tipo*

$$\int \frac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (r=1,\ 2)$$

se reducen a las integrales examinadas más arriba con ayuda de la sustitución $mx+n=\frac{1}{t}$.

Ejemplo 3. Hállese $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$.

◀ Suponemos $x=\frac{1}{t}$. Entonces, $dx=-\frac{dt}{t^2}$, $\sqrt{x^2-2x-1}=$

$$=\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}-1}=\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t} \quad \text{y}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}=-\int \frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}}=$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t+1)^2}} = -\operatorname{arcsen} \frac{t+1}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= -\operatorname{arcsen} \frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{2}} + C = -\operatorname{arcsen} \frac{x+1}{x\sqrt{2}} + C. \ \blacktriangleright$$

Calcúlense las integrales:

2.1. $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$. **2.2.** $\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$.

2.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$ **2.4.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

2.5. $\int \frac{dx}{x^2-6x}$. **2.6.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-3x^2}}$.

2.7. $\int \frac{x\,dx}{x^2-5x+4}$. **2.8.** $\int \frac{dx}{x^2-3x+3}$.

2.9. $\int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}\,dx$. **2.10.** $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}}\,dx$.

2.11. $\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+13}$. **2.12.** $\int \frac{3^x\,dx}{3^{2x}-4\cdot 3^x+3}$.

2.13. $\int \frac{4x-3}{x^2-2x+6}\,dx$. **2.14.** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

2.15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}$. **2.16.** $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}$.

2.17. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x+2x^2}}$. **2.18.** $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+5}}$.

2. Integración de fracciones racionales. Las fracciones del tipo $\frac{A}{x-\alpha}$, $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$, $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, donde $k = 2, 3, \ldots$; A, B, α, p, q son constantes, siendo $p^2 - 4q < 0$, llevan el nombre de fracciones *simples*.

Las integrales de las fracciones simples de los dos primeros tipos se calculan de un modo elemental, la integración de una fracción simple de tercer tipo se ha examinado en el ejemplo 2.

La integración de la fracción de cuarto tipo, después de hacer en el numerador una derivada del trinomio de segundo grado que figura en el denominador y formado un cuadrado perfecto en dicho trinomio, se reduce al cálculo de las integrales

$$\int (x^2+px+q)^{-k}\,d(x^2+px+q) = -\frac{1}{(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}}$$

y

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k}.$$

La última integral puede calcularse según la fórmula concurrente (véase el problema 1.140).

La integración de la fracción racional arbitraria $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0}$ con coeficientes reales se efectúa, en el caso general, del modo siguiente.

1) Si $m \geqslant n$, es decir, si la fracción inicial $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ es *impropia*, se dede separar previamente en esta fracción la *parte entera*, esto es, representarla en la forma

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)}, \tag{1}$$

donde $M_{m-n}(x)$ y $R_r(x)$ son polinomios de grados $m-n \geqslant 0$ y r, respectivamente, además $r < n$, es decir, la fracción $\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ es *propia*.

La separación de la parte entera en la fracción $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ se realiza mediante la división del numerador por el denominador.

Ejemplo 4. Sepárese la parte entera de la fracción

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{(x^2+1)^3}{x(x^2-2x+1)}.$$

◀ La fracción es impropia, dado que $m = 6 > n = 3$. Con el fin de separar la parte entera escribamos el numerador y el denominador en la forma canónica:

$$(x^2+1) = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1,$$

$$x(x^2-2x+1) = x^3 - 2x^2 + x,$$

y, a continuación, realizando la división del primer polinomio por el segundo, obtenemos el cociente $x^3 + 2x^2 + 6x + 10$ y el resto $17x^2 - 10x + 1$. Por consiguiente,

$$\frac{(x^2+1)^3}{x(x^2-2x+1)} = x^3 + 2x^2 + 6x + 10 + \frac{17x^2-10x+1}{x^3-2x^2+x},$$

y la separación de la parte entera queda finalizada. ▶

2. Según muestra la fórmula (1), la operación de separación de la parte entera reduce la integración de una fracción racional arbitraria a la de un polinomio y de una fracción racional propia.

La integración de la fracción racional propia $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $m<n$, se efectúa mediante el desarrollo de la fracción en una suma de fracciones simples de los cuatro tipos mencionados más arriba, seguido de una integración ulterior.

El desarrollo citado se lleva a cabo de la manera siguiente. Supongamos que el denominador $Q_n(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ tiene raíces reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ cuya multiplicidad es $s_1, \ldots, s_l$ y pares complejos conjugados de las raíces $\beta_1, \bar{\beta}_1, \ldots, \beta_h, \bar{\beta}_h$ cuya multiplicidad es $t_1, \ldots, t_h$, respectivamente, $(s_1+\ldots+s_l+2t_1+\ldots$ $\ldots+2t_h=n)$, es decir, se verifica el desarrollo

$$Q_n(x)=a_n(x-\alpha_1)^{s_1}\ldots(x-\alpha_l)^{s_l}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_hx+q_k)^{t_k},$$

donde

$$x^2+p_\nu x+q_\nu=(x-\beta_\nu)(x-\bar{\beta}_\nu), \quad \nu=1, \ldots, k.$$

Entonces, el desarrollo de la fracción $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ en una suma de fracciones simples tendrá por expresión

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1}+\ldots+\frac{A_{s_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{s_1}}+\ldots+\frac{A_1^{(l)}}{x-\alpha_l}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{A_{sl}^{(l)}}{(x-\alpha_l)^{sl}}+\frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{B_{t_1}^{(1)}x+C_{t_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{B_1^{(h)}x+C_1^{(h)}}{x^2+p_hx+q_h}+\ldots+\frac{B_{t_h}^{(h)}x+C_{t_h}^{(h)}}{(x^2+p_hx+q_h)^{t_k}}. \qquad (2)$$

Los coeficientes A_i, B_i y C_i en este desarrollo se determinan igualando entre sí los coeficientes que tienen las mismas potencias de x del polinomio $P_m(x)$ y del que se obtiene en el numerador del segundo miembro (2) después de reducirlo a un denominador común (método de coeficientes indeterminados). Los coeficientes mencionados pueden determinarse también suponiendo x, en la igualdad (2) o alguna otra equivalente, igual a los números adecuadamente elegidos (en primer lugar, a los valores de las raíces reales del denominador $Q_n(x)$).

EJEMPLO 5. Calcúlese $\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}\,dx$.

◀ La fracción $\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}$ es propia y su desarrollo en una suma de fracciones simples tiene la forma

$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}.$$

Reduciendo el segundo miembro a un denominador común, obtenemos

$$x^2 + 4x + 4 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx \tag{3}$$

(igualdad idéntica de los numeradores), de donde, igualando entre sí los coeficientes que tienen las mismas potencias de x, tenemos

$$A + B = 1, \quad -2A - B + C = 4, \quad A = 4,$$

y a continuación hallamos

$$B = -3, \quad C = 9.$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}\,dx = \int \left(\frac{4}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{9}{(x-1)^2}\right) dx =$$

$$= 4\ln|x| - 3\ln|x-1| - \frac{9}{x-1} + C.$$

Se podrían determinar los coeficientes A, B, C suponiendo en la identidad (3) $x = 0$, $x = 1$, y, adicionalmente, $x = -1$. En este caso, para $x = 0$ hallamos $A = 4$; para $x = 1$ tenemos $C = 9$, y para $x = -1$ se tiene $4A + 2B - C = 1$, es decir, $B = -3$.

Al resolver el ejemplo en consideración sería mejor combinar ambos métodos mencionados, es decir, hallar $A = 4$ para $x = 0$, $C = 9$ para $x = 1$, y determinar B a partir de la condición de igualdad de los coeficientes que en (3) tienen x^2, es decir, de la igualdad $A + B = 1$. ▶

Ejemplo 6. Calcúlese $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

◀ La fracción $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ es propia y su desarrolo en una suma de fracciones simples tendrá la forma

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Tenemos

$$1 = A(x^2+1)^2 + Bx^2(x^2+1) + Cx(x^2+1) + Dx^2 + Ex.$$

Suponiendo $x = 0$, encontramos $A = 1$. Igualando entre sí los coeficientes que tienen las mismas potencias de x, obtenemos $0 = A + B$, $0 = C$, $0 = 2A + B + D$, $0 = C + E$, es decir, $B = -1$, $C = 0$, $D = -1$ y $E = 0$.

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}\right) dx =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C.$$

Ha de notarse que el desarrolo de la fracción $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ en fracciones simples puede obtenerse también sin que se emplee el método de los coeficientes indeterminados, a saber

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x(x+1)}-\frac{x}{(x^2+1)^2}=$$
$$=\frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)}-\frac{x}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}. \blacktriangleright$$

Calcúlense las integrales:

2.19. $\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)}$. **2.20.** $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$.

2.21. $\int \frac{x^3+2}{x^3-4x}\,dx$. **2.22.** $\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}\,dx$.

2.23. $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$. **2.24.** $\int \frac{2x-5}{(x^2-5x+4)^3}\,dx$.

2.25. $\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$. **2.26.** $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

2.27*. $\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2+1)^3}$. **2.28*.** $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$.

2.29. $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$. **2.30.** $\int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}\,dx$.

2.31. $\int \frac{dx}{x^3+8}$. **2.32.** $\int \frac{5x-13}{(x^2-5x+6)^2}\,dx$.

2.33. $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}\,dx$. **2.34.** $\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1}$.

Calcúlense las integrales sin recurrir al método de los coeficientes indeterminados:

2.35*. $\int \frac{dx}{x^4+a^2x^2}$. **2.36*.** $\int \frac{dx}{x^4-a^4}$.

2.37. $\int \frac{dx}{x^4-4x^2+3}$. **2.38*.** $\int \frac{dx}{x(x^6+1)^2}$.

2.39. $\int \frac{dx}{x^7+x^5}$. **2.40*.** $\int \frac{x^7}{(x^4+1)(x^4-2)}\,dx$.

2.41. $\int \frac{x^2-x}{(x+1)^9}\,dx$. **2.42.** $\int \frac{x^5+x^2}{x^9+x^3-2}\,dx$.

3. Integración de funciones trigonométricas e hiperbólicas.

a) Integrales del tipo $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$.

Si al menos uno de los números m ó n es entero positivo impar, entonces, separando de la potencia impar un factor y expresando con ayuda de la fórmula $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ la potencia par restante en términos de una función complementaria, llegamos a una integral tabular.

EJEMPLO 7. Calcúlese $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\, dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} \operatorname{sen} x\, dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\, d\cos x =$$

$$= -\int \frac{d - \cos x}{\sqrt[4]{\cos x}} + \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\, d\cos x =$$

$$= -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cos^3 x} + \frac{4}{11}\sqrt[4]{\cos^{11} x} + C. \ ▶$$

Si m y n son números pares no negativos, las potencias se reducen pasando a un argumento doble con ayuda de las fórmulas trigonométricas:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x.$$

EJEMPLO 8. Calcúlese $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx = \int (\operatorname{sen} x \cos x)^2 \cos^2 x\, dx =$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{4} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x\, dx +$$

$$+ \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cdot \cos 2x\, dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\, dx +$$

$$+ \frac{1}{16}\int \operatorname{sen}^2 2x\, d\operatorname{sen} 2x = \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C. \ ▶$$

Si $m + n = -2k$, $k \in \mathbb{N}$, es decir, $m + n$ es un número no negativo par y entero, entonces resulta más conveniente utilizar las sustituciones $\operatorname{tg} x = t$ ó $\operatorname{ctg} x = t$.

EJEMPLO 9. Calcúlese $\int \operatorname{sen}^{1/3} x \cos^{-13/3} x\, dx$.

◀ Puesto que $\frac{1}{3}-\frac{13}{3}=-4$, el cálculo de la integral se reduce a la integración de las potencias de una tangente:

$$\int \operatorname{sen}^{1/3} x \cos^{-13/3} x\,dx=\int \operatorname{tg}^{1/3} x \frac{dx}{\cos^4 x}=$$

$$=\int \operatorname{tg}^{1/3} x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)\,\frac{dx}{\cos^2 x}=\int \operatorname{tg}^{1/3} x\,d\operatorname{tg} x+$$

$$+\int \operatorname{tg}^{7/3} x\,d\operatorname{tg} x=\frac{3}{4}\operatorname{tg}^{4/3} x+\frac{3}{10}\operatorname{tg}^{10/3} x+C. \text{ ▶}$$

Para el cálculo de las integrales del tipo $\int \operatorname{tg}^m x\,dx$, $\int \operatorname{ctg}^m x\,dx$, donde $m=2, 3, \ldots$, se usan las fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x-1, \qquad \operatorname{ctg}^2 x=\operatorname{cosec}^2 x-1.$$

EJEMPLO 10. Calcúlese $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx=\int \operatorname{ctg}^2 x\,(\operatorname{cosec}^2 x-1)\,dx=$$

$$=-\int \operatorname{ctg}^2 x\,d\operatorname{ctg} x-\int (\operatorname{cosec}^2 x-1)\,dx=$$

$$=-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+\operatorname{ctg} x+x+C. \text{ ▶}$$

En el caso general las integrales del tipo $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$, donde m y n son números enteros, se calculan con ayuda de las fórmulas recurrentes, las que se deducen mediante la integración por partes.

EJEMPLO 11. Dedúzcase la fórmula recurrente para $\int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x}$ y calcúlese con su ayuda $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

◀ Tenemos:

$$I_{2k+1}=\int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x}=\int \frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\cos^{2k+1} x}\,dx=$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^{2k+1} x}\,dx+\int \frac{dx}{\cos^{2k-1} x}=\int \operatorname{sen} x\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{2k+1} x}\,dx+I_{2k-1}.$$

Suponemos $u=\operatorname{sen} x$, $dv=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^{2k+1} x}\,dx$. Entonces, $du=\cos x\,dx$, $v=$ $=\dfrac{1}{2k\cos^{2k} x}$, y mediante la integración por partes, obtenemos

$$I_{2k+1}=\frac{\operatorname{sen} x}{2k\cos^{2k} x}-\frac{1}{2k}\int\frac{dx}{\cos^{2k-1} x}+I_{2k-1},$$

o bien

$$I_{2k+1}=\frac{\operatorname{sen} x}{2k\cos^{2k} x}+\left(1-\frac{1}{2k}\right)I_{2k-1}$$

(fórmula recurrente).

En particular, para $k=1$ tenemos

$$I_3=\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos x}=$$
$$=\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x+\sec x|+C. ▶$$

Calcúlense las integrales:

2.43. $\int\operatorname{sen}^3 x\,dx$. **2.44.** $\int\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^8 x}\,dx$.

2.45. $\int\cos^7 x\,dx$. **2.46.** $\int\cos^4\frac{x}{2}\,dx$.

2.47. $\int\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx$. **2.48.** $\int\cos^2 x\operatorname{sen}^4 x\,dx$.

2.49. $\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^6 x}$. **2.50.** $\int\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}\,dx$.

2.51. $\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x\cos^5 x}$. **2.52.** $\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x\cos^2 x}$.

2.53. $\int\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen} x\cos x}\,dx$. **2.54.** $\frac{dx}{\cos^5 x}$.

2.55. $\int\operatorname{tg}^3 x\,dx$. **2.56.** $\int\left(\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}^4\frac{x}{2}\right)dx$.

2.57. $\int\frac{dx}{\sqrt{\cos x\operatorname{sen}^3 x}}$. **2.58.** $\int\cos^5 x\,dx$.

2.59. $\int\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$. **2.60.** $\int\operatorname{sen}^6 2x\,dx$.

2.61. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. **2.62.** $\int \frac{dx}{\cos \frac{x}{3} \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3}}$.

2.63. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x}$. **2.64.** $\int \cos x \cos^2 2x \, dx$.

b) Para integrar los productos de los senos y cosenos de distintos argumentos se emplean las fórmulas trigonométricas:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)),$$

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)),$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} (\alpha - \beta) + \operatorname{sen} (\alpha + \beta)).$$

EJEMPLO 12. Hállese $\int \cos 9x \cos 5x \, dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \cos 9x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2} \int (\cos 4x + \cos 14x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{28} \operatorname{sen} 14x + C. \quad ▶$$

Calcúlense las integrales:

2.65. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x \, dx$. **2.66.** $\int \operatorname{sen} 10x \operatorname{sen} 15x \, dx$.

2.67. $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} \, dx$. **2.68.** $\int \operatorname{sen} \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} \, dx$.

2.69. $\int \cos x \cos^2 3x \, dx$. **2.70.** $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x \, dx$.

c) Las integrales del tipo

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) \, dx,$$

donde $R(u, v)$ es una función racional de dos variables, se reducen a las integrales de la función racional de un argumento nuevo t mediante la sustitución $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. En este caso se emplean las fórmulas

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

EJEMPLO 13. Calcúlese $\int \frac{dx}{4\cos x+3\operatorname{sen} x+5}$.

◀ Suponemos $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Entonces

$$\int \frac{dx}{4\cos x+3\operatorname{sen} x+5}=2\int \frac{dt}{\left(4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+5\right)(1+t^2)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2+6t+9}=2\int\frac{dt}{(t+3)^2}=-\frac{2}{t+3}+C=$$

$$=-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}+C. \ ▶$$

Si $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ figuran bajo el signo de integral sólo en potencias pares, será más cómodo utilizar la sustitución $\operatorname{tg} x = t$.

EJEMPLO 14. Calcúlese $\int\frac{dx}{1-5\operatorname{sen}^2 x}$.

◀ Al dividir el numerador y el denominador por $\cos^2 x$ y hacer uso de la sustitución $\operatorname{tg} x = t$, obtendremos:

$$\int\frac{dx}{1-5\operatorname{sen}^2 x}=\int\frac{d\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x-5\operatorname{tg}^2 x}=\int\frac{dx}{1-4t^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2t}{1-2t}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\frac{1+2\operatorname{tg} x}{1-2\operatorname{tg} x}+C. \ ▶$$

Calcúlense las integrales:

2.71. $\int\frac{dx}{3\cos x+2}$. **2.72.** $\int\frac{dx}{3-2\operatorname{sen} x+\cos x}$.

2.73*. $\int\frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$. **2.74.** $\int\frac{dx}{4\operatorname{sen}^2 x-7\cos^2 x}$.

2.75. $\int\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x-2\cos x+5}\,dx$.

2.76. $\int\frac{\operatorname{sen} 2x}{1+4\cos^2 x}\,dx$. **2.77.** $\int\frac{dx}{2-\operatorname{sen} x}$.

2.78*. $\int\frac{dx}{(\operatorname{sen} x+4)(\operatorname{sen} x-1)}$.

2.79. $\int\frac{1+\operatorname{ctg} x}{1-\operatorname{ctg} x}\,dx$.

2.80. $\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x+8\operatorname{sen} x\cos x+12\cos^2 x}$.

d) La integración de las funciones hiperbólicas se realiza igual que la de las funciones trigonométricas, con la particularidad de que se emplean las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1, \qquad \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x=\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x,$$

$$\operatorname{ch}^2 x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x+1), \qquad \operatorname{sh}^2 x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x-1),$$

$$1-\operatorname{th}^2 x=\operatorname{sch}^2 x, \qquad 1-\operatorname{cth}^2 x=-\operatorname{csch}^2 x.$$

Calcúlense las integrales:

2.81. $\int \operatorname{ch}^2 3x\,dx.$ **2.82.** $\int \operatorname{sh}^3 2x\,dx.$

2.83. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\,dx.$ **2.84.** $\int \operatorname{ch}^4 x\,dx.$

2.85. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 x}\,dx.$ **2.86*.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x-4\operatorname{sh}^2 x}.$

2.87*. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x-1}.$ **2.88.** $\int \sqrt{\operatorname{ch} x+1}\,dx.$

2.89. $\int \operatorname{cth}^3 x\,dx.$ **2.90.** $\int \operatorname{th}^4 x\,dx.$

4. Integración de ciertas funciones irracionales. a) Las integrales del tipo

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right) dx,$$

donde $R(x, y, z, \ldots)$ es una función racional de sus argumentos y m_1, n_1, m_2, n_2, son números enteros, se calculan con ayuda de la sustitución $\frac{ax+b}{cx+d}=t^s$, donde s es el denominador común para las fracciones $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$

EJEMPLO 15. Calcúlese $\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt[4]{x+3}}.$

◀ Hagamos una sustitución $x+3=t^4$. Entonces, $dx=4t^3\,dt$, y, por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+3}-1\sqrt{x+3}}=4\int \frac{t_3\,dt}{(t-1)t^2}=4\int \frac{t\,dt}{t-1}=$$

$$=4\int \frac{(t-1)+1}{t-1}\,dt=4(t+\ln|t-1|)+C=$$

$$=4(\sqrt[4]{x+3}+\ln|\sqrt[4]{x+3}-1|)+C. \blacktriangleright$$

Hállense las integrales:

2.91. $\displaystyle\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$. **2.92.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x-3}}$.

2.93. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$. **2.94.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x+a}-1}{(x+a)(1+\sqrt[3]{x+a})}\,dx$.

2.95. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{(x-1)^3}$. **2.96** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}$.

2.97. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x+4})\sqrt{x}}$. **2.98.** $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.

b) El cálculo de las integrales del tipo

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

donde R es una función racional de dos argumentos, se realiza con ayuda de sustituciones trigonométricas de la manera siguiente. Formando un cuadrado perfecto en el trinomio de segundo grado y realizando, a continuación, el cambio de variable $u = x + \frac{b}{2a}$, la integral de partida se reduce a la integral de uno de los tres tipos siguientes:

1) $\displaystyle\int R(u, \sqrt{l^2-u^2})\,du$,

2) $\displaystyle\int R(u, \sqrt{l^2+u^2})\,du$,

3) $\displaystyle\int R(u, \sqrt{u^2-l^2})\,du$.

Las últimas integrales se reducen a las integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt$, o bien $\int R(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)\,dt$ por medio de las sustituciones trigonométrica o hiperbólica

1) $u = l \operatorname{sen} t$ ó $u = l \operatorname{th} t$,
2) $u = l \operatorname{tg} t$ ó $u = l \operatorname{sh} t$,
3) $u = l \sec t$ ó $u = l \operatorname{ch} t$, respectivamente.

Ejemplo 16. Calcúlese $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}$.

◀ Formando un cuadrado perfecto en el trinomio de segundo grado, tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}} = \int \frac{du}{\sqrt{(u^2+3)^3}}, \qquad \text{donde} \quad u = x+2.$$

Realizando la sustitución $u=\sqrt{3}\operatorname{tg} t$, $du=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\,dt$, $\sqrt{u^2+3}=$ $=\sqrt{3}\sec t$, obtenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+3)^3}}=\int \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t\sqrt{3^3}\sec^3 t}\,dt=\frac{1}{3}\int \cos t\,dt=$$
$$=\frac{1}{3}\operatorname{sen} t+C=\frac{1}{3}\,\frac{u}{\sqrt{u^2+3}}=\frac{1}{3}\,\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}}+C. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 17. Calcúlese $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$.

◀ Realizamos la sustitución $x=a\operatorname{ch} t$. Entonces, $dx=a\operatorname{sh} t\,dt$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{sh} t$, y luego

$$\int \sqrt{x^2-a}\,dx=a^2\int \operatorname{sh}^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int (\operatorname{ch} 2t-1)\,dt=$$
$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\operatorname{sh} 2t}{3}-t\right)+C=$$
$$=\frac{a^2}{2}(\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t-t)+C=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C. \blacktriangleright$$

Calcúlense las integrales:

2.99. $\int \frac{dx}{(x^2-3)\sqrt{4-x^2}}$.

2.100. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}$.

2.101. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$. **2.102.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$.

2.103. $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx$. **2.104.** $\int \sqrt{(3-2x-x^2)^3}\,dx$.

2.105. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$. **2.106.** $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,dx$.

2.107. $\int \sqrt{x^2-2x+10}\,dx$. **2.108.** $\int \sqrt{4x-x^2}\,dx$.

2.109. $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}\,dx$. **2.110.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$.

2.111. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$. **2.112.** $\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx$.

§ 3. Problemas mixtos de integración

Calcúlense las integrales

3.1. $\int \frac{x+3}{x^2+2x+4}\,dx.$ **3.2.** $\int \frac{x^3}{x^2-x-1}\,dx.$

3.3. $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)}.$ **3.4.** $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}.$

3.5. $\int \frac{dx}{x^5(x^4+1)^2}.$ **3.6.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+2}}.$

3.7. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{6+4\ln x-\ln^2 x}}.$ **3.8.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x+4}}.$

3.9. $\int x\sqrt{x^2-4}\,dx.$ **3.10.** $\int x\sqrt{x^2+4x-5}\,dx.$

3.11. $\int \sqrt{x^2+4x+5}\,dx.$ **3.12.** $\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{16-x^2}}.$

3.13. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+16}}.$ **3.14** $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}.$

3.15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1}.$ **3.16.** $\int \frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx.$

3.17. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx.$ **3.18.** $\int \frac{x\,dx}{1+\cos x}.$

3.19. $\int \frac{\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^4}\,dx.$ **3.20.** $\int \frac{dx}{2+\cos x}.$

3.21. $\int \frac{dx}{3-4\operatorname{sen}^2 x}.$ **3.22.** $\int \frac{2-\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx.$

3.23. $\int \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x}{\sqrt{5-\operatorname{sen}^2 x}}\,dx.$ **3.24.** $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x+5}\,dx.$

3.25. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\cos^5 x}.$ **3.26.** $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$

3.27. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x}.$ **3.28.** $\int x\operatorname{sen} x\cos 2x\,dx.$

3.29. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}.$ **3.30.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x}.$

3.31. $\int \operatorname{th}^5 x\,dx.$ **3.32.** $\int \frac{\operatorname{ch}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx.$

3.33. $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^2 x}.$ **3.34.** $\int \operatorname{sen}^2(\ln x)\,dx.$

3.35. $\int xe^{2x}\,dx$. **3.36.** $\int xe^{-x^2}\,dx$.

3.37. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+4e^x-5}$. **3.38.** $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}\,dx$.

3.39. $\int e^{\operatorname{arcsen} x}\,dx$. **3.40.** $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$.

3.41. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2}\,\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **3.42.** $\int \frac{\operatorname{arcsen} e^x}{e^x}\,dx$.

3.43. $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$. **3.44.** $\int x(1+x^2)\operatorname{arctg} x\,dx$.

3.45. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\,dx$. **3.46.** $\int x\ln(4+x^4)\,dx$.

3.47. $\int x\sqrt{x^2+1}\,\ln\sqrt{x^2-1}\,dx$.

3.48. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

3.49. $\int x^x(1+\ln x)\,dx$.

3.50. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)}\,dx$.

§ 4. Integral definida y métodos de su cálculo

1. Integral definida como límite de una suma integral. Si una función $f(x)$ está definida en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, y $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ es una partición arbitraria de este segmento en n partes (fig. 56), entonces la *suma integral* de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ se denomina suma de la forma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

donde $x_{k-1} \leqslant \xi_k < x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. En el lenguaje geométrico S_n es una suma algebraica de áreas de los rectángulos de base Δx_k y de altura $f(\xi_k)$.

Si la función $f(x)$, definida en el segmento $[a, b]$, es tal que existe un límite finito de la sucesión de sumas integrales S_n, a condición de que la máxima de las diferencias Δx_k tiende a cero, con la particularidad de que dicho límite no depende del modo de que el segmento $[a, b]$ se divide en segmentos $[x_{k-1}, x_k]$ ni tampoco de la elección de los puntos ξ_k en los segmentos mencionados, entonces la función $f(x)$ se denomina *integrable* en el segmento $[a, b]$, mientras que el propio límite lleva el nombre de *integral definida* de la función $f(x)$

dentro de los límites de a hasta b y se designa mediante el símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$. De este modo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k. \qquad (1)$$

Una función $f(x)$, continua en el segmento $[a, b]$, es integrable en él.

Geométricamente la integral definida (1) representa la suma algebraica de las áreas de las figuras limitadas por la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje Ox y las rectas $x = a$ y $x = b$, con la particularidad de que las áreas dispuestas por arriba del eje Ox figuran en dicha suma con el signo más, y las que se disponen por debajo del eje Ox, con el signo menos.

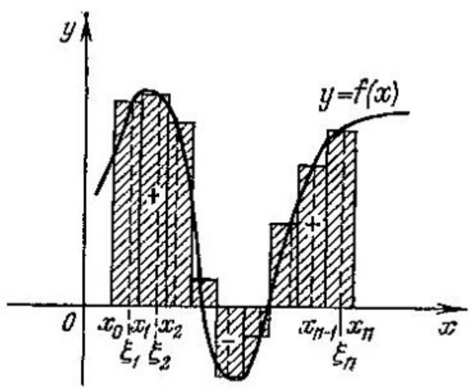


Fig. 56

EJEMPLO 1. Calcúlese $\int_1^2 x^2\,dx$, considerando la integral definida como límite de las sumas integrales.

1er MÉTODO. Dividamos el segmento de integración $[1, 2]$ en n partes iguales de la longitud $\Delta x = \frac{1}{n}$. Los puntos de división:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + \frac{1}{n}, \; x_2 = 1 + \frac{2}{n}, \; \ldots, \; x_{n-1} = 1 + \frac{n-1}{n}, \; x_n = 2.$$

A título de puntos ξ_k elijamos, por ejemplo, los extremos izquierdos de cada uno de los segmentos parciales. Entonces

$$f(x_0)=1,\ f(x_1)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2,\ f(x_2)=$$
$$=\left(1+\frac{2}{n}\right)^2,\ \ldots\ f(x_n-1)=\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Por consiguiente,

$$S_n=\frac{1}{n}\left(1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2\right)=$$
$$=\frac{1}{n^3}\left(n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\ldots+(2n-1)^2\right)=$$
$$=\frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{2n-1}k^2-\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right).$$

Aplicando la fórmula para la suma de los cuadrados de números enteros

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

hallamos

$$S_n=\frac{1}{n^3}\left(\frac{(2n-1)2n(4n-1)}{6}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right)=\frac{14n^2-9n+1}{6n^2},$$

de donde

$$\int_1^2 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{14n^2-9n+1}{6n^2}=\frac{7}{3}.$$

2do MÉTODO. Dividamos el segmento [1, 2] en partes de modo tal que las abscisas de los puntos de división formen una progresión geométrica:

$$x_0=1,\quad x_1=q,\quad x_2=q^2,\ \ldots,\ x_{n-1}=q^{n-1},\qquad x_n=q^n=2,$$

donde $q=2^{1/n}$. El punto ξ_k se eligirá en el extremo izquierdo del k-ésimo segmento. Entonces

$$f(x_0)=1,\quad f(x_1)=q^2,\quad f(x_2)=q^4,\ \ldots,\ f(x_{n-1})=q^{2(n-1)},$$
$$\Delta x_1=q-1,\ \Delta x_2=q^2-q=q(q-1),$$
$$\Delta x_3=q^2(q-1),\ \ldots,\ \Delta x_n=q^{n-1}(q-1),$$
$$S_n=1\cdot(q-1)+q^3(q-1)+q^6(q-1)+\ldots$$
$$\ldots+q^{3(n-1)}(q-1)=(q-1)(1+q^3+q^6+\ldots$$

$$\ldots + q^{3(n-1)}) = (q-1)\frac{q^{3n}-1}{q^3-1} = \frac{q^{3n}-1}{q^2+q+1} =$$
$$= \frac{2^3-1}{2^{2/n}+2^{1/n}+1} = \frac{7}{2^{2/n}+2^{1/n}+1}.$$

Por consiguiente,

$$\int_1^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{7}{2^{2/n}+2^{1/n}+1} = \frac{7}{3}. \blacktriangleright$$

Calcúlense las integrales definidas considerándolas como límites de las sumas integrales correspondientes:

4.1*. $\int\limits_0^5 (1+x)\,dx.$ **4.2*.** $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx.$

4.3*. $\int\limits_0^{10} e^x\,dx.$ **4.4*.** $\int\limits_0^3 \frac{dx}{x^2}.$

2. Cálculo de las integrales elementales con ayuda de la fórmula de Newton-Leibniz. Si $F(x)$ es una de las primitivas de la función $f(x)$, continua en $[a, b]$, resulta válida la siguiente *fórmula de Newton-Leibniz*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

EJEMPLO 2. Calcúlese $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$.

◀ Tenemos

$$\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{e^2}\frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_e^{e^2} =$$
$$= \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2 \approx 0{,}69. \blacktriangleright$$

Haciendo uso de la fórmula de Newton — Leibniz, calcúlense las integrales:

4.5. $\int\limits_{-1}^{2} x^3\,dx.$ **4.6.** $\int\limits_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$

4.7. $\int\limits_1^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx.$ **4.8.** $\int\limits_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})\,dx.$

4.9. $\int\limits_1^8 \frac{2 + 5\sqrt[3]{x}}{x^3}\,dx.$ **4.10.** $\int\limits_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx.$

4.11. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx.$ **4.12.** $\int\limits_{-\pi/4}^{10} \frac{dx}{\cos^2 x}.$

4.13. $\int\limits_1^2 e^x\,dx.$ **4.14.** $\int\limits_0^3 2^x\,dx.$

4.15. $\int\limits_2^5 \frac{dx}{x}.$ **4.16.** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x-1}.$

4.17. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^6}.$ **4.18.** $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2 \varphi\,d\varphi.$

4.19. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x\,dx.$ **4.20.** $\int\limits_0^2 \operatorname{sh}^3 x\,dx.$

4.21. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$ **4.22.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$

4.23. $\int\limits_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\,dx.$ **4.24.** $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3-x^2}\,dx.$

4.25. $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x^2}}{x^3}\,dx.$ **4.26.** $\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx.$

4.27. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}.$ **4.28.** $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 \alpha\,d\alpha.$

4.29. $\int\limits_0^{1/3} \operatorname{ch}^2 3x\,dx.$ **4.30.** $\int\limits_2^3 \frac{dy}{y^2-2y-8}.$

4.31. $\int\limits_{3/4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$. 4.32. $\int\limits_{0}^{2} \frac{2x-1}{2x+1}\,dx$.

4.33. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$.

Hállense los límites de las sumas con ayuda de las integrales definidas:

4.34**. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$.

4.35. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \times$

$\times \left(1 + \cos\frac{\pi}{2n} + \cos 2\frac{\pi}{2n} + \ldots + \cos(n-1)\frac{\pi}{2n} \right)$.

4.36. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{n}{n}} \right)$.

Calcúlense las áreas de las figuras limitadas por líneas:

4.37. $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=0$, $x=2$, $x=3$.

4.38. $y=\sqrt[3]{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=8$.

4.39. $y = 6 - x - 2x^2$, $y = x + 2$.

4.40. $y=\frac{x^2}{4}$, $y=2\sqrt{x}$.

4.41. $y=\cos x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{4}$.

4.42. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

4.43. $y=\frac{2}{x}$, $y=0$, $x=2$, $x=3$.

4.44. $y=\frac{3}{x}$, $x+y=4$.

3. Propiedades de la integral definida.

1) Si $f(x) \geqslant 0$ en el segmento $[a, b]$, entonces $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

2) Si $f(x) \leqslant g(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

3) $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

4) Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, m y M son los valores mínimo y máximo, respectivamente, de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

(*teorema de la estimación de una integral indefenida*).

EJEMPLO 3. Estímese la integral

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

◀ Tenemos: $1 \leqslant 1+x^4 \leqslant 2$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$;

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leqslant 1,$$

es decir, $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $M = 1$, $b-a = 1$. Por consiguiente, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant$ $\leqslant I \leqslant 1$. ▶

5) Si $f(x)$ es continua y $g(x)$ es integrable en $[a, b]$, $g(x) \geqslant 0$, mientras que m y M son los valores mínimo y máximo, respectivamente, de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx$$

(*teorema generalizado de la estimación de una integral definida*).

6) Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, existe tal punto $c \in (a, b)$ que se verifica la igualdad

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

(*teorema del valor medio*).

El número

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

recibe el nombre de *valor medio* de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

7) Si $f(x)$ es continua y $g(x)$ es integrable en $[a, b]$ y, además, $g(x)\geqslant 0$, existe un punto $c\in(a, b)$ tal que se verifica la igualdad

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

(*teorema generalizado del valor medio*).

8) Si $f^2(x)$ y $g^2(x)$ son integrables en $[a, b]$, entonces

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

(*desigualdad de Cauchy—Buniakovski*).

9) Integración de las funciones *pares* e *impares* dentro de los límites simétricos. Si una función $f(x)$ es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$. Si la función $f(x)$ es impar, se tiene $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.

10) Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, la *integral de límite superior variable*

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

será una primitiva para la función $f(x)$, es decir,

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x),\qquad x\in[a, b].$$

11) Si las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son derivables en el punto $x\in(a, b)$ y $f(t)$ es continua para $\varphi(a)\leqslant t\leqslant\psi(b)$, entonces

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt\right)'_x=f(\psi(x))\,\psi'(x)-f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

EJEMPLO 4. $I(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$. Hállese $I'(x)$.

◀ Haciendo uso de la propiedad 11) y tomando en consideración que $\varphi(x) = 0$, es decir, $\varphi'(x) = 0$, tenemos

$$I'(x) = e^{-(x^2)^2}\cdot(x^2)' = 2xe^{-x^4}. ▶$$

4.45. Determínense los signos de las integrales sin calcularlas:

a)* $\int\limits_{-2}^{1} \sqrt[3]{x}\,dx$; b) $\int\limits_{-1}^{1} x^3e^x\,dx$; c) $\int\limits_{1/3}^{1} x\ln x\,dx$.

4.46. Sin calcular las integrales, aclárese cuál de ellas es mayor:

a) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ó $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x}$; b) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2}$ ó $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^3}$;

c) $\int\limits_{0}^{1} e^{-x}\cos^2 x\,dx$ ó $\int\limits_{0}^{1} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$.

4.47. Hállese el valor medio de la función en el segmento dado:

a) x^3, $0 \leqslant x \leqslant 1$; b) $\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$;

c) $\sqrt[3]{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; d) $\cos^3 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

4.48. La intensidad de la corriente alterna varía de acuerdo con la ley $I = I_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$, donde T es el período. Hállese el valor medio de la intensidad de corriente por un semiciclo.

4.49. Estímese la integral $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{8+x^3}\,dx$.

4.50. Estímese la integral $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+2\operatorname{sen} x}}$.

4.51. Estímese la integral $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{(1+x)(1+x^3)}\,dx$,

haciendo uso:

a) del teorema generalizado de la estimación de una integral;

b) de la desigualdad de Cauchy — Buniakovski.

4.52. Estímese la integral $\int\limits_0^1 \sqrt{(4+x^3)\,x}\,dx$, haciendo uso:

a) del teorema generalizado de la estimación de una integral;

b) desigualdad de Cauchy — Buniakovski.

4.53. Hállense: a) $\frac{dI}{d\beta}$, b) $\frac{dI}{d\alpha}$, si

$$I=\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{e^x}{x}\,dx \quad (0<\alpha<\beta).$$

4.54. Hállense los puntos de extremo de la función

$$\Phi(x)=\int\limits_a^x \frac{\cos t}{t}\,dt \quad \left(x>0,\ 0<a<\frac{\pi}{2}\right).$$

Hállense las derivadas de las siguientes funciones:

4.55. $\Phi(x)=\int\limits_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$

4.56. $\Phi(x)=\int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)\,dt.$

4.57. $\Phi(x)=\int\limits_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}.$

4.58. $\Phi(x)=\int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\ln t}\ (x>0).$

4.59. Demuéstrese que

$$\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{1+x^4}\,dx=0.$$

4. **Cambio de variable en la integral definida.** Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, y la función $x=\varphi(t)$ es continuamente derivable en el segmento $[t_1, t_2]$, además $a=\varphi(t)$, $b=\varphi(t_2)$,

entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Ejemplo 5. Calcúlese $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx.$

◀ Apliquemos la sustitución $x = \operatorname{sen} t$. Entonces $dx = \cos t\,dt$, $t = \arcsin x$, $t_1 = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ y $t_2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Por consiguiente,

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}{\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt = (-\operatorname{ctg} t - t)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}. \ ▶$$

4.60. ¿Se podrá calcular la integral $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ con ayuda de la sustitución $x = \operatorname{sen} t$?

Calcúlense las integrales con ayuda de las sustituciones indicadas:

4.61. $\displaystyle\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}, \quad 3x-2 = t^2.$

4.62. $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}, \quad e^x+1 = t^2.$

4.63. $\displaystyle\int_0^{\operatorname{sh} 1} \sqrt{x^2+1}\,dx, \quad x = \operatorname{sh} t.$

4.64. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+2\cos x}, \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t.$

4.65. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\operatorname{sen}^2 x}, \quad \operatorname{tg} x = t.$

4.66. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{3-2x-x^2}\,dx, \quad x+1 = 2\operatorname{sen} t.$

Calcúlense las integrales con ayuda del cambio de variable:

4.67. $\int\limits_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. **4.68.** $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}$.

4.69. $\int\limits_{2}^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$. **4.70.** $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

4.71. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{(4+x^2)^2}$. **4.72.** $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$.

4.73. $\int\limits_{1/4}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$. **4.74.** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$.

4.75. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2}\,dx$. **4.76.** $\int\limits_{0}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

4.77. Muéstrese que $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{\ln x} = \int\limits_{1}^{2} \frac{e^x}{x}\,dx$.

4.78. Muéstrese que $\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{dx}{\arcsen x} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{x}\,dx$.

4.79. Convénzase de que

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{3x^7-2x^5+x^3-x}{x^4+3x^2+1}\,dx = 0.$$

5. Integración por partes. Si las funciones $u = u(x)$ y $v = v(x)$, al igual que sus derivadas $u'(x)$ y $v'(x)$, son continuas en el segmento $[a, b]$, entonces

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$$

(*fórmula de integración por partes*).

EJEMPLO 6. Calcúlese $\int\limits_1^e \ln x\,dx$.

◀ Suponemos $u=\ln x$, $dv=dx$, entonces $du=\frac{dx}{x}$, $v=x$. Tenemos

$$\int_1^e \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{dx}{x} = e - x\Big|_1^e = e-e+1=1. \ ▶$$

Calcúlense las integrales empleando el método de integración por partes:

4.80. $\int_0^1 xe^x\,dx$. **4.81.** $\int_0^1 \frac{\arcsen x}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

4.82. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. **4.83.** $\int_1^e \ln^2 x\,dx$.

4.84. $\int_0^{\pi/4} e^{3x}\operatorname{sen} 4x\,dx$. **4.85.** $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx$.

4.86. $\int_1^e x\ln x\,dx$. **4.87.** $\int_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx$.

4.88. $\int_0^{\pi/4} x^2\cos 2x\,dx$. **4.89.** $\int_0^{\pi/2} e^x\cos x\,dx$.

4.90. Muéstrese que para la integral

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx, \quad n\in\mathbb{N},$$

es válida la fórmula recurrente $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. Calcúlense I_7 e I_8.

4.91. Muéstrese que para la integral

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx, \quad n\in\mathbb{N},$$

es válida la fórmula recurrente $I_n=-\frac{1}{e}+nI_{n-1}$. Calcúlese I_4.

§ 5. Integrales impropias

1. Integrales con límites infinitos. Si la función $f(x)$ es continua para $a \leqslant x < +\infty$, entonces, por definición

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Si existe un límite finito en el segundo miembro de la fórmula (1), la integral impropia se denomina *convergente*; si dicho límite no existe, la integral se llama *divergente*.

Geométricamente la integral impropia (1) es, en el caso cuando $f(x) > 0$, el área de una figura limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, por la recta $x = a$ y por el eje Ox (asíntota).

Análogamente se definen la integral $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ y la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f(x)\,dx + \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Los *criterios de convergencia y de divergencia* se dan a conocer sólo para las integrales del tipo (1)

1) Si $F(x)$ es una primitiva para $f(x)$ y existe un límite finito $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty)$, entonces la integral (1) converge y es igual a

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a);$$

en cambio, si $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ no existe, la integral (1) diverge.

2) Supongamos que para $a \leqslant x < +\infty$ se tiene $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, converge también $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, además $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$. Si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, también diverge $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ (*criterios de comparación*).

3) Si para $a \leqslant x < +\infty$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ y existe un límite finito $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$, entonces las integrales $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ y

$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ convergen o divergen simultáneamente (*criterio límite de comparación*).

4) Si converge $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, también converge $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (la última integral en este caso se denomina *absolutamente convergente*).

5. Si para $x \to +\infty$, la función $f(x) > 0$ es un infinitésimo de orden α en comparación con $1/x$, la integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge cuando $\alpha > 1$ y diverge, cuando $\alpha \leqslant 1$.

EJEMPLO 1. Calcúlese $\int_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx$.

◀ Tenemos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{3}\,e^{-3x}\Big|_0^b\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{b\to+\infty} (1 - e^{-3b}) = \frac{1}{3}. \text{ ▶}$$

EJEMPLO 2. Analícese la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx.$$

◀ Tenemos

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

La integral dada diverge, puesto que es divergente $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. ▶

Calcúlense las integrales impropias (o bien establézcase su divergencia):

5.1. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$. **5.2.** $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

5.3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}$. **5.4.** $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x\,dx$.

5.5. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4}$. **5.6.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(1+x)}\,dx$.

5.7. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$. **5.8.** $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$.

5.9. $\int\limits_0^{+\infty} x\cos x\,dx$.

Analícese la convergencia de las integrales:

5.10. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{3+2x^2+5x^4}$.

5.11. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}\,dx$.

5.12. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^3+\sqrt[3]{x^5+1}}\,dx$.

5.13. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3+\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

5.14. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$.

5.15. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}\,dx$. **5.16.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$.

2. Integrales de las funciones no acotadas. Si la función $f(x)$ es continua para $a \leqslant x < b$, y $f(b) = \infty$, entonces por definición

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\gamma\to 0} \int\limits_a^{b-\gamma} f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Si existe un límite finito en el segundo miembro de la fórmula (3), la integral impropia se denomina *convergente*; si este límite no existe, se llama *divergente*.

La integral impropia (3) es geométricamente, en el caso en que $f(x) > 0$, el área de una figura limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, la recta $x = a$ y la asíntota vertical $x = b$.

La integral impropia se determina análogamente para el caso $f(a) = \infty$.

En el caso cuando $c \in (a, b)$ es un punto de discontinuidad y $f(c) = \infty$ tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\nu_1 \to 0} \int_a^{c-\nu_1} f(x)\,dx + \lim_{\nu_2 \to 0} \int_{c+\nu_2}^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Si la primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$ es continua para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces a las integrales (3) — (4) puede aplicarse la fórmula de Newton—Leibniz

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Los criterios de convergencia y divergencia de las integrales impropias de funciones no acotadas son semejantes a los mencionados en el p. 2.

Por lo común sirve de patrón de comparación la integral

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} \quad (\alpha > 0), \tag{5}$$

la cual converge cuando $\alpha < 1$, y diverge cuando $\alpha \geqslant 1$.

EJEMPLO 3. Analícese la convergencia de la integral

$$\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

◀ Cuando $x \to 1$, $\frac{1}{\ln x} \sim \frac{1}{x-1}$ (infinitos equivalentes), puesto que

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{1/x} = 1.$$

La integral $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ diverge, como sucede con la integral del tipo (5) cuando $\alpha = 1$. Por lo tanto, diverge también $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$. ▶

Calcúlense las integrales impropias (o bien establézcase su divergencia):

5.17. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4}$. **5.18.** $\int_0^2 \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{4/5}}$.

5.19. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x}$. **5.20.** $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

5.21. $\displaystyle\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$. **5.22.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

5.23. $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. **5.24.** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2/\pi}} \cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^3}$.

5.25. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Analícese la convergencia de las integrales:

5.26. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. **5.27.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

5.28. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$. **5.29.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1}\,dx$.

5.30. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

5.31. Demuéstrese que para $\alpha > 0$ la integral de Euler $\displaystyle\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$ que define la *función gamma* $\Gamma(\alpha)$, converge y establézcanse las siguientes relaciones:

a) si $\alpha = n$ (un número entero), entonces $\Gamma(n+1) = n!$;

b) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ para cualquier $\alpha > 0$;

c) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$;

d) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;

e) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\,\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}$, n es un número entero.

§ 6. Aplicaciones geométricas de la integral definida

1. Área de una figura plana. El área de la figura limitada por la gráfica de la función continua $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$), por dos rectas $x = a$ y $x = b$, y el eje Ox, o bien el área del *trapecio curvilíneo* limitado por el arco de la gráfica de la función $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (fig. 57), se calcula según la fórmula

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

El área de una figura limitada por las gráficas de las funciones continuas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$, $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, y por dos rectas

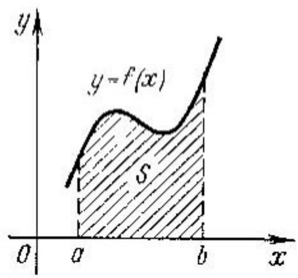


Fig. 57

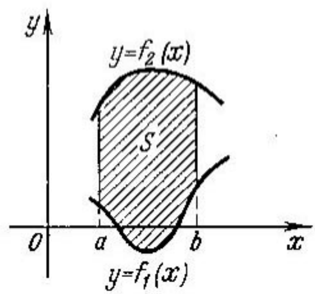


Fig. 58

$x = a$, $x = b$ (fig. 58) se determina según la fórmula

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \tag{2}$$

Los problemas más simples en los cuales se emplean las fórmulas (1) y (2) han sido aducidos en el § 4 (problemas 4.37 — 4.44).

Ejemplo 1. Hállese el área de la figura situada en el semiplano derecho y limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ y la parábola $y^2 = 2x$.

◀ Hallemos los puntos de intersección de las curvas (fig. 59) resolviendo el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 8,$$
$$y^2 = 2x.$$

Obtendremos los puntos (2, 2) y (2, −2). Utilizando la simetría respecto del eje Ox, hallamos el área buscada S como una suma duplicada de las áreas de los trapecios curvilíneos limitados por los arcos de la parábola $y = \sqrt{2x}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, y de la circunferencia $y = \sqrt{8 - x^2}$,

$2 \leqslant x \leqslant \sqrt{8}$, respectivamente:

$$S = 2\left(\int_0^2 \sqrt{2x}\,dx + \int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\,dx\right) = 2\left(\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\,x^{3/2}\Big|_0^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2} + 4 \operatorname{arcsen}\frac{4}{\sqrt{8}}\right)\Big|_2^{\sqrt{8}}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{8}{3} + 2\pi - 2 - \pi\right) = 2\pi + \frac{4}{3}. \ \blacktriangleright$$

A veces resulta cómodo utilizar las fórmulas, análogas a (1) y (2), pero respecto de la variable y (considerando x como función de y), en particular,

$$S = \int_c^d (f_2(y) - f_1(y))\,dy. \tag{3}$$

EJEMPLO 2. Hállese el área de la figura limitada por la parábola $(y-2)^2 = x-1$, por la tangente a esta parábola en el punto de ordenada $y_0 = 3$ y por el eje Ox.

◀ La forma de la figura (fig. 60) no permite utilizar directamente las fórmulas (1) ó (2). Sin embargo, si dicha figura se considera respecto del eje Oy, podemos aplicar la fórmula (3). Así pues, sea y la

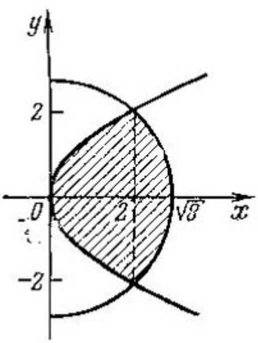


Fig. 59

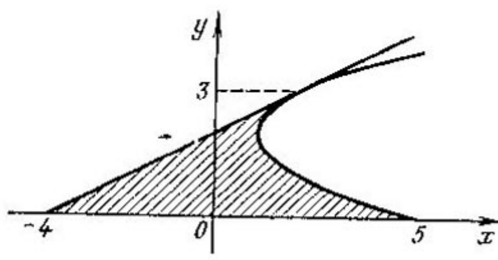


Fig. 60

variable independiente. La ecuación de la parábola se escribirá en la forma $x = y^2 - 4y + 5$.

Hallemos la ecuación de la tangente a la parábola. Esta se expresa: $x - x_0 = x_0'(y - y_0)$. Por cuanto $x_y' = 2(y-2)$, se tiene $x_0' = x'|_{y=3} = 2$. Hallando, luego, la abscisa del punto de tangencia

$x_0 = 2$, obtenemos la ecuación de la tangente

$$x - 2 = 2(y - 3), \quad \text{o bien } x = 2y - 4.$$

Suponiendo en (3) $f_1(y) = 2y - 4$, $f_2(y) = y^2 - 4y + 5$, tenemos:

$$S = \int_0^3 ((y^2 - 4y + 5) - (2y - 4))\, dy = \int_0^3 (y^2 - 6y + 9)\, dy =$$

$$= \int_0^3 (y-3)^2\, dy = \frac{1}{3}(y-3)^3 \Big|_0^3 = 9. \blacktriangleright$$

Hemos de notar que el empleo de las fórmulas (1) y (2) en la resolución del ejemplo (2) exigiría el cálculo de la suma de tres integrales:

$$S = \int_{-4}^{1} \left(\frac{1}{2}x - 2\right) dx + \int_1^2 \left(\left(\frac{1}{2}x + 2\right) - (2 + \sqrt{x-1})\right) dx +$$

$$+ \int_1^5 (2 - \sqrt{x-1})\, dx.$$

EJEMPLO 3. Hállese el área de la figura limitada por la curva $y = 1/x^2$, el eje Ox y la recta $x = 1$, y situada más a la derecha de dicha recta.

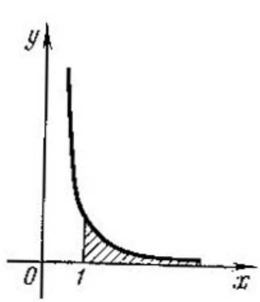


Fig. 61

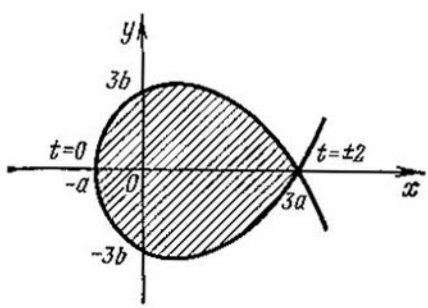


Fig. 62

◀ El área buscada (fig. 61) se expresa por medio de la integral impropia

$$S = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1. \blacktriangleright$$

Si la figura está limitada por una curva, que se expresa por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje Ox, el área de dicha figura se calcula según la fórmula

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,dx(t), \tag{4}$$

donde los límites de integración se hallan a partir de las ecuaciones $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$ $y(t) \geqslant 0$ en el segmento $[t_1, t_2]$).

La fórmula (4) puede emplearse también para calcular el área de una figura limitada por una curva cerrada (la variación del parámetro t de t_1 hasta t_2, debe corresponder al recorrido del contorno en sentido horario).

EJEMPLO 4. Hállese el área del bucle de la curva

$$x = a(t^2 - 1),\ y = b(4t - t^3)$$
$$(a > 0,\ b > 0),$$

◀ Hallemos los puntos de intersección de la curva con los ejes coordenados. Tenemos: $x = 0$ cuando $t = \pm 1$; $y = 0$ cuando $t = 0$, $t = \pm 2$. Por lo tanto, obtenemos los puntos siguientes: $(0, 3b)$ para $t = 1$; $(0, -3b)$ para $t = -1$; $(-a, 0)$ para $t = 0$; $(3a, 0)$ para $t = \pm 2$. El punto $(3a, 0)$ es el punto de autointersección de la curva. Para $0 \leqslant t \leqslant 2$ se tiene $y > 0$; para $-2 \leqslant t \leqslant 0$ se tiene $y \leqslant 0$ (fig. 62).

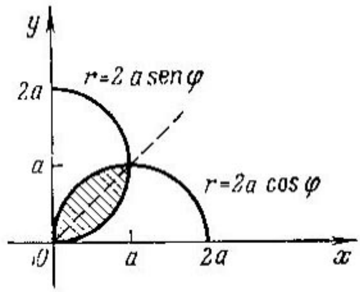


Fig. 63

El área de la figura se halla como el área duplicada de su mitad superior:

$$S = 2\int_{-a}^{3a} y\,dx = 2\int_{0}^{2} y(t)\,x'(t)\,dt = 2\int_{0}^{2} b\,(4t - t)^3\,a\cdot 2t\,dt =$$

$$= 4ab\int_{0}^{2} (4t^2 - t^4)\,dt = 4ab\left(\frac{4}{3}t^3 - \frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{256}{15}\,ab. \ ▶$$

El área de la figura limitada por la gráfica de una función continua $r = r(\varphi)$ y por dos rayos $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, donde φ y r son las coordenadas polares, o bien el área de un *sector curvilíneo* limitado por un arco de la gráfica de la función $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, se calcula según la fórmula

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\varphi. \tag{5}$$

EJEMPLO 5. Hállese el área de la lúnula limitada por los arcos de las circunferencias $r = 2a\cos\varphi$, $r = 2a\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ (fig. 63).

◀ Las circunferencias se cortan cuando $\varphi = \pi/4$; la figura examinada (fig. 63) es simétrica respecto del rayo $\varphi = \pi/4$. Por lo tanto, su área puede calcularse del modo siguiente:

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 4a^2 \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi = 2a^2\int_0^{\pi/4}(1-\cos 2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= 2a^2\left(\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/4} = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2. \text{ ▶}$$

6.1. Hállese el área de la figura limitada por la curva $y = \ln x$ y las rectas $x = e$, $x = e^2$, $y = 0$.

6.2. Hállese el área de la figura limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

6.3. Hállese el área de la figura limitada por las parábolas $y^2 = 4x$ y $x^2 = 4y$.

6.4. Hállese el área de la figura limitada por la parábola $y = x^2 + 2x$ y la recta $y = x + 2$.

6.5. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y = \frac{27}{x^2+9}$ e $y = \frac{x^2}{6}$.

6.6. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y^2 = 2px$ e $y^2 = \frac{4}{p}(x-p)^3$ $(p > 0)$.

6.7. Hállese el área de la figura limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 - 2ay = a^2$ y la recta $y = a$.

6.8. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$, $y = \frac{a^2x}{a^2+x^2}$ y el eje Oy.

6.9. Hállese el área de la figura limitada por el eje Oy, la parábola $(x-a)^2 = 2p(y-b)$ y la tangente a ésta en el punto de abscisa $x = c$ $(c > a > 0,\ p > 0)$.

6.10. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$, $x = 0$.

6.11. Hállese el área de la figura limitada por la parábola $y = 3 + 2x - x^2$ y el eje Ox.

6.12. Hállese el área de la figura limitada por la curva $y = \arcsen x$ y las rectas $x = 0$, $y = \pi/2$.

6.13. Hállese el área de la lúnula superior limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + 2ay = a^2$ $(a > 0)$.

6.14. Hállese el área de la figura limitada por las líneas $(x-1)(y+2)=2$ y $x+y=2$.

6.15. Hállese el área de la figura limitada por la curva $y=\ln x$, la tangente a dicha curva en el punto $x=e$ y el eje Ox.

6.16. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y=\ln(x+2)$, $y=2\ln x$, $y=0$.

6.17. Hállese el área de cada una de las dos partes en las que el círculo $x^2+y^2\leqslant 2ax$ está dividido por la parábola $y^2=2ax-a^2$.

6.18. Hállese el área de la lúnula limitada por la hipérbola $x^2-y^2=a^2$ y la parábola $y^2=\frac{3}{2}ax$.

6.19. Hállese el área del segmento hiperbólico de altura h y base $2r$ (el semieje real de la hipérbola es igual a a).

6.20. Hállese el área de la figura limitada por la curva $a^2y^2=\frac{x^5}{2a-x}$ y su asíntota $(a>0)$.

6.21. Hállese el área de la figura limitada por las líneas $x^2-y^2=a^2$, $(x^2-a^2)^3y^2=a^8$ y el eje Ox $(x>0)$.

6.22. Hállese el área de cada una de las dos partes en las que el círculo $x^2+y^2\leqslant 2ax$ está dividido por la hipérbola $4x^2-3y^2=a^2$.

6.23. Hállese el área del segmento elíptico de altura h y base $2r$ (el semieje mayor de la elipse es igual a a, la base del segmento es paralela al eje menor).

6.24. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$, $y=\frac{a^2x}{a^2+x^2}$ y el eje Ox $(a>0)$.

6.25. Hállese el área de la figura limitada por la curva $y^2=\frac{x^4}{a^2-x^2}$ y sus asíntotas.

6.26. Hállese el área de la figura limitada por la astroide $x=a\cos^3 t$, $y=a\operatorname{sen}^3 t$.

6.27. Hállese el área del bucle de la curva $x=\frac{1}{3}t(3-t^2)$, $y=t^2$.

6.28. Hállese el área de la figura limitada por el arco de la cicloide $x=2(t-\operatorname{sen} t)$, $y=2(1-\cos t)$ y el eje Ox.

6.29. Hállese el área del bucle de la curva $x=a(t^2+1)$, $y=b(t^3-3t)$.

6.30. Hállese el área del bucle de la curva $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$.

6.31. Hállese el área de la figura limitada por la cardioide $r = a(1 + \operatorname{sen} \varphi)$.

6.32. Hállese el área de un pétalo de la curva $r=a \operatorname{sen} 2\varphi$.

6.33. Hállese el área de la figura limitada por la curva $r = a \operatorname{sen} 5\varphi$.

6.34. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $r = a \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi$, $r = 2a \cos \varphi$ y el eje polar.

6.35. Hállese el área de la figura situada en el primer cuadrante y limitada por las curvas $r = a \operatorname{tg} \varphi$, $r = \dfrac{a}{\cos \varphi}$ y el eje polar.

6.36. Hállese el área de la figura limitada por dos espiras sucesivas de la espiral logarítmica $r = e^{\varphi}$, partiendo de $\varphi=0$.

6.37. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $r^2 = 2\cos 2\varphi$, $r = 1$ $(r \geqslant 1)$.

6.38. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $r = a \cos 3\varphi$.

6.39. Hállese el área de la figura limitada por la lemniscata de Bernoulli $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\varphi$.

6.40. Hállese el área de al figura limitada por la circunferencia $r = \sqrt{3} \operatorname{sen} \varphi$ y la cardioide $r = 1 - \cos \varphi$ (fuera de la cardioide).

2.2. Longitud del arco de una curva. Si una curva suave viene dada por la ecuación $y = f(x)$, entonces la longitud l de su arco es

$$l = \int_a^b \sqrt{(1 + y')^2}\, dx,$$

donde a y b son abscisas de los extremos del arco.

Si la curva está definida mediante las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, entonces

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt.$$

De un modo análogo se expresa la longitud del arco de una curva espacial definida por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt.$$

En el caso en que se da la ecuación polar de una curva suave $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, se tiene

$$l=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2+(r')^2}\, d\varphi.$$

EJEMPLO 6. Hállese la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = x^3$, desde el origen de coordenadas hasta el punto (4, 8).

◀ Tenemos:

$$y=x^{3/2}, \quad y'=\frac{3}{2}x^{1/2}.$$

$$l=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big|_0^4=\frac{8}{27}\,(10\sqrt{10}-1). \ ▶$$

EJEMPLO 7. Hállese la longitud de la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$.

◀ Tenemos

$$x'_t=-3a\cos^2 t\operatorname{sen} t, \quad y'_t=3a\operatorname{sen}^2 t\cos t,$$

$$\frac{1}{4}\,l=\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t\operatorname{sen}^2 t+9a^2\operatorname{sen}^4 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=3a\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t\cos t\,dt=3a\cdot\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3a}{2},$$

de donde $l=6a$. ▶

EJEMPLO 8. Hállese la longitud de la cardioide $r = a(1 - \cos\varphi)$.

◀ Tenemos:

$$r'=a\operatorname{sen}\varphi,$$

$$\frac{1}{2}\,l=\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2+a^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,d\varphi=2a\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=4a,$$

de donde $l=8a$. ▶

6.41. Hállese la longitud del arco de la parábola $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

6.42. Hállese la longitud del arco de la curva $y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ entre los puntos de su intersección con el eje Ox.

6.43. Hállese la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3$, situado dentro de la parábola $y^2 = 2px$.

6.44. Hállese la longitud del arco de la curva $y = a \ln (a^2 - x^2)$ $(a > 1)$, situado por arriba del eje Ox.

6.45. Hállese la longitud de la curva cerrada $8a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

6.46.* Hállese el perímetro de la lúnula formado por las circunferencias $x^2 + y^2 = 2ax$ y $x^2 + y^2 = 2by$ $(a > b > 0)$.

6.47. Hállese la longitud del arco de la catenaria $y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x$ comprendido entre $x = 0$ y $x = 3$.

6.48. Hállese la longitud del arco de la curva $y = \frac{2}{\pi} \ln \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}$ desde $x = \frac{1}{2}$ hasta $x = \frac{3}{2}$.

6.49. Hállese la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = \frac{5}{p}(x-p)^3$ que se obtiene al cortar la parábola por la recta $x = 2p$.

6.50. Hállese la longitud del arco de la curva $x = a(3 \cos t - \cos 3t)$, $y = a(3 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t)$ comprendido entre $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{2}$.

6.51. Hállese la longitud del arco de la curva $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, desde $t = 0$ hasta $t = 1$.

6.52. Hállese la longitud del bucle de la curva $x = t^2$, $y = t\left(\frac{1}{3} - t^2\right)$.

6.53. Hállese la longitud del arco de la curva $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ entre los puntos de su intersección con los ejes de coordenadas.

6.54. Hállese la longitud del bucle de la curva $x = a(t^2 + 1)$, $y = \frac{a}{3}(t^3 - 3t)$.

6.55. Hállese en la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ un punto que divide la longitud de la primera onda de la cicloide citada en razón 1 : 3 (a partir del origen de coordenadas).

6.56. Hállese la longitud del arco de la espiral logarítmica $r = e^{a\varphi}$ que se encuentra dentro de la circunferencia $r = 1$.

6.57. Hállese la longitud del arco de la cardioide $r = 2(1 - \cos\varphi)$ que se encuentra dentro de la circunferencia $r = 1$.

6.58.*. Hállese la longitud total de la curva $r = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$.

6.59. Hállese la longitud del arco de la espiral de Arquímedes $r = 5\varphi$, que se encuentra dentro de la circunferencia $r = 10\pi$.

6.60. Hállese la longitud total de la curva $r = a\,\mathrm{sen}^4\frac{\varphi}{4}$.

Hállense las longitudes de los arcos de las curvas espaciales:

6.61. $x = at^2$, $y = a\left(t + \frac{1}{3}t^3\right)$, $z = a\left(t - \frac{1}{3}t^3\right)$ desde $t = 0$ hasta $t = \sqrt{3}$.

6.62. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\,\mathrm{sen}\,t$, $z = e^t$ entre los planos $z = 0$ y $z = a$ $(a > 0)$.

6.63. $x^2 = 4y$, $9z^2 = 16xy$ entre los planos $x = 0$ y $x = 4$.

6.64. $x = a\sqrt{t}\cos t$, $y = a\sqrt{t}\,\mathrm{sen}\,t$, $z = at$, desde $t = 0$ hasta $t > 0$ arbitrario.

6.65. $x = t - \mathrm{sen}\,t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\cos\frac{t}{2}$ entre dos puntos de intersección de la curva con el plano Oxz.

3. Area de una superficie de revolución. El área de una superficie formada por la revolución, alrededor del eje Ox del arco de la curva definida por la función $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, se calcula según la fórmula

$$Q_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Si el arco viene dado por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, entonces

$$Q_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Si el arco está definido en coordenadas polares $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, entonces

$$Q_x = 2\pi\int_\alpha^\beta r\,\mathrm{sen}\,\varphi\sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi.$$

Si al arco de una curva gira alrededor de un eje arbitrario, el área de la superficie de revolución se expresa mediante la integral

$$Q=2\pi\int_A^B R\,dl,$$

donde R es la distancia desde el punto en la curva hasta el eje de revolución, dl es la diferencial del arco, A y B, los límites de integración correspondientes a los extremos del arco. En este caso R y dl deben ser expresadas en términos de la variable de integración.

Ejemplo 9. Hállese el área de la superficie formada por la revolución de la astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ en torno al eje Ox.

◀ Tenemos:

$$y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2},$$

$$y'=\frac{3}{2}(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)=$$

$$=-\frac{(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}},\quad \sqrt{1+\frac{a^{2/3}-x^{2/3}}{x^{2/3}}}=\frac{a^{1/3}}{|x|^{1/3}}.$$

Por consiguiente,

$$Q_x=2\cdot 2\pi\int_0^a (a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}\cdot\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\,dx=$$

$$=4\pi a^{1/3}\int_0^a (a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}x^{-1/3}\,dx=$$

$$=-4\pi a^{1/3}\cdot\frac{3}{2}\left.\frac{(a^{2/3}-x^{2/3})^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right|_0^a=\frac{12}{5}\pi a^2.\ ▶$$

Ejemplo 10. Hállese el área de una superficie formada por la revolución de una onda de la cicloide $x=a\,(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a\,(1-\cos t)$ alrededor del eje Ox.

◀ Tenemos:

$$x'_t=a\,(1-\cos t),\qquad y'_t=a\operatorname{sen} t,$$

$$\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}=\sqrt{a^2\,(1-\cos t)^2+a^2\operatorname{sen}^2 t}=$$

$$=a\sqrt{2\,(1-\cos t)}=2a\operatorname{sen}\frac{t}{2}.$$

De aquí

$$Q_x=2\pi\int_0^{2\pi} a\,(1-\cos t)\cdot 2a\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=-16\pi a^2\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{64}{3}\pi a^2. \blacktriangleright$$

Ejemplo 11. Hállese el área de una superficie formada por la revolución de la cardioide $r=2a(1+\cos\varphi)$ en torno al eje polar.

◀ Tenemos

$$r'=-2a\operatorname{sen}\varphi,$$

$$\sqrt{r^2+(r')^2}=\sqrt{4a^2(1+\cos\varphi)^2+4a^2\operatorname{sen}^2\varphi}=4a\cos\frac{\varphi}{2},$$

y, luego,

$$Q_x=2\pi\int_0^{\pi}2a(1+\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi\cdot 4a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=64\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{128}{5}\pi a^2. \blacktriangleright$$

6.66. Hállese el área de la superficie (llamada *catenoide*) engendrada por al revolución del arco de la catenaria $y=\frac{1}{2}\operatorname{ch}2x$, $0\leqslant x\leqslant 3$, en torno al eje Ox.

6.67. Hállese el área de la superficie del elipsoide formado por la revolución de la elipse $4x^2+y^2=4$ en torno al: a) eje Ox; b) eje Oy.

6.68. Hállese el área de la superficie formada por la revolución alrededor del eje Ox del arco de la curva $y=\frac{1}{3}x^3$ comprendido entre $x=-1$ y $x=1$.

6.69. Hállese el área de la superficie formada por la revolución alrededor del eje Ox del arco de la curva $y=\frac{1}{6}\sqrt{x}(x-12)$ entre los puntos de intersección de la curva citada con el eje Ox.

6.70. Hállese el área de una superficie engendrada por la revolución en torno al eje Oy del arco de la parábola semicúbica $9ay^2=4x^3$ que se obtiene al cortar la curva por la recta $x=a$.

6.71. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del bucle de la curva $9ay^2=x(3a-x)^2$ en torno al: a) eje Ox; b) eje Oy.

6.72. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del arco de la curva $y = e^{-x/2}$, $0 \leqslant x < +\infty$, alrededor del eje Ox.

6.73. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del arco de la curva $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\,\mathrm{sen}\,t - \mathrm{sen}\,3t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, alrededor del: a) eje Ox; b) eje Oy.

6.74. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del bucle de la curva $x = a(t^2 + 1)$, $y = \frac{at}{3}(3 - t^2)$ en torno al eje Ox.

6.75. Hállese el área de la superficie engendrada por la revolución de una onda de la cicloide $x = a(t - \mathrm{sen}\,t)$, $y = a(1 - \cos t)$ alrededor de su eje de simetría.

6.76. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del arco de la evolvente de la circunferencia $x = a(t\,\mathrm{sen}\,t + \cos t)$, $y = a(\mathrm{sen}\,t - t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, alrededor del eje Ox.

6.77. Hállese el área de la superficie formada por la revolución de la circunferencia $r = 2a\,\mathrm{sen}\,\varphi$ en torno al eje polar.

6.78. Hállese el área de la superficie formada por la revolución de la cardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$ en torno a la tangente en su vértice $(2a, 0)$.

6.79. Demuéstrese que el área de la superficie formada por la revolución de la lemniscata $r^2 = a^2\,\mathrm{sen}\,2\varphi$ en torno al eje polar es igual al área de la superficie de una esfera de radio a.

6.80. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del arco de la curva $r = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, en torno al eje polar.

4. Volumen de un cuerpo. Si el área $S(x)$ de la sección de un cuerpo por el plano perpendicular al eje Ox es una función continua en el segmento $[a, b]$, el volumen del cuerpo se calculará según la fórmula

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{6}$$

Ejemplo 12. El plano de un triángulo isósceles se mueve perpendicularmente al diámetro fijo de un círculo de radio a. La base del triángulo es la cuerda de dicho círculo, mientras que el vértice está situado en una recta paralela al diámetro fijo a la distancia h del plano del círculo. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por el movimiento del plano del triángulo desde un extremo del diámetro hasta el otro.

◀ Al elegir el sistema de coordenadas de modo tal que el centro del círculo esté en el origen de coordenadas (fig. 64) y el diámetro fijo, en el eje Ox, obtendremos la ecuación de una circunferencia en la forma $x^2 + y^2 = a^2$.

La sección del cuerpo por un plano perpendicular al eje Ox es un triángulo isósceles de base $2y = 2\sqrt{a^2 - x^2}$ y altura h. Tenemos:

$$S(x) = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2-x^2}\, h = h\sqrt{a^2-x^2} \qquad (-a \leqslant x \leqslant a).$$

$$V = h\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2h\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

$$= 2h\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsen\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^a = 2h\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi a^2 h. \text{ ▶}$$

La expresión para la función $S(x)$ se obtiene de una manera bastante simple en el caso de los cuerpos de revolución. Así, por ejemplo, si un trapecio curvilíneo, limitado por la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, gira alrededor del eje Ox o del eje Oy, los volúmenes de los cuerpos de revolución se calculan respectivamente conforme a las fórmulas:

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx, \tag{7}$$

$$V_y = 2\pi\int_a^b x\,|f(x)|\,dx, \qquad a \geqslant 0. \tag{8}$$

Si un sector curvilíneo, limitado por la curva $r = r(\varphi)$ y los rayos $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, gira alrededor del eje polar, el volumen del cuerpo de revolución es

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3 \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi.$$

El cálculo de los volúmenes de los cuerpos se realiza de un modo mucho más fácil con ayuda de las integrales múltiples. Por esta razón nos limitaremos aquí sólo a problemas simples.

Ejemplo 13. Una figura, limitada por las curvas $y = \sqrt{2px}$ e $y = \frac{2}{\sqrt{p}}(x-p)^{3/2}$, gira alrededor del eje Ox. Hállese el volumen del cuerpo de revolución (fig. 65).

◀ Hallemos los puntos de intersección de las curvas:

$$\sqrt{2px} = \frac{2}{\sqrt{p}}(x-p)^{3/2}, \quad \text{o bien} \quad 2p^2x = 4(x-p)^3;$$

es evidente que la ecuación queda satisfecha por el valor de $x = 2p$, y en este caso $y = 2p$, es decir tenemos un punto de intersección $(2p, 2p)$. El volumen buscado es una diferencia entre los volúmenes:

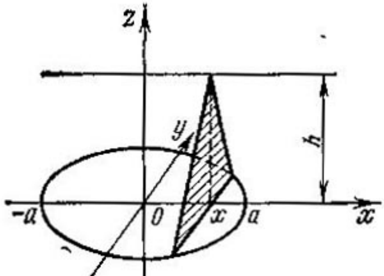


Fig. 64

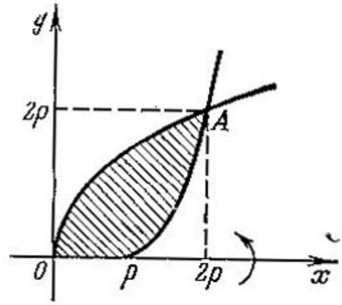


Fig. 65

el volumen V_1 obtenido mediante la revolución del trapecio curvilíneo limitado por la parábola $y = \sqrt{2px}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2p)$ y el volumen V_2, obtenido mediante la revolución del trapecio curvilíneo limitado por la parábola semicúbica $y = \frac{2}{\sqrt{p}}(x-p)^{3/2}$ $(p \leqslant x \leqslant 2p)$.

Haciendo uso de la fórmula (7), obtenemos:

$$V_x = V_1 - V_2 = \pi \int_0^{2p} y_1^2\, dx - \pi \int_p^{2p} y_2^2\, dx =$$

$$= \pi \cdot 2p \int_0^{2p} x\, dx - \pi \cdot \frac{4}{p} \int_p^{2p} (x-p)^3\, dx =$$

$$= 2\pi p \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{2p} - \frac{4\pi}{p} \cdot \frac{(x-p)^4}{4}\Big|_p^{2p} = 4\pi p^3 - \pi p^3 = 3\pi p^3. \ ▶$$

Ejemplo 14. La figura, limitada por la curva $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} 2t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$ y el eje Ox, gira alrededor del eje Oy. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

◀ Es obvio que $0 \leqslant x \leqslant a$ y $0 \leqslant y \leqslant a$, así como que $y = 0$ cuando $t = 0$ y $t = \pi/2$, es decir, la figura en consideración es un trapecio curvilíneo. Luego, $x = a$ para $t = 0$, y $x = 0$ para $t = \pi/2$. Por consiguiente, el volumen que se busca se expresa mediante la fórmula (8). Tenemos:

$$V_y = 2\pi \int_0^a x(t)\, y(t) = 2\pi \int_{\pi/2}^{0} a \cos t \cdot \operatorname{sen} 2t\, (-a \operatorname{sen} t)\, dt =$$

$$=\pi a^3\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 2t\,dt=\frac{\pi a^3}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt=$$

$$=\frac{\pi a^3}{2}\left(t-\frac{1}{4}\operatorname{sen}4t\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2 a^3}{4}. \blacktriangleright$$

Ejemplo 15. La cardioide $r = a(1 - \cos\varphi)$ gira alrededor del eje polar. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

$$\blacktriangleleft\ V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi}a^3(1-\cos\varphi)^3\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^3\frac{(1-\cos\varphi)^4}{4}\Big|_0^{\pi}=\frac{8}{3}\pi a^3. \blacktriangleright$$

6.81. Sobre una cuerda de la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$, paralela al eje Ox, se ha construido un cuadrado cuyo lado es igual a la longitud de la cuerda, mientras que el plano del cuadrado es perpendicular al plano Oxy. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por el movimiento del plano del cuadrado, si la cuerda, que lo determina se desplaza a lo largo de la astroide.

6.82. Hállese el volumen de una cuña obtenida al cortar un cilindro circular recto de radio a por el plano que pasa por el diámetro de la base y que forma el ángulo α respecto al plano de la base.

6.83. Hállese el volumen de un cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Ox de la figura limitada por las líneas $2y = x^2$ y $2x + 2y - 3 = 0$.

6.84. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Ox de la figura limitada por las líneas $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$, $x = 0$.

6.85. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Oy de la figura limitada por las líneas $y = x$, $y = x + \operatorname{sen}^2 x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

6.86. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Oy de la figura limitada por las líneas $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$ e $y = 2$.

6.87. Hállese el volumen de un cuerpo engendrado por la revolución del segmento parabólico de base $2a$ y altura h alrededor de la altura.

6.88. Hállense los volúmenes de los cuerpos engendrados por la revolución de la figura limitada por la curva $x = at^2$,

$y = a \ln t$ ($a > 0$) y los ejes coordenados en torno al: a) eje Ox; b) eje Oy.

6.89. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Ox de la figura limitada por la curva $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} 2t$ y el eje Ox ($0 \leqslant x \leqslant a$).

6.90. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ alrededor de la recta $x = a$.

6.91. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de la curva $r = a \operatorname{sen}^2 \varphi$ en torno al eje polar.

6.92. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ en torno al eje polar.

§ 7. Aplicaciones de la integral definida a la resolución de ciertos problemas de mecánica y física

1. Momentos y centros de masas de las curvas planas. Si el arco de una curva viene dado mediante la ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, y tiene densidad *) $\rho = \rho(x)$, los momentos estáticos de dicho arco M_x y M_y respecto de los ejes coordenados Ox y Oy serán

$$M_x = \int_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

$$M_y = \int_a^b \rho(x)\, x \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx;$$

los momentos de inercia I_x e I_y respecto de los mismos ejes Ox y Oy se calculan según las fórmulas

$$I_x = \int_a^b \rho(x) f^2(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

$$I_y = \int_a^b \rho(x)\, x^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

---

*) En los problemas, donde la densidad no se especifica, se supone siempre que la curva es homogénea y $\rho = 1$.

y las coordenadas del centro de masas $\bar{x}$ e $\bar{y}$, según las fórmulas

$$\bar{x}=\frac{M_y}{l}=\frac{1}{l}\int_a^b \rho(x)\,x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

$$\bar{y}=\frac{M_x}{l}=\frac{1}{l}\int_a^b \rho(x)\,f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

donde l es la masa del arco, es decir,

$$l=\int_a^b \rho(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Ejemplo 1. Hállense los momentos estáticos y los momentos de inercia respecto de los ejes Ox y Oy del arco de la catenaria $y=\operatorname{ch} x$ para $0\leqslant x\leqslant 1$.

◀ Tenemos: $y'=\operatorname{sh} x$, $\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}=\operatorname{ch} x$. Por consiguiente,

$$M_x=\int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 (1+\operatorname{ch} 2x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}(2+\operatorname{sh} 2),$$

$$M_y=\int_0^1 x\operatorname{ch} x\,dx=\int_0^1 x\,d(\operatorname{sh} x)=x\operatorname{sh} x\Big|_0^1-$$

$$-\int_0^1 \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{sh} 1-\operatorname{ch} x\Big|_0^1=\operatorname{sh} 1-\operatorname{ch} 1+1,$$

$$I_x=\int_0^1 \operatorname{ch}^3 x\,dx=\int_0^1 (1+\operatorname{sh}^2 x)\operatorname{ch} x\,dx=$$

$$=\left(\operatorname{sh} x+\frac{\operatorname{sh}^3 x}{3}\right)\Big|_0^1=\operatorname{sh} 1+\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 1,$$

$$I_y=\int_0^1 x^2\operatorname{ch} x\,dx=\int_0^1 x^2\,d(\operatorname{sh} x)=x^2\operatorname{sh} x\Big|_0^1-2\int_0^1 x\operatorname{sh} x\,dx=$$

$$=\operatorname{sh} 1-2\int_0^1 x\,d(\operatorname{ch} x)=\operatorname{sh} 1-2\left(x\operatorname{ch} x\Big|_0^1-\int_0^1 \operatorname{ch} x\,dx\right)=$$

$$=\operatorname{sh} 1-2\operatorname{ch} 1+2\operatorname{sh} 1=3\operatorname{sh} 1-2\operatorname{ch} 1.$$ ▶

EJEMPLO 2. Hállense las coordenadas del centro de masas del arco de la circunferencia $x = a\cos t$, $y = a\,\mathrm{sen}\,t$, situado en el primer cuadrante.

◀ Tenemos: $l = \frac{\pi a}{2}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, $x'_t = -a\,\mathrm{sen}\,t$, $y'_t = a\cos t$,

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,t + a^2\cos^2 t} = a.$$

De aquí obtenemos:

$$M_x = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = a^2\,\mathrm{sen}\,t\,\Big|_0^{\pi/2} = a^2,$$

$$M_y = a^2 \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\,t\,dt = -a^2\cos t\,\Big|_0^{\pi/2} = a^2,$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{l} = \frac{a^2}{\pi a/2} = \frac{2a}{\pi}, \qquad \bar{y} = \frac{a^2}{\pi a/2} = \frac{2a}{\pi}. ▷$$

En las aplicaciones resulta útil con frecuencia el siguiente

TEOREMA DE GULDIN. *El área de la superficie engendrada por la revolución del arco de una curva plana en torno a un eje, situado en el mismo plano que el arco, pero que no lo interseca, es igual al producto de la longitud de dicho arco por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad de ésta.*

EJEMPLO 3. Hállense las coordenadas del centro de gravedad de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

◀ Debido a la simetría, $\bar{x} = 0$. Al girar la semicircunferencia alrededor del eje Ox se engendra una esfera; el área de la superficie de esta esfera es igual a $4\pi a^2$, y la longitud de la semicircunferencia es πa. De acuerdo con el teorema de Guldin, se tiene

$$4\pi a^2 = \pi a \cdot 2\pi\bar{y}.$$

De aquí $\bar{y} = \frac{2a}{\pi}$, es decir, el centro de masas tienen las coordenadas $C\left(0, \frac{2a}{\pi}\right)$. ▶

7.1. Hállese el momento estático de la sinusoide $y = \mathrm{sen}\,x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ respecto del eje Ox.

7.2. Hállense el momento estático y el momento de inercia respecto del eje Ox del arco de la curva $y = e^x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

7.3. Hállense el momento estático y el momento de inercia respecto al eje Ox de una onda de la cicloide $x = a(t - \mathrm{sen}\,t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

7.4. Hállense el momento estático y el momento de inercia de la semicircunferencia de radio a respecto de su diámetro.

7.5. Hállense los momentos estáticos respecto de los ejes Ox y Oy del arco de la circunferencia $r = 2a \cos \varphi$, situado por arriba del eje polar.

7.6. Hállese el centro de gravedad del arco de la catenaria $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$.

7.7. Hállese el centro de gravedad del arco de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, situado por arriba del eje Ox.

7.8. Hállense las coordenadas cartesianas del centro de gravedad del un arco de la cardioide $r = a(1 + \cos \varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

7.9. Haciendo uso del teorema de Guldin, hállese el centro de gravedad del arco de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, situado en el primer cuadrante.

2. Problemas físicos. En los ejemplos 4—7 que se exponen más abajo se dan algunas aplicaciones de la integral definida en la resolución de problemas de física.

EJEMPLO 4. La velocidad del movimiento rectilíneo de un cuerpo se expresa mediante la fórmula $v = 2t + 3t^2$ (m/s). Hállese el camino recorrido por el cuerpo durante 5 segundos desde el comienzo de su movimiento.

◀ Dado que el camino recorrido por el cuerpo a la velocidad $v(t)$ durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ se expresa mediante la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt,$$

tenemos:

$$S = \int_0^5 (2t + 3t^2)\, dt = (t^2 + t^3) \Big|_0^5 = 150 \text{ (m)}. \ ▶$$

EJEMPLO 5. ¿Qué trabajo hay que realizar para elevar un cuerpo de masa m d la superficie de la Tierra, cuyo radio es R, a una altura h? A qué es igual el trabajo, si el cuerpo se aloja al infinito?

El trabajo de una fuerza variable $f(x)$ que actúa a lo largo del eje Ox en el segmento $[a, b]$ se expresa mediante la integral

$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

De acuerdo con la ley de la gravitación universal, la fuerza F que actúa sobre un cuerpo de masa m es igual a

$$F = k \frac{mM}{r^2},$$

donde M es la masa de la Tierra, r es la distancia de la masa m desde centro de la Tierra, k es la constante de la gravitación universal. Por cuanto en la superficie de la Tierra, es decir, cuando $r = R$, se tiene $F = mg$, podemos, por ende, escribir $mg = k\frac{mM}{R^2}$. De aquí hallamos $kM = gR^2$, razón por la cual

$$F = mg\,\frac{R^2}{r^2}\,.$$

Por consiguiente, el trabajo buscado es igual a

$$A = \int\limits_R^{R+h} F\,dr = \int\limits_R^{R+h} mgR^2\,\frac{dr}{r^2} = mgR^2\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^{R+h} = mgR\,\frac{h}{R+h}\,.$$

De aquí tenemos para $h \to \infty$

$$\lim_{h\to\infty} A = mgR. \ ▶$$

Ejemplo 6. Calcúlese la energía cinética de un cono circular homogéneo que gira con una velocidad angular ω en torno a su eje, si se conocen el radio de la base del cono R, su altura H y la densidad γ.

◀ La energía cinética de un cuerpo que gira alrededor de cierto eje con una velocidad angular ω es igual a $\frac{1}{2}I\omega^2$, donde I es el momento de inercia del cuerpo respecto del eje de revolución. Tomemos como masa elemental dm la masa de un cilindro hueco de altura h que tiene un radio interior r y un espesor de la pared dr (fig. 66). Entonces, $dm = 2\pi r h\gamma\,dr$ $(0 \leqslant r \leqslant R)$. Por cuanto los triángulos OCD y OAB son semejantes, tenemos

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}, \quad \text{es decir,} \quad h = H\left(1-\frac{r}{R}\right).$$

Por consiguiente,

$$dm = 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right) r\,dr,$$

y el momento de inercia elemental dI es

$$dI = dm\cdot r^2 = 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right) r^3\,dr.$$

De este modo, el momento de inercia de todo el cono es

$$I = \int\limits_0^R dI = \int\limits_0^R 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right) r^3\,dr = 2\pi\gamma H\left(\frac{R^4}{4}-\frac{R^4}{5}\right) = \frac{1}{10}\,\pi\gamma H R^4,$$

mientras que la energía cinética del cono es igual a

$$K=\frac{1}{20}\pi\gamma HR^4\omega^2. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 7. Hállese la fuerza de presión que ejerce el agua sobre una placa triangular vertical de base a y altura h, sumergida en el agua con el vértice hacia abajo, de forma que su base se encuentra en la superficie del agua.

◀ Hagamos uso de la ley de Pascal, en virtud de la cual la fuerza de presión P que ejerce un líquido, con un peso específico γ, sobre un

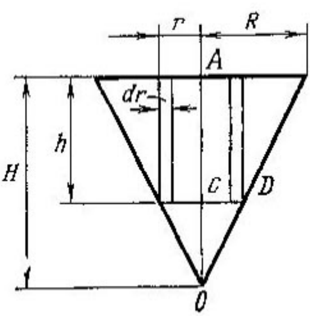


Fig. 66

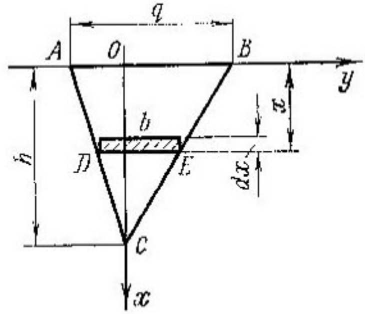


Fig. 67

área S sumergido a una profundidad H es igual a

$$P=\gamma HS.$$

Al introducir el sistema de coordenadas expuesto en la fig. 67, examinemos un área rectangular elemental que se encuentra a la profundidad x y cuyas base y altura son b y dx, respectivamente. De la semejanza de los triángulos CAB y CDE, tenemos

$$\frac{b}{a}=\frac{h-x}{h}, \quad \text{es decir,} \quad b=\frac{a}{h}(h-x),$$

por consiguiente

$$dS=b\,dx=\frac{a}{h}(h-x)\,dx \quad \text{y} \quad dP=x\,dS=\frac{ax}{h}(h-x)\,dx$$

(para el agua $\gamma=1$).

Así pues, la fuerza de presión que ejerce el agua sobre toda la placa es

$$P=\int_0^h x\,dS=\frac{a}{h}\int_0^h x(h-x)\,dx=\frac{a}{h}\left(\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{3}\right)=\frac{ah^2}{6}. \blacktriangleright$$

7.10. La velocidad de un cuerpo lanzado hacia arriba verticalmente con una velocidad inicial v_0, despreciando la resistencia del aire, es igual a $v = v_0 - gt$, donde t es el tiempo transcurrido y g la aceleración de la gravedad. ¿A qué altura máxima se eleva el cuerpo?

7.11. Un punto del eje Ox efectúa oscilaciones armónicas alrededor del origen de coordenadas con una velocidad $v = v_0 \cos(\omega t + \varphi)$, donde t es el tiempo; v_0, ω, φ son unas constantes. Hállese la ley que siguen las oscilaciones del punto y el valor medio de la magnitud absoluta de la velocidad durante el período de oscilaciones.

7.12. Dos cuerpos se mueven por una misma recta: el primer cuerpo con una velocidad $v_1 = 3t^2 - 4t$ (m/s) y el segundo, con una velocidad $v_2 = 4(t + 3)$ (m/s). Suponiendo que en el instante inicial los cuerpos estaban juntos, determínese en qué momento de tiempo y a qué distancia, desde el comienzo del movimiento, estarán juntos de nuevo.

7.13. La velocidad del movimiento de un punto $v = 0{,}1\, te^{-0{,}02t}$ (m/s). Determínese el trayecto recorrido por dicho punto desde el comienzo de su movimiento hasta que se pare por completo ($v(t_2) = 0$).

7.14*. Calcúlese el trabajo necesario para estirar un muelle en 5 cm, si se sabe que la fuerza de 1 N lo estira en 1 cm.

7.15. Calcúlese el trabajo necesario para amontonar la arena formando un cono de radio R y altura H. El peso específico de la arena es γ.

7.16. Calcúlese el trabajo necesario para sacar el agua de un recipiente que tiene forma de paraboloide de revolución con el vértice hacia arriba. El radio de la base es R, la altura es H.

7.17. Calcúlese el trabajo necesario para construir una pirámide de base cuadrada, si H es la altura de la pirámide y a, el lado de la base. El peso específico del material es γ.

7.18. Calcúlese el trabajo necesario para sacar el agua de un recipiente cónico con el vértice hacia arriba. El radio de la base es R, la altura H.

7.19. Calcúlese el trabajo necesario para sacar el agua de una cisterna limitada por las superficies: $y^2 = 2pz$, $x = \pm a$, $z = p$ ($r > 0$).

7.20*. Una carga eléctrica e_0 concentrada en el origen de coordenadas repele la carga e del punto $(a, 0)$ al punto

$(b, 0)$. Determínese el trabajo A de la fuerza de repulsión F. ¿A qué es igual el trabajo, si la carga e se aleja al infinito?

7.21*. Un cilindro con un émbolo móvil, de volumen $V_0 = 0{,}2 m^3$ y presión $p_0 = 10330$ N/m^2, está lleno de vapor. ¿Cuál es el trabajo que hay que realizar para reducir el volumen del vapor en dos veces, si la temperatura es constante (proceso isotérmico)?

7.22*. Determínese el trabajo que se realiza al comprimir adiabáticamente el aire, cuyo volumen inicial es $V_0 = 8 m^3$ y la presión $p_0 = 10000$ N/m^2, hasta que se obtenga el volumen $V_1 = 2 m^3$.

7.23. Hállese la energía cinética de una bola homogénea de radio R y densidad γ, que gira alrededor de su diámetro con una velocidad angular ω.

7.24. Hállese la energía cinética de una placa que tiene forma de un segmento parabólico y que gira alrededor del eje de la parábola con una velocidad angular constante ω. La base del segmento es a, la altura h, el espesor de la placa d, la densidad del material γ.

7.25. Hállese la energía cinética de una placa triangular que gira alrededor de la base con una velocidad angular ω. La base de la placa es a, la altura h, el espesor l y la densidad γ.

7.26. Hállese la energía cinética de un cilindro circular homogéneo de densidad γ, radio de la base R y altura H, que gira alrededor de su eje con una velocidad angular ω.

7.27. Hállese la presión que ejerce el agua sobre una placa triangular vertical de base a y altura h, sumergida en el agua de manera tal que el vértice se encuentra en la superificie y la base es paralela a la superficie del agua.

7.28. El extremo de un tubo sumergido en un líquido, cuyo peso específico es igual a γ, está cerrado con una mariposa redonda. Determínese la presión sobre la mariposa, si su radio es R y el centro se encuentra a la profundidad H.

7.29. Hállese la fuerza con la que un líquido de peso específico γ, presiona contra una pared vertical que tiene forma de semielipse, cuyo eje mayor se encuentra en la superficie del líquido. El eje mayor de la semielipse es a y el menor, b.

7.30. Hállese la presión de un líquido que llena un cilindro circular y cuyo peso específico es γ, sobre las paredes laterales del cilindro, si el radio de la base es R y la altura es H.

7.31. Hállese la masa de una barra de longitud $l = 5$ m, si su densidad lineal varía de acuerdo con la ley $\gamma = 1 + 0{,}1x^3$ (kg/m), donde x es la distancia desde uno de los extremos de la barra.

7.32*. Determínese la cantidad de calor que desprende una corriente alterna $I = I_0 \cos \omega t$ durante el período $2\pi/\omega$ en un conductor eléctrico cuya resistencia es igual a R.

7.33*. Determínese el lapso de tiempo durante el cual el agua que llena un recipiente cilíndrico de altura $H = 20$ cm y con un área de la base $S = 100$ cm^2, fluye por un orificio en el fondo de área $S_0 = 1$ cm^2.

7.34.** Una vez establecido el flujo laminar (de chorro) de un líquido a través de un tubo que tiene sección circular de radio a, la velocidad de la corriente v en un punto que se encuentra a la distancia r del eje del tubo se determina por medio de la fórmula $v = \frac{p}{4\mu l}(a^2 - r^2)$, donde p es la diferencia de presión en los extremos del tubo, μ es el coeficiente de viscosidad, l es la longitud del tubo. Hállese el consumo de líquido Q, es decir, la cantidad de líquido que pasa a través de la sección transversal del tubo en la unidad de tiempo.

7.35*. ¿Con qué fuerza un semianillo de radio R y masa M atrae un punto material m que se encuentra en su centro?

7.36. Determínese el lapso de tiempo durante el cual el agua fluye de un embudo cónico, que tiene una altura $H = 50$ cm, el radio de la base superior $R = 5$ cm y el radio de la base inferior $r = 0{,}2$ cm

7.37. Determínese el consumo de líquido evacuado a través de un vertedero de sección rectangular. La altura del vertedero es h, el ancho a, el coeficiente de viscocidad μ.

§ 8. Integración numérica de las funciones de una variable

La integración numérica consiste en hallar la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función continua $f(x)$ rigiéndose por la *fórmula de integración numérica*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_{nk} f(x_k),$$

donde los coeficientes a_{nk} son números reales y los nudos x_k pertenecen a $[a, b]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. La forma de la suma

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} f(x_k)$$

determina el método de integración numérica, y la diferencia

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - S_n(f),$$

el error del método.

Para el método de rectángulos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{k=1}^{n} f(x_k), \tag{1}$$

$h = \dfrac{b-a}{n}$ (paso de partición), $x_0 = a - \dfrac{h}{2}$, $x_k = x_{k-1} + h$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Para el método de trapecios

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right), \tag{2}$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, \quad x_k = x_{k-1} + h \ (k = 1, \ldots, n).$$

Para el método de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})\right), \tag{3}$$

$$h = \frac{b-a}{2n}, \quad x_0 = a, \quad x_k = x_{k-1} + h \ (k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Los segundos miembros de las fórmulas de los rectángulos (1), los trapecios (2) y de Simpson (3) son sumas integrales y, para $h \to 0$, tienden hacia la integral dada. No obstante, para h fijo cada uno de ellos se diferencia de la integral correspondiente en la magnitud $R_n(f)$. De acuerdo con el error absoluto límite dado $\varepsilon > 0$ se elige el parámetro n, o bien, lo que es lo mismo, el paso h, para el cual se verifica la desigualdad

$$|R_n(f)| < \varepsilon.$$

Las magnitudes $R_n(f)$ se caracterizan (en la suposición de que existen las derivadas que figuran en ellas) por las igualdades

$R_n(f) = \dfrac{b-a}{24} f''(\xi)\,h^2$, $\quad \xi \in [a, b]$ para el método de rectángulos,

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{12} f''(\xi) h^2, \quad \xi \in [a, b] \quad \text{para el método de trapecios,}$$

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{180} f^{(IV)}(\xi) h^4, \quad \xi \in [a, b] \quad \text{para el método de Simpson.}$$

EJEMPLO 1. Hállese $\ln 2$ con una exactitud de hasta 10^{-4}, a partir de la relación $\ln 2 = \int_{0,5}^{1} \frac{dx}{x}$ calculando la integral por el método de Simpson.

◀ Para la función subintegral $f(x) = \frac{1}{x}$ en el segmento $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tenemos $f^{(IV)}(x) = \frac{24}{x^5}$, de donde $|f^{(IV)}(x)| < 24 \cdot 2^5$. Considerando que $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $h = \frac{1}{4n}$, obtenemos

$$|R_n(f)| < \frac{1}{2 \cdot 180} 24 \cdot 2^5 \left(\frac{1}{4n}\right)^4,$$

o bien

$$|R_n(f)| < \frac{1}{120n^4}.$$

Para que se logre la precisión prefijada es necesario el cumplimiento de la desigualdad

$$\frac{1}{120n^4} < 10^{-4}, \quad \text{o bien} \quad n^4 > \frac{10^3}{12},$$

lo que tendrá lugar para $n^4 > 100$. Por eso, se debe elegir $n = 4$. Hallando $h = \frac{1}{16} = 0{,}0625$, calculemos los valores de la función con una exactitud que supere a ciencia cierta *) 10^{-4}. Obtendremos la tabla siguiente: (véase la tabla en la pág. 425).

Calculando la suma

$$\sigma = \sigma_1 + 4\sigma_2 + 2\sigma_3 = 33{,}271415$$

y $\frac{h}{3} = 0{,}0208333$, obtenemos el resultado según la fórmula de Simpson (3):

$$◀ \ln 2 = 0{,}6931.$$

Otro método para estimar el error del método de integración numérica consiste en que se usa la igualdad asintótica

$$\int_a^b f(x)\,dx - s_{n_{\nu+1}}(f) = \frac{S_{n_{\nu+1}}(f) - S_{n_\nu}(f)}{\lambda^m - 1} + o\left(n_{\nu+1}^{-m}\right),$$

---

*) Véase la llamada de la pág. 310.

$x_0 = 0,5$	$f(x_0) = 2$		
$x_1 = 0,5625$		$f(x_1) = 1,7777777$	
$x_2 = 0,6250$			$f(x_2) = 1,6$
$x_3 = 0,6875$		$f(x_3) = 1,4545454$	
$x_4 = 0,7500$			$f(x_4) = 1,3333333$
$x_5 = 0,8125$		$f(x_5) = 1,2307692$	
$x_6 = 0,8750$			$f(x_6) = 1,1428571$
$x_7 = 0,9375$		$f(x_7) = 1,0666666$	
$x_8 = 1$	$f(x_8) = 1$		
	$\sigma_1 = 3$	$\sigma_2 = 5,5297589$	$\sigma_3 = 4,0761904$

donde

$$n_{\nu+1} = \lambda n_\nu \quad (\lambda > 1), \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

y $m = 2$ para los métodos de rectángulos y trapecios, $m = 4$ para el método de Simpson. El proceso de cálculo según las fórmulas para determinar las sumas $S_n(f)$ se realiza para $n = n_1, n_2, n_3, \ldots$ hasta que se cumpla la correlación

$$\frac{|S_{n_{\nu+1}}(f) - S_{n_\nu}(f)|}{\lambda^m - 1} < \varepsilon. \tag{4}$$

El método citado se denomina *regla de Runge*. Como criterio de su aplicación sirve la relación

$$\frac{|S_{n_{\nu+1}}(f) - S_{n_\nu}(f)|}{|S_{n_\nu}(f) - S_{n_{\nu-1}}(f)|} \approx \lambda^{-m}.$$

El número $\lambda > 1$ puede ser cualquiera, no obstante es preferible que sea igual a 2 ó 3.

EJEMPLO 2. Calcúlese empleando el método de trapecios, con una exactitud de hasta 10^{-4} la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

◀ Elijamos $n_1 = 10$, $n_2 = 20$ y calculemos los valores de la función subintegral $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ respectivamente en los nudos $x_k^{(1)} = x_0 + kh_1 = \dfrac{k}{10}(k = 1, 2, \ldots, 10)$ y $x_k^{(1)} = x_0 + kh_2 = \dfrac{k}{20}$ $(k = 1, 2, \ldots, 20)$ (véase la tabla 6.1)

Tabla 6.1

$x_0^{(1)}=0$	$f(x_0^{(1)})=1$	$x_0^{(2)}=0$	
		$x_1^{(2)}=0,05$	$f(x_1^{(2)})=0,9999376$
$x_1^{(1)}=0,1$	$f(x_1^{(1)})=0,9995004$	$x_2^{(2)}=0,1$	
		$x_3^{(2)}=0,15$	$f(x_3^{(2)})=0,9983168$
$x_2^{(1)}=0,2$	$f(x_2^{(1)})=0,9960238$	$x_4^{(2)}=0,2$	
		$x_5^{(2)}=0,25$	$f(x_5^{(2)})=0,9922778$
$x_3^{(1)}=0,3$	$f(x_3^{(1)})=0,9867674$	$x_6^{(2)}=0,3$	
		$x_7^{(2)}=0,35$	$f(x_7^{(2)})=0,9792281$
$x_4^{(1)}=0,4$	$f(x_4^{(1)})=0,9694584$	$x_8^{(2)}=0,4$	
		$x_9^{(2)}=0,45$	$f(x_9^{(2)})=0,9573324$
$x_5^{(1)}=0,5$	$f(x_5^{(1)})=0,9428094$	$x_{10}^{(2)}=0,5$	
		$x_{11}^{(2)}=0,55$	$f(x_{11}^{(2)})=0,9259358$
$x_6^{(1)}=0,6$	$f(x_6^{(1)})=0,9068453$	$x_{12}^{(2)}=0,6$	
		$x_{13}^{(2)}=0,65$	$f(x_{13}^{(2)})=0,8857451$
$x_7^{(1)}=0,7$	$f(x_7^{(1)})=0,8629030$	$x_{14}^{(2)}=0,7$	
		$x_{15}^{(2)}=0,75$	$f(x_{15}^{(2)})=0,8386278$
$x_8^{(1)}=0,8$	$f(x_8^{(1)})=0,8132501$	$x_{16}^{(2)}=0,8$	
		$x_{17}^{(2)}=0,85$	$f(x_{17}^{(2)})=0,7871027$
$x_9^{(1)}=0,9$	$f(x_9^{(1)})=0,7605057$	$x_{18}^{(2)}=0,9$	
		$x_{19}^{(2)}=0,95$	$f(x_{19}^{(2)})=0,7337535$
$x_{10}^{(1)}=1$	$f(x_{10}^{(1)})=1,7071068$	$x_{20}^{(2)}=1$	
	$\sigma_1=9,0916166$		$\sigma_2=9,0982576$

Hallamos primero la suma $S_{n_1} = \sigma_1 \cdot h_1 = 0,9091616$, donde

$$\sigma_1 = \frac{f(x_0^{(1)}) + f(x_{10}^{(1)})}{2} + \sum_{k=1}^{9} f(x_k^{(1)}) \quad \text{y} \quad h_1 = \frac{1}{10}.$$

Aplicando de nuevo la fórmula de trapecios (2), hallamos

$$S_{n_2} = (\sigma_1 + \sigma_2)\, h_2 = 0,9094937,$$

donde $h_2 = \dfrac{1}{20}$ y $\sigma_2 = \sum\limits_{k=1}^{10} f(x_{2k-1}^{(2)})$. De la relación $x_k^{(1)} = x_{2k}^{(2)}$,

$k=0, 1, \ldots, 10$, resulta obvio que para hallar S_{n_2} no hace falta calcular de nuevo cada uno de los 21 valores de la función, sino que se debe añadir a los valores hallados anteriormente, que figuran en la suma σ_1, 10 valores nuevos que forman la suma σ_2. Suponiendo en el primer miembro de la desigualdad (4) $\lambda=2$, $m=2$, y tomando en consideración los valores de S_{n_1} y S_{n_2}, obtenemos

$$\frac{S_{n_2}-S_{n_1}}{3}=0{,}0001106.$$

Por eso, con la exactitud de hasta 10^{-4} tenemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}=0{,}9094. \blacktriangleright$$

Ejemplo 3. Fórmese en FORTRAN el programa para calcular, por el método de rectángulos, la integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

◀ La tarea para la computadora electrónica conviene componerla en forma de tres unidades de programa: programa principal, función subprograma que calcula los valores de la función subintegral y función subprograma que realiza el cálculo de la integral por el método de rectángulos.

Programa principal:

```
  EXTERNAL F
  S = RECT (0., 1., F,20)
  WRITE (3, 1) S
1 FORMAT  (' INTEGRAL = ' F6.4)
  STOP
  END
```

Función subprograma para calcular los valores de la función subintegral:

```
  FUNCION F (X)
  F = 1./SQRT(1. +X** 3)
  RETURN
  END
```

Función subprograma para el cálculo de la integral definida por el método de rectángulos:

```
  FUNCION RECT(A, B, F, N)
  H = (B — A)/N
  RECT = 0.
  X = A — H/2.
  DO 1 I = 1,N
  X = X + H
```

```
1 RECT = RECT + F(X)
  RECT = RECT*H
  RETURN
  END
```

▶

En los problemas del 8.1 al 8.24 calcúlense las integrales definidas con una exactitud de hasta 10^{-4}, empleando uno de los siguientes métodos: a) método de rectángulos, b) método de trapecios, c) método de Simpson.

8.1. $\displaystyle\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. **8.2.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^8+1}$.

8.3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$. **8.4.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$.

8.5. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$. **8.6.** $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$.

8.7. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+x^5}\,dx$. **8.8.** $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

8.9. $\displaystyle\int_0^{0,6} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. **8.10.** $\displaystyle\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

8.11. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$. **8.12.** $\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$.

8.13. $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx$. **8.14.** $\displaystyle\int_0^1 e^{x^3}\,dx$.

8.15. $\displaystyle\int_0^{0,5} e^{\sqrt{x}}\,dx$. **8.16.** $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$.

8.17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$. **8.18.** $\displaystyle\int_0^{3,1416} \ln(5+4\cos x)\,dx$.

8.19. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx$. **8.20.** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x\,dx$.

8.21. $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} \frac{x}{2}\, dx$. 8.22. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx$.

8.23. $\int\limits_{0,4}^{0,6} \frac{e^x}{x}\, dx$. 8.24. $\int\limits_0^{0,8} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$.

En los problemas del 8.25 al 8.28 fórmense en FORTRAN los subprogramas para calcular las integrales definidas, empleando los métodos indicados y eligiendo los parámetros nombrados, designando mediante A, B y F el origen del segmento de integración, el extremo del mismo y el identificador de la función subrograma que calcula los valores de la función subintegral, respectivamente.

8.25. La función subprograma para calcular la integral definida por el método de rectángulos; los parámetros son A, B, F, N, donde N es el número de segmentos en los que se divide el segmento original [A, B].

8.26. La función subprograma para calcular la integral definida por el método de trapecios; los parámetros son A, B, F, N.

8.27. La función subprograma para calcular la integral definida por el método de trapecios; los parámetros son A, B, F, EPS, donde EPS es el error absoluto límite.

8.28. La función subprograma para calcular la integral definida por el método de Simpson; los parámetros son A, B, F, N.

8.29. Fórmense en FORTRAN las funciones subprogramas para calcular los valores de las funciones subintegrales en los problemas del 8.1 al 8.24.

8.30. Fórmese en FORTRAN el programa de resolución de los problemas del 8.1 al 8.24, haciendo uso de los subprogramas obtenidos en la resolución de los problemas: a) 8.26 y 8.29; b)* 8.25 y 8.29; c) 8.28 y 8.29.

8.31. Fórmese en FORTRAN el programa de resolución de los problemas 8.1—8.24, haciendo uso de los subprogramas obtenidos en la resolución de los problemas 8.27 y 8.29.

RESPUESTAS

1.1. $\frac{x^8}{4}+C$, 1.2. $3x\sqrt[3]{x}+C$, 1.3. $3\ln|x|-\frac{5}{x}+C$. 1.4. $\frac{x^3}{3}+$ $+\frac{5}{2}x^2-\ln|x|+C$. 1.5. $x+6\sqrt{x}+3\ln x-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$. 1.6. $\operatorname{sen} x+$

$+C$. 1.7. $\frac{2}{b}\sqrt{a+bx}+C$. 1.8. $-\frac{1}{3}e^{2-3x}+C$. 1.9. $-\frac{3}{\ln 5}5^{-x/3}+$ $+C$. 1.10. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}4x+C$. 1.11. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|+C$. 1.12. $\frac{1}{8}\operatorname{sen}8x+C$. 1.13. $x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$. 1.14. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x+C$. 1.15. $\frac{2}{3}x\sqrt{mx}+C$. 1.16. $\frac{nx^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}+C$. 1.17. $2\sqrt{ax}+2x+\frac{2}{3}\times$ $\times\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+C$. 1.18. $\frac{x^3}{3}+2\ln|x|+C$. 1.19. $\frac{2^xe^x}{\ln 2+1}+C$. 1.20. x^2+ $+3\operatorname{sen}x+C$. 1.21 $-2\operatorname{ctg}x-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. 1.22. a) $-x+\operatorname{tg}x+C$, b) $x-\operatorname{th}x+C$. ● Hágase uso de las identidades: a) $\operatorname{tg}^2x=\sec^2x-$ -1; b) $1-\operatorname{th}^2x=\operatorname{sch}^2x$. 1.23. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. 1.24. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\times$ $\times\left|\frac{\sqrt{5}+x}{\sqrt{5}-x}\right|+C$. 1.25. $\operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$. 1.26. $\ln|x+\sqrt{x^2+3}|-$ $-\ln|x+\sqrt{x^2-3}|+C$. 1.27. $\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C$. 1.28. $\frac{x^2}{3}+$ $+(a+b)\frac{x^2}{2}+abx+C$. 1.29 $ax+\frac{9}{4}a^{2/3}x^{4/3}+\frac{9}{5}a^{1/3}x^{5/3}+\frac{x^3}{3}+C$. 1.30. $x+3\ln|\operatorname{tg}x+\sec x|-2\operatorname{tg}x+C$. 1.31. a) $-\operatorname{ctg}x-x+C$; b) $x-\operatorname{cth}x+C$. 1.32. $\ln|x+\sqrt{x^2-7}|+C$. 1.33. $x-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\times$ $\times\left|\frac{x-2\sqrt{2}}{x+2\sqrt{2}}\right|+C$. 1.34. $\frac{2}{3}\sqrt{(3+x)^3}+C$. 1.35. $-\frac{3}{16}(3-$ $-4\operatorname{sen}x)^{4/3}+C$. 1.36. $\frac{\operatorname{ch}^2x}{2}+C$. 1.37. $-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3x}+C$. 1.38. $-\frac{1}{\ln x}+C$. 1.39. $\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C$. 1.40. $-\frac{1}{b}\ln|a-b\operatorname{tg}x|+C$. 1.41. $-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|2-3\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}\right|+C$. 1.42. $\ln|\operatorname{sen}x|+C$. 1.43. $\frac{3^{4x}}{4\ln 3}+C$. 1.44. $\frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax+b)+C$. 1.45. $-\cos(\ln x)+C$. 1.46. $-2\cos\sqrt{x}+C$. 1.47. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$. 1.48. $-\frac{1}{3}\operatorname{cth}3x$ $+C$. 1.49. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+C$. 1.50. $-\frac{1}{2\ln 5}\cdot 5^{-x^2}+C$. 1.51. $\frac{1}{4}\times$ $\times\ln\left|\frac{1+2x}{1-2x}\right|+C$. 1.52. $-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}(e^{-ax})+C$. 1.53. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}$ $\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+C$. 1.54. $\frac{1}{3}\ln|3x+\sqrt{9x^2-1}|+C$. 1.55. $-\ln(\cos x+$

$+\sqrt{\cos^2 x+4})+C$. 1.56. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^4)+C$. 1.57. $\frac{1}{2}\ln(x^2+$ $+\sqrt{x^4+1})+C$. 1.58. $\frac{1}{b^2}\ln|a^2+b^2x|+C$. 1.59. $\frac{1}{2a\cos^2 ax}+C$. 1.60. $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{3}+C$. 1.61. $\frac{1}{7-e^x}+C$. 1.62. $\ln|\cos x|+C$. 1.63. $\frac{1}{4}\times$ $\times\ln|\operatorname{sh}4x|+C$. 1.64. $-\frac{a^{1/x}}{\ln a}+C$. 1.65. $\frac{1}{2}\operatorname{th}(x^2+1)+C$. 1.66. $\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{a-b}\,x-\sqrt{a+b}\,x}{\sqrt{a-b}\,x+\sqrt{a+b}\,x}\right|+C$. 1.67. $\frac{1}{2\sqrt{7}}$ $\operatorname{arctg}\frac{2x}{2\sqrt{7}}+C$. 1.68. $\frac{1}{8}\ln(4x^2+7)+C$. 1.69. $\frac{1}{3}\ln|x^3+\sqrt{x^6+1}|+C$. 1.70. $\frac{1}{\ln a}\ln(a^x+\sqrt{a^{2x}-1})+C$. 1.71. $\ln|x+2|+\frac{3}{x+2}+C$. ● $\frac{x-1}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)-2}{(x+2)^2}=\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}$. 1.72. $x-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+$ $+C$. 1.73. $x-\ln|x^2-4|+\frac{7}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$. 1.74. $\frac{1}{4ab}\ln\left|\frac{ax^2-b}{ax^2+b}\right|+$ $+C$. 1.75. $\frac{1}{48}\ln\left|\frac{3+2x^4}{3-2x^4}\right|+C$. 1.76. $\frac{1}{5}\ln|x^5+5x-8|+C$. 1.77. $\frac{1}{25}\sqrt[4]{(5x^4-3)^5}+C$. 1.78. $3\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+$ $+C$. 1.79. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(2x)+C$. 1.80. $\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+$ $+\frac{1}{b}\ln(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2})+C$. 1.81. $-\frac{5}{\sqrt[5]{a^x}\ln a}+C$. 1.82. $\frac{3}{4}\times$ $\times\sqrt[3]{(4+e^x)^4}+C$. 1.83. $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+4})+C$. 1.84. $x-\frac{1}{\ln 2}\ln(2^x+$ $+1)+C$. ● $\frac{1}{2^x+1}=\frac{(1+2^x)-2^x}{2^x+1}=1-\frac{2^x}{2^x+1}$. 1.85. $e^{\operatorname{arcsen}x}-$ $-\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen}x+C$. 1.86. $e^{\sqrt{x^2-1}}+C$. 1.87. $-\frac{2}{3}\sqrt{(3-\operatorname{ch}x)^3}+$ $+C$. 1.88. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4\ln x}+C$. 1.89. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(2\ln x)+C$. 1.90. $\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+C$. ● $\operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$. 1.91. $\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+C$. ● $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$. 1.92. $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2\sqrt{2}}\right|+C$. 1.93. $x+\frac{1}{a}\times$ $\times\operatorname{sen}^2 ax+C$. 1.94. $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x^3}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. 1.95. $\frac{7}{2}x+\frac{1}{2}\ln\times$ $\times\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\frac{3}{2}\operatorname{sen}2x+\frac{\operatorname{sen}4x}{8}+C$. 1.96. $-2\sqrt{3-\cos^2 x}+$ $+C$. 1.97. $-\ln(\cos^2 x+\sqrt{\cos^4 x+3})+C$. 1.98. $\ln|\operatorname{tg}x|+C$. ● $\frac{1}{\operatorname{sen}x\cos x}=\frac{2}{\operatorname{sen}2x}$. 1.99. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\cos\sqrt{3x}|+C$. 1.100. $\frac{1}{a}\ln\times$

$\times \operatorname{ch} ax + C$. **1.101.** $\frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b) - x + C$. **1.102.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(x^3-3) - \frac{x^3}{3} + C$. **1.103.** $e^{\sec x} + C$. **1.104.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right| + C$.
1.105. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}\right| + C$. **1.106.** $2\ln(\sqrt{x}+1) + C$. **1.107.** $e^x - \ln(e^x+1) + C$. **1.108.** $\frac{1}{25}\left(\frac{(5x-1)^{21}}{21} + \frac{(5x-1)^{20}}{20}\right) + C$. **1.109.** $-2\sqrt{1-e^x} + \frac{2}{3}\sqrt{(1-e^x)^3} - \frac{2}{5}\sqrt{(1-e^x)^5} + C$. **1.110.** $2 \times \left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} - \frac{x+1}{2} + 2\sqrt{x+1} - 2\ln(\sqrt{x+1}+1)\right) + C$.
1.111. $\frac{1}{2(3-x)^6} - \frac{1}{5(3-x)^5} + C$. **1.112.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\frac{\sqrt{3+e^x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3+e^x}+\sqrt{3}} + C$. **1.113.** $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2-1}}\right| + C$. **1.114.** $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.
1.115. $x\operatorname{sen} x + \cos x + C$. **1.116.** $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$. **1.117.** $\frac{x}{3}\sqrt[3]{x^2} \times \ln x - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2} + C$. **1.118.** $\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} - x + C$.
1.119. $(2-x^2)\cos x + 2x\operatorname{sen} x + C$. **1.120.** $-(x^2+2x+2)e^{-x} + C$.
1.121. $(x^3-3x^2+6x-6)e^x + C$. **1.122.** $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1) + C$. ● Póngase $u = x^2$, $dv = xe^{-x^2}\,dx$. **1.123.** $-\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + C$.
1.124. $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$. **1.125.** $\frac{x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + C$.
1.126. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\operatorname{sen} bx + a\cos bx) + C$. **1.127.** $\frac{(x-\sqrt{1-x^2})\,e^{\arccos x}}{2} + C$. **1.128.** $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$. **1.129.** $\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$. **1.130.** $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3 - 1) + C$. **1.131.** $(x^2-2x+1)\operatorname{sen} x + 2(x-1)\cos x + C$. **1.132.** $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$. **1.133.** $\frac{x}{2}(\operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$. **1.134.** $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C$. ● Hágase la sustitución $x = t^2$ e intégrese por partes. **1.135.** $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$. **1.136.** $-\frac{\operatorname{arcsen} x}{x} + \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C$.
1.137. $-x\operatorname{ctg} x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C$. **1.138.** $e^{-x^2}\frac{\operatorname{sen} x - \cos 2x - 5}{10} + C$. **1.139.** $-\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$. ● Póngase $u = x$, $dv =$

$= \dfrac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$. **1.140.** ◀ $I_n = \int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \dfrac{1}{a^2} \int \dfrac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n} dx =$ $= \dfrac{1}{a^2} \int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \dfrac{1}{a^2} \int x \dfrac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \dfrac{1}{a^2} I_{n-1} - \dfrac{1}{a^2} \Big(-$ $- \dfrac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \dfrac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \Big) = \dfrac{1}{2(n-1)a^2} \Big(\dfrac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} +$ $+ (2n-3) I_{n-1} \Big)$. De aquí $I_2 = \dfrac{1}{2a^2} \left(\dfrac{x}{x^2+a^2} + \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} \right) + C$. $I_3 = \dfrac{1}{4a^2} \left(\dfrac{x}{(x^2+a^2)^2} + \dfrac{3x}{2a^2(x^2+a^2)} + \dfrac{3}{2a^3} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} \right) + C$. ▶ **1.141.** ◀ Suponemos $u = \sqrt{x^2+a}$, $dv = dx$. Entonces $du = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a}}$, $v = x$. Tenemos $\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \dfrac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a}} = x\sqrt{x^2+a} - \int \times$ $\times \dfrac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a \int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$. De aquí $\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \dfrac{a}{2} \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C$. ▶ **1.142.** ◀ Suponemos $u = x$, $dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Entonces $du = dx$, $v = -\sqrt{a^2-x^2}$. Tenemos $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = -x\sqrt{a^2-x^2} +$ $+ \int \dfrac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$. De aquí $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{a} + C$. ▶

1.143. $\left(\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{1}{4} \right) \operatorname{arcsen} x + \dfrac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C$. **1.144.** $(\ln(\ln x) - 1) \times$ $\times \ln x + C$. **1.145.** $\dfrac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{1}{6} \ln(x^2+1) + C$. **1.146.** $-2 \times$ $\times \sqrt{1-x} \operatorname{arcsen} \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$. **1.147.** $\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{a} + C$. ● Véase la resolución del problema 1.141.

2.1. $\dfrac{1}{6} \ln \left| \dfrac{x-1}{x+5} \right| + C$. **2.2.** $\dfrac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \dfrac{2(x-1)}{\sqrt{6}} + C$. **2.3.** $\operatorname{arcsen} \dfrac{x-4}{4} + C$. **2.4.** $\ln \left| x + \dfrac{p}{2} + \sqrt{x^2+px+q} \right| + C$. **2.5.** $\dfrac{1}{6} \ln \left| \dfrac{x-6}{x} \right| + C$. **2.6.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arcsen} \dfrac{(x+1)\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + C$. **2.7.** $\dfrac{1}{2} \ln|x^2-5x+4| + \dfrac{5}{6} \ln \times$ $\times \left| \dfrac{x-4}{x-1} \right| + C$. **2.8.** $\dfrac{1}{2} \ln(x^2-3x+3) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \dfrac{2x-3}{\sqrt{3}} + C$. **2.9.** $-$ $-\sqrt{2-x-x^2} + \dfrac{7}{2} \operatorname{arcsen} \dfrac{2x+1}{3} + C$. **2.10.** $\sqrt{x^2-6x+1} + C$. **2.11.** $\dfrac{1}{4} \operatorname{arctg} \dfrac{x^2+3}{2} + C$. **2.12.** $\dfrac{1}{2\ln 3} \ln \left| \dfrac{3^x-3}{3^x-1} \right| + C$. **2.13.** $2 \ln \times$

$(x^2-2x+6)+\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{5}}+C$. **2.14.** $\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\right.$ $\left.+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$. **2.15.** $\ln\left|\frac{x}{1+4x+\sqrt{x^2+8x+1}}\right|+C$. **2.16.** $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}+C$. **2.17.** $-\frac{\sqrt{2x^2-x+1}}{x}-\frac{1}{2}\ln\times$ $\times\frac{2-x+\sqrt{2x^2-x+1}}{|x|}+C$. **2.18.** $-\frac{\sqrt{x^2+5}}{9(x+2)}-\frac{2}{27}\ln\times$ $\times\frac{5-2x+3\sqrt{x^2+5}}{|x+2|}+C$. **2.19.** $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|+C$. **2.20.** $-\frac{1}{6}\ln|x|-$ $-\frac{7}{2}\ln|x-2|+\frac{17}{3}\ln|x-3|+C$. **2.21.** $x-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{4}\ln|x+2|+$ $+\frac{5}{4}\ln|x-2|+C$. **2.22.** $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+C$. **2.23.** $-$ $-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{20}{9}\ln|x-1|+\frac{7}{9}\ln|x+2|+C$. **2.24.** $-$ $-\frac{1}{2(x^2-5x+4)^2}+C$. **2.25.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+2}+C$. **2.26.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\times$ $\times\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$. **2.27.** $-\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{(x^2+1)^2}+\right.$ $\left.+\frac{3x}{2(x^2+1)^2}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x\right)+C$. ● $\int\frac{x-1}{(x^2+1)^3}\,dx=\int\frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx-$ $-\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=-\frac{1}{4(x^2+1)^2}-\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$. Luego, calcúlese $\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$ según la fórmula recurrente obtenida en el problema 1.140. **2.28.** $\frac{1}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{18}\ln(x^2+x+1)+\frac{x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}$ $\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. ● $\frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$. Aplicando el método de coeficientes indeterminados, obtenemos $\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\frac{1}{9(x-1)}-\frac{1}{3}\,\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}-\frac{1}{9}\,\frac{x+2}{x^2+x+1}$. Para calcular $\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}$ se recomienda la sustitución $x+\frac{1}{2}=t$, y emplear, después, la fórmula recurrente deducida en el problema 1.140. **2.29.** $\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$. **2.30.** $\frac{1}{2}\times$ $\times\ln|x+1|-2\ln|x-2|+\frac{5}{2}\ln|x-3|+C$. **2.31.** $\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2+2x+4}+$ $+\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$. **2.32.** $\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$. **2.33.** $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\operatorname{arctg}x+C$. **2.34.** $\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{\operatorname{arctg}x}{2}+C$.

2.35. $-\frac{1}{a^2x}-\frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$. ● $\frac{1}{x^2(x^2+a^2)}=\frac{1}{a^2}\frac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2(x^2+a^2)}$.
2.36. $\frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|-\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$.
● $\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}=\frac{1}{2a^2}\frac{(x^2+a^2)-(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}$. 2.37. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\times$
$\times\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. 2.38. $\ln|x|-\frac{1}{6}\ln(x^6+1)+$
$+\frac{1}{6(x^6+1)}+C$. ● $\frac{1}{x(x^6+1)^2}=\frac{(1+x^6)-x^6}{x(x^6+1)^2}$. 2.39. $\frac{1}{4x^4}+$
$\frac{1}{2x^2}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. 2.40. $\frac{1}{12}\ln(x^4+1)(x^4-2)^2+C$.
● Póngase $x^4=t$. 2.41. $-\frac{1}{6(x+1)^6}+\frac{3}{7(x+1)^7}-\frac{1}{4(x+1)^8}+C$.
2.42. $\frac{1}{6}\ln|x^3-1|-\frac{1}{12}\ln(x^6+x^3+2)+\frac{1}{6\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x^3+1}{\sqrt{7}}+C$.
2.43. $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$. 2.44. $\frac{1}{7\cos^7 x}-\frac{1}{5\cos^5 x}+C$. 2.45.
$\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}^3 x+\frac{3}{5}\operatorname{sen}^5 x-\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x+C$. 2.46. $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sen} x}{2}+$
$+\frac{\operatorname{sen} 2x}{16}+C$. 2.47. $\frac{x}{8}-\frac{\operatorname{sen} 4x}{32}+C$. 2.48. $\frac{x}{16}-\frac{\operatorname{sen} 4x}{64}-$
$-\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48}+C$. 2.49. $-\operatorname{ctg} x-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+C$. 2.50.
$\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. 2.51. $-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+3\ln|\operatorname{tg} x|+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x+$
$+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$. 2.52. $-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}-\frac{2}{\operatorname{tg} x}+\operatorname{tg} x+C$. 2.53. $\frac{\sqrt{2}}{2}\times$
$\times\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)+C$. 2.54. $\frac{\operatorname{sen} x}{4\cos^4 x}+\frac{3}{8}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}+$
$+\frac{3}{8}\ln|\operatorname{tg} x+\sec x|+C$. 2.55. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C$. 2.56. $x+$
$+2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}-2\ln\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|+C$. 2.57. $-2\sqrt{\operatorname{ctg} x}+$
$+C$. 2.58. $\operatorname{sen} x-\frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x+\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}+C$. 2.59. $-2\sqrt{\cos x}+$
$+\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}+C$. 2.60. $\frac{5}{16}x-\frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x+\frac{1}{96}\operatorname{sen}^3 4x+\frac{3}{128}\times$
$\times\operatorname{sen} 8x+C$. 2.61. $\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. 2.62. $3\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{3}\right|-\frac{3}{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}}+$
$+C$. 2.63. $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x}+C$. 2.64. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x+\frac{1}{12}\operatorname{sen} 3x+$
$+\frac{1}{20}\operatorname{sen} 5x+C$. 2.65. $-\frac{\cos 8x}{16}+\frac{\cos 2x}{4}+C$. 2.66. $-\frac{\operatorname{sen} 25x}{50}+$

$+\frac{\operatorname{sen} 5x}{10}+C$. **2.67.** $\frac{3}{5}\operatorname{sen}\frac{5x}{6}+3\operatorname{sen}\frac{x}{6}+C$. **2.68.** $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-$ $-\frac{1}{2}\cos x+C$. **2.69.** $\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2}+\frac{\operatorname{sen} 5x}{20}+\frac{\operatorname{sen} 7x}{28}+C$. **2.70.** $\frac{1}{24}\times$ $\times\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$. **2.71.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$.
2.72. $\operatorname{arct}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+C$. **2.73.** $\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x+x+C$. ● Multiplíquense por $(1-\operatorname{sen} x)$ el numerador y el denominador de la función subintegral. **2.74.** $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x-\sqrt{7}}{2\operatorname{tg} x+\sqrt{7}}\right|+C$. **2.75.** $-\frac{1}{2}\times$ $\times\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x-1}{2}\right)+C$. **2.76.** $-\frac{1}{4}\ln(1+4\cos^2 x)+C$.
2.77. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}\right)+C$. **2.78.** $\frac{2}{5\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}-\frac{2}{5\sqrt{15}}\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+C$. ● $\frac{1}{(\operatorname{sen} x+4)(\operatorname{sen} x-1)}=\frac{(\operatorname{sen} x+4)-(\operatorname{sen} x-1)}{5(\operatorname{sen} x+4)(\operatorname{sen} x-1)}$.
2.79. $\ln|\operatorname{sen} x-\cos x|+C$. **2.80.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x+2}{\operatorname{tg} x+6}\right|+C$. **2.81.** $\frac{\operatorname{sh} 6x}{12}+$ $+\frac{x}{2}+C$. **2.82.** $\frac{\operatorname{ch}^3 2x}{6}-\frac{\operatorname{ch} 2x}{2}+C$. **2.83.** $\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}-\frac{x}{8}+C$. **2.84.** $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sh} 2x}{4}+\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}+C$. **2.85.** $-2\operatorname{cth} 2x+C$. **2.86.** $\frac{1}{4}\times$ $\times\ln\left|\frac{\operatorname{th} x-2}{\operatorname{th} x+2}\right|+C$. ● Divídanse por $\operatorname{ch}^2 x$ el numerador y el denominador de la fracción subintegral. **2.87.** $-\frac{1}{\operatorname{sh} x}-\operatorname{cth} x+C$. ● Multiplíquense el numerador y el denominador de la fracción subintegral por $\operatorname{ch} x+1$. **2.88.** $2\sqrt{2}\operatorname{sh}\frac{x}{2}+C$. **2.89.** $\ln|\operatorname{sh} x|-$ $-\frac{\operatorname{cth}^2 x}{2}+C$. **2.90.** $x-\operatorname{th} x-\frac{\operatorname{th}^3 x}{3}+C$. **2.91.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x}}{2}+C$.
2.92. $\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-3)^5}+\frac{9}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^2}+C$. **2.93.** $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+$ $+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$. **2.94.** $6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+a}-6\ln\sqrt[6]{x+a}+3\ln|1+$ $+\sqrt[3]{x+a}|+C$. **2.95.** $\frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}-\frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}+C$.
2.96. $\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C$. **2.97.** $6\sqrt[6]{x}-12\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{2}+C$.

2.98. $\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right|-2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$. 2.99. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\times$ $\times\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}{x+\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}\right|+C$. 2.100. $\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^3+1}}+C$.

2.101. $\sqrt{x^2-1}-\arccos\frac{1}{x}+C$. 2.102. $\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3}-a^2\sqrt{a^2-x^2}+C$.

2.103. $\frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+\mathrm{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$. 2.104. $6\,\mathrm{arcsen}\frac{x+1}{2}-$ $-\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{4}(x^3+3x^2-7x-9)+C$. 2.105. $\frac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}+C$.

2.106. $\ln|x+\sqrt{x^2-1}|-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$. 2.107. $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+10}+$ $+\frac{9}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+10})+C$. 2.108. $\frac{x-2}{2}\sqrt{4x-x^2}+$ $+2\,\mathrm{arcsen}\frac{x-2}{2}+C$. 2.109. $-\frac{\sqrt{x^2+5}}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2+5})+C$.

2.110. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$. 2.111. $\frac{x}{9\sqrt{x^2+9}}+C$.

2.112. $\frac{1}{8}(2x^3-5x)\sqrt{x^2-1}+\frac{3}{8}\ln(x^2+\sqrt{x^2-1})+C$. 3.1. $\frac{1}{2}\times$ $\times\ln(x^2+2x+4)+\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$. 3.2. $\frac{x^2}{2}+x+\ln|x^2-$ $-x-1|+\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$. 3.3. $-\frac{1}{5(x-2)}+\frac{1}{25}\ln\times$ $\times\left|\frac{x+3}{x-2}\right|+C$. 3.4. $-\frac{2}{9}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+$ $+\frac{1}{3}\frac{x}{1-x^3}+C$. 3.5. $\frac{1}{4}\left(2\ln\frac{x^4+1}{x^4}-\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^4+1}\right)+C$.

3.6. $\sqrt{x^2+x+2}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2}\right)+C$.

3.7. $-\sqrt{6+4\ln x-\ln^2 x}+2\,\mathrm{arcsen}\frac{\ln x-2}{\sqrt{10}}+C$. 3.8. $-\frac{1}{2}\ln\times$ $\times\left|\frac{2x+2+\sqrt{x^2+8x+4}}{x}\right|+C$. 3.9. $\frac{\sqrt{(x^2-4)^3}}{3}+C$.

3.10. $\frac{\sqrt{(x^2+4x-5)^3}}{3}-(x+2)\sqrt{x^2+4x-5}+9\ln(x+2+$ $+\sqrt{x^2+4x-5})+C$. 3.11. $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{1}{2}\ln(x+2+$ $+\sqrt{x^2+4x-5})+C$. 3.12. $\frac{1}{15}\,\mathrm{arctg}\frac{5x}{3\sqrt{16-x^2}}+C$. 3.13. $\frac{1}{2}\times$ $\times\ln(x^2+\sqrt{x^4+16})+C$. 3.14. $\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}+C$. 3.15. $2\sqrt{x}+$

$+4\sqrt[4]{x}-\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{3}}+C.$ 3.16. $-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$
3.17. $-x+\operatorname{tg}x-\sec x+C.$ 3.18. $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C.$
3.19. $\frac{1}{3(1-\operatorname{sen}x)^3}+C.$ 3.20. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+C.$ 3.21. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\times$
$\times\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}x}\right|+C.$ 3.22. $2\operatorname{tg}x-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^4x}+C.$ 3.23. $\operatorname{arcsen}\times$
$\times\left(\frac{\sec x}{\sqrt{5}}\right)+C.$ 3.24. $-\frac{\operatorname{sen}^2x}{2}-5\operatorname{sen}x-24\ln(\operatorname{sen}x+5)+C.$
3.25. $\ln|\operatorname{tg}x|+\operatorname{tg}^2x+\frac{\operatorname{tg}^4x}{4}+C.$ 3.26. $\operatorname{tg}x-\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3x+\frac{\operatorname{tg}^5x}{5}+C.$
3.27. $-\frac{\cos x}{4\operatorname{sen}^4x}-\frac{3\cos x}{8\operatorname{sen}^2x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$ 3.28. $-\frac{x\cos 3x}{6}+$
$+\frac{\operatorname{sen}3x}{18}+\frac{x\cos x}{2}-\frac{\operatorname{sen}x}{2}+C.$ 3.29. $\ln|\operatorname{th}x|+C.$ 3.30. $\operatorname{arctg}\times$
$\times(\operatorname{th}x)+C.$ 3.31. $\ln(\operatorname{ch}x)-\frac{\operatorname{th}^2x}{2}-\frac{\operatorname{th}^4x}{4}+C.$ 3.32. $2\operatorname{sh}\sqrt{1+x}+C.$
3.33. $x\operatorname{th}x-\ln(\operatorname{ch}x)+C.$ 3.34. $\frac{x}{2}-\frac{x\cos(2\ln x)+2x\operatorname{sen}2(\ln x)}{10}+C.$
3.35. $\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)+C.$ 3.36. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$ 3.37. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C.$
3.38. $\frac{1}{\ln a-\ln b}\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x+C.$ 3.39. $\frac{1}{2}e^{\operatorname{arcsen}x}(x+$
$+\sqrt{1-x^2})+C.$ 3.40. $2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C.$
3.41. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\operatorname{arcsen}x+\frac{1}{2}(\operatorname{arcsen}x)^2+\ln|x|+C.$ 3.42. $x-e^{-x}\times$
$\times\operatorname{arcsen}(e^x)-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+C,\ x\leqslant 0.$ 3.43. $-\frac{x^2}{6}-$
$-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+\frac{2}{3}\ln(1+x^2)+C.$ 3.44. $\frac{x}{4}+$
$+\frac{x^2}{12}+\frac{1}{4}(1+x^2)\operatorname{arctg}x+C.$ 3.45. $-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}-\frac{1}{2}\times$
$\times\frac{\ln(1+x^2)}{1+x+x^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+C.$ 3.46. $-x^2+\frac{x^2}{2}\ln(4+x^4)+$
$+2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}+C.$ 3.47. $-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2-1}+\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3}\ln\sqrt{x^2-1}-$
$-\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}+C,\ |x|>1.$ 3.48. $\left(\frac{3-x}{1-x}-\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)\times$
$\times\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}x-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+C,\quad 0<x<1.$
3.49. $x^x+C,\ x>0.$ 3.50. $x-\ln(1+e^x)-2e^{-x/2}\operatorname{arctg}e^{x/2}-$
$-(\operatorname{arctg}e^{x/2})^2+C.$

4.1. $\frac{35}{2}$. ● Divídase el segmento [0, 5] en n partes iguales. 4.2. 1. ● Divídase el segmento $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en n partes iguales. Aplíquese la fórmula: $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha=$ $=\frac{\operatorname{sen}\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$. 4.3. $e^{10}-1$. ● Divídase el segmento [0, 10] en n partes iguales. 4.4. 2/3. ● Divídase el segmento [1, 3] en n partes de modo tal que las abscisas de los puntos de división formen una progresión geométrica. 4.5. 15/4. 4.6. 9/2. 4.7. 5. 4.8. 19/15. 4.9. $3\frac{57}{64}$. 4.10. 45/4. 4.11. 1. 4.12. 1. 4.13. e^2-e. 4.14. $7/\ln 2$. 4.15. $\ln 2{,}5$. 4.16. $(\ln 3)/2$. 4.17. $\pi/12$. 4.18. $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$. 4.19. $\frac{\pi}{6}+\frac{8\sqrt{3}}{27}$. 4.20. $\frac{1}{3}(2-3\operatorname{ch}2+\operatorname{ch}^3 2)$. 4.21. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$. 4.22. $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. 4.23. $\frac{11}{2}+7\ln 2$. 4.24. $2\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$. 4.25. $\frac{1}{2}(e-\sqrt[4]{e})$. 4.26. sen 1. 4.27. $\frac{\pi}{4}$. 4.28. $\frac{2}{3}$. 4.29. $\frac{1}{12}\operatorname{sh}2+\frac{1}{6}$. 4.30. $\frac{1}{6}\ln\frac{2}{5}$. 4.31. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 4.32. $2-\ln 5$. 4.33. $\frac{\pi}{4}$. 4.34. $\frac{\pi}{4}$. ◀ La suma $S_n=\frac{n}{n^2+1^2}+$ $+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\ldots\right.$ $\left.\ldots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$ puede considerarse como suma integral para la función $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ en el segmento [0, 1]. Por ello, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$ $=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$. ▶ 4.35. 1. 4.36. $\frac{2}{3}(2^{3/2}-1)$. 4.37. $\frac{19}{6}$. 4.38. $\frac{45}{2}$. 4.39. 7. 4.40. $\frac{16}{3}$. 4.41. $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 4.42. $\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}$. 4.43. $2\ln\frac{3}{2}$. 4.44. $4-3\ln 3$. 4.45. a) Menos. ● Divídase el segmento de integración en los segmentos [−2, −1] y [−1, 1] y hágase uso de las propiedades 1) y 9). b) Más; c) menos. 4.46. a) Segunda; b) primera; c) segunda. 4.47. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{2}{\pi}$; d) $\frac{4}{3\pi}$. 4.48. $\frac{2}{\pi}I_0\cos\varphi$. 4.49. $2\sqrt{7}<I<6$. 4.50. $\frac{2\pi}{\sqrt{7}}<$

$< I < \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. 4.51. a) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) < I < \frac{2\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1)$; b) $|I| < \frac{\sqrt{30}}{4}$. 4.52. a) $\frac{4}{3} < I < \frac{2}{3}\sqrt{5}$; b) $I < \sqrt{2{,}125}$.

4.53. a) $\frac{dI}{d\beta} = \frac{e^{\beta}}{\beta}$; b) $\frac{dI}{d\alpha} = -\frac{e^{\alpha}}{\alpha}$. 4.54. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ 4.55. $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. 4.56. $\frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}$. 4.57. $-\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

4.58. $\frac{x^2-x}{\ln x}$. 4.60. No. 4.61. $\frac{2}{3}\left(3+\ln\frac{2}{5}\right)$. 4.62. $\ln\frac{3}{2}$.

4.63. $\frac{1}{4}(2+\operatorname{sh} 2)$. 4.64. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. 4.65. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 4.66. π.

4.67. $\frac{\pi}{6}$. 4.68. $\frac{\pi}{6}$. 4.69. $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-\pi)$. 4.70. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 4.71. $\frac{1}{32}(\pi+2)$.

4.72. $2\left(\ln 2-\frac{1}{4}\right)$. 4.73. $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. 4.74. $\frac{1}{6}$. 4.75. $4-\pi$.

4.76. $\frac{81}{16}\pi$. 4.80. 1. 4.81. $\pi\sqrt{2}-4$. 4.82. $\frac{1}{18}(5\pi\sqrt{3}-9\ln 3)$.

4.83. $e-2$. 4.84. $\frac{4}{25}(e^{3\pi/4}+1)$. 4.85. $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$.

4.86. $\frac{e^2+1}{4}$. 4.87. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. 4.88. $\frac{\pi^2-8}{32}$. 4.89. $\frac{1}{2}(e^{\pi/2}-1)$.

4.90. $I_{2k} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2k}\cdot\frac{\pi}{2}$ $(n=2k)$; $I_{2k+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2k}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2k+1)}\times$ $\times (n=2k+1)$; $I_7 = \frac{16}{35}$; $I_8 = \frac{35}{256}\pi$. 4.91. $I_4 = 24-\frac{65}{e}$.

5.1. $\frac{1}{2}$. 5.2. Diverge. 5.3. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 5.4. $\frac{2}{5}$. 5.5. Diverge. 5.6. $1+\ln 2$. 5.7. $\frac{1}{3}$. 5.8. $\frac{1}{2}$. 5.9. Diverge. 5.10. Converge. 5.11. Converge. 5.12. Diverge. 5.13. Diverge. 5.14. Converge. 5.15. Converge. 5.16. Diverge. 5.17. Diverge. 5.18. $\frac{5}{2}(\sqrt[5]{3}+1)$.

5.19. Diverge. 5.20. π. 5.21. $\frac{\pi}{3}$. 5.22. $\frac{16}{3}$. 5.23. $2\sqrt{2}$. 5.24. Diverge. 5.25. π. 5.26. Converge. 5.27. Diverge. 5.28. Diverge. 5.29. Converge. 5.30. Diverge.

6.1. e^2. 6.2. πab. 6.3. 16/3. 6.4. 9/2. 6.5. $\frac{3}{2}(3\pi-2)$. 6.6. $\frac{56}{15}p^2$. 6.7. a^2. 6.8. $\frac{a^2}{4}(\pi-2\ln 2)$. 6.9. $\frac{c^3}{6p}$. 6.10. $2\ln 2-\frac{1}{2}$. 6.11. 32/3.

6.12. 1. **6.13.** a^2. **6.14.** $1{,}5-2\ln 2$. **6.15.** $\frac{e}{2}-1$. **6.16.** $4\ln 2-1$.

6.17. $\frac{\pi a^2}{2}-\frac{2}{3}a^2$ y $\frac{\pi a^2}{2}+\frac{2}{3}a^2$. **6.18.** $a^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln(2+\sqrt{3})\right)$.

6.19. $r(a+h)-\frac{a^2r}{\sqrt{2ah+h^2}}\ln\frac{a+h+\sqrt{2ah+h^2}}{a}$. **6.20.** $5\pi a^2$.

6.21. $\frac{a^2}{2}(3\sqrt{2}-2-\ln(1+\sqrt{2}))$. **6.22.** $\frac{\pi a^2}{2}+a^2-\frac{a^2}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$ y $\frac{\pi a^2}{2}-a^2+\frac{a^2}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$. **6.23.** $\frac{a^2r}{\sqrt{2ah-h^2}}\arccos\left(1-\frac{h}{a}\right)-$ $-(a-h)r$. **6.24.** $\frac{a^2}{4}(\pi+2\ln 2)$. **6.25.** πa^2. **6.26.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **6.27.** $\frac{8\sqrt{3}}{5}$.

6.28. 12π. **6.29.** $\frac{24}{5}ab\sqrt{3}$. **6.30.** $\frac{8}{15}$. **6.31.** $\frac{3}{2}\pi a^2$. **6.32.** $\frac{\pi a^2}{8}$.

6.33. $\frac{\pi a^2}{4}$. **6.34.** $\frac{a^2}{4}\left(\pi+\frac{4}{3}\right)$. **6.35.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **6.36.** $\frac{1}{4}(e^{4\pi}-1)^2$.

6.37. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **6.38.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **6.39.** a^2. **6.40.** $\frac{3}{4}\sqrt{3}$. **6.41.** $\frac{1}{2}\sqrt{5}+$ $+\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$. **6.42.** $2\sqrt{3}$. **6.43.** $2p(3\sqrt{3}-1)$. **6.44.** $4a\ln(a+$ $+\sqrt{a^2-1})-2\sqrt{a^2-1})$. **6.45.** $\pi a\sqrt{2}$. **6.46.** $\pi a-2(a-b)\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$.

● Pásese a las coordenadas polares. **6.47.** $\frac{1}{2}\operatorname{sh}6$. **6.48.** $\frac{4}{\pi}\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=$ $=\frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})$. **6.49.** $\frac{134}{27}p$. **6.50.** $6a$. **6.51.** $\sqrt{2}(e-1)$. **6.52.** $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

6.53. $\frac{13}{3}$. **6.54.** $4a\sqrt{3}$. **6.55.** $x=a\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $y=\frac{3}{2}a$.

6.56. $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$. **6.57.** $8(2-\sqrt{3})$. **6.58.** $\frac{3}{2}\pi a$. ● $0\leqslant\varphi\leqslant 3\pi$.

6.59. $5\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{5}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. **6.60.** $\frac{16}{3}a$. **6.61.** $2a\sqrt{6}$.

6.62. $a\sqrt{3}$. **6.63.** 8. **6.64.** $\frac{1}{3}a\sqrt{t}(3+2t)$. **6.65.** $8\sqrt{2}$. **6.66.** $\frac{\pi}{8}\times$ $\times(\operatorname{sh}12+12)$. **6.67.** a) $8\pi+\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$; b) $2\pi+\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$.

6.68. $\frac{2\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$. **6.69.** 48π. **6.70.** $\frac{16}{15}\pi a^2(\sqrt{2}+1)$. **6.71.** a) $3\pi a^2$; b) $\frac{56}{5}\pi a^2\sqrt{3}$. **6.72.** $\pi\left(\sqrt{5}+4\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **6.73.** a) $9\pi^2a^2$; b) $24\pi a^2$.

6.74. $3\pi a^2$. 6.75. $\frac{8}{3}\pi a^2(3\pi-4)$. 6.76. $6\pi^2a^2$. 6.77. $4\pi^2a^2$. 6.78. $\frac{96}{5}\pi a^2$. 6.80. $\frac{8}{3}\pi a^2(2\sqrt{2}-1)$. 6.81. $\frac{128}{105}a^3$. 6.82. $\frac{2}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha$. 6.83. $\frac{272}{15}\pi$. 6.84. $\frac{11}{4}\pi$. 6.85. $\frac{\pi^3}{2}$. 6.86. $\frac{64}{3}\pi$. 6.87. $\frac{\pi a^2 h}{2}$. 6.88. a) $\frac{\pi a^3}{2}$; b) $\frac{\pi a^3}{4}$. 6.89. $\frac{8}{15}\pi a^3$. 6.90. $\frac{3}{4}\pi^2a^3$. 6.91. $\frac{64}{105}\pi a^3$. 6.92. $\frac{\pi a^3}{12}\times$ $\times(3\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-2)$.

7.1. $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. 7.2. $M_x=\frac{1}{2}\left(e\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\right.$ $\left.+\ln\left((\sqrt{2}-1)(e+\sqrt{1+e^2})\right)\right)$, $I_x=\frac{1}{3}\left((1+e^2)^{3/2}-\sqrt{8}\right)$. 7.3. $M_x=$ $=\frac{32}{3}a^2$, $I_x=\frac{256}{15}a^3$. 7.4. $M_x=2a^2$, $I_x=\frac{\pi a^3}{2}$. 7.5. $M_x=2a^2$, $M_y=\pi a^2$. 7.6. $\bar{x}=\frac{a(\operatorname{sh}1-\operatorname{ch}1+1)}{\operatorname{sh}1}=a\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\right)$, $\bar{y}=\frac{a(2+\operatorname{sh}2)}{4\operatorname{sh}1}=$ $=\frac{a}{2}(\operatorname{csch}1+\operatorname{ch}1)$. 7.7. $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\frac{2}{5}a$. 7.8. $\bar{x}=\bar{y}=\frac{4}{5}a$. 7.9. $\bar{x}=$ $=\bar{y}=\frac{2}{5}a$. 7.10. $\frac{v_0^2}{2g}$. 7.11. $x=\frac{v_0}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)$; $v_{\text{med}}=\frac{2}{\pi}v_0$. 7.12. $t=6$ sec, $s=144$ m. 7.13. 250 m. 7.14. $\approx 0{,}125$ joulos. ● De acuerdo con la ley de Hook, la fuerza es proporcional al estiramiento del muelle. 7.15. $\frac{1}{12}\gamma\pi R^2H^2$. 7.16. $\frac{1}{3}\pi R^2H^2$. 7.17. $\frac{1}{12}\gamma a^2H^2$. 7.18. $\frac{1}{4}\pi H^2R^2$. 7.19. $\frac{16}{15}\sqrt{2}\,ap^3$. 7.20. $e_0e\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$; $\frac{e_0e}{a}$. ● De acuerdo con la ley de Coulomb, la fuerza de interacción de las cargas en el vacío es igual a $F=\frac{e_0e}{x^2}$, donde x es la distancia entre las cargas. 7.21. $2066\ln 2$. ● En un proceso isotérmico $pv=p_0v_0$. El trabajo es igual a $A=\int\limits_{v_1}^{v_2}p\,dv$, donde v_1 y v_2 son los valores inicial y final del volumen. 7.22. $\frac{p_0v_0}{k-1}\left(\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1}-1\right)$. ● En un proceso adiabático $pv^k=p_0v_0^k$, donde $k\approx 1{,}4$ (ley de Poisson). El trabajo es igual a $A=\int\limits_{v_0}^{v_1}\frac{p_0v_0^k}{v^k}\,dv$. 7.23. $\frac{4}{15}\pi\gamma\omega^2R^5$. 7.24. $\frac{1}{60}\omega^2\gamma\,dha^3$. 7.25. $\frac{1}{24}\gamma\,alh^3\omega^2$. 7.26. $\frac{1}{4}\pi\omega^2\gamma R^4H$. 7.27. $\frac{ah^2}{3}$. 7.28. $\gamma\pi R^2H$.

7.29. $\frac{2}{3}\gamma ab^2$. **7.30.** $\gamma\pi RH^2$. **7.31.** 20,625 kg. **7.32.** $\frac{0{,}24 I_0^2 R\pi}{\omega}$. ● De acuerdo con la ley de Joule—Lenz, la cantidad de calor que se desprende por una corriente directa durante el tiempo t es igual a $Q = 0{,}24 I^2 Rt$. **7.33.** $\frac{S}{\mu S_0}\sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 5{,}6$ min. ● De acuerdo con la ley de Torricelli, la velocidad con la que el agua fluye por un orificio a la distancia x de la superficie libre es igual a $v = \mu\sqrt{2gx}$, donde $\mu \approx 0{,}6$, g es la aceleración de la gravedad. **7.34.** $\frac{\pi p a^4}{8\mu l}$.

$$◀\ Q = \int_0^a v\cdot 2\pi r\,dr = \frac{2\pi p}{4\mu l}\int_0^a (a^2 - r^2)\,r\,dr = \frac{\pi p}{2\mu l}\left(-\frac{(a^2-r^2)^2}{4}\right)\Bigg|_0^a =$$

$= \frac{\pi p a^4}{8\mu l}$. ▶ **7.35.** $\frac{2kmM}{\pi R^2}$. ● Aplíquese la ley de la gravitación universal. **7.36.** $\frac{R^2}{3r^2}\sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 11$ minutos. **7.37.** $\frac{2}{3}\mu ah\sqrt{2gh}$.

8.1. 0,5236. **8.2.** 0,1963. **8.3.** 0,1178. **8.4.** 0,3926. **8.5.** 1,7500. **8.6.** 3,2413. **8.7.** 4,2218. **8.8.** 0,4969. **8.9.** 0,6082. **8.10.** 2,6291. **8.11.** 0,3927. **8.12.** 0,2500. **8.13.** 1,4627. **8.14.** 1,3419. **8.15.** 0,8120. **8.16.** 1,1184. **8.17.** 0,1728. **8.18.** 4,3555. **8.19.** 0,6205. **8.20.** 0,6076. **8.21.** 1,5708. **8.22.** 0,9160. **8.23.** 0,6651. **8.24.** 0,7724.

8.25.

```
  FUNCTION R(A, B, F, N)
  H = (B − A)/N
  R = 0.
  X = A − H/2.
  DO 1 I = 1,N
  X = X + H
1 R = R + F(X)
  R = R * H
  RETURN
  END
```

8.26.

```
  FUNCTION TR(A, B, F, N)
  H = (B − A)/N
  TR = (F(A) + F(B))/2.
  X = A
  DO 1 I = 1,N
  X = X + H
1 TR = TR + F(X)
  TR = TR * H
  RETURN
  END
```

8.27.

```
  FUNCTION T(A, B, F, EPS)
  T1 = (F(A) + F(B))/2
  T = T1
  H = B − A
  N = 1
1 X = A − H/2.
  DO 2 I = 1,N
  X = X + H
```

```
2 T = T + F(X)
  T2 = T
  N = N * 2
  H = H/2.
  T = T * H
  EPS1 = ABS(T - T1)/3.
  IF(EPS.GT.EPS1) GO TO 3
  RETURN
3 T1 = T
  T = T2
  GO TO 1
  END
```

8.28.

```
  FUNCTION P(A, B, F, N)
  H = (B - A)/(2 * N)
  P1 = 0.
  P2 = 0.
  X = A
  DO 1 I = 1,N
  X = X + N
  P1 = P1 + F(X)
  X = X + H
1 P2 = P2 + F(X)
  P = (F(A) - F(B) + 2 * P2 + 4. *P1)*H/3
  RETURN
  END
```

8.29. Para el problema 8.1 la respuesta se escribe del modo siguiente:

```
  FUNCTION F(X)
  F = 1./SQRT(5. + 4. * I - X * X)
  RETURN
  END
```

Para los problemas restantes el operador que determina el valor de F tiene la forma siguiente:

```
  F = (X ** 3)/(X ** 8 + 1.)          (para 8.2)
  F = X/(X * X + 3. * X + 2.)         (para 8.3)
  F = 1/(4. + X**2)                   (pava 8.4)
  F = (1 + SQRT(X))/X**2              (para 8.5)
  F = SQRT(1. - X**3)                 (para 8.6)
  F = SQRT(1. + X**5)                 (para 8.7)
  F = 1./SQRT(1. + X**4)              (para 8.8)
```

```
F = 1.(SQRT(1. — X**4)                         (para 8.9)
F = 1./(1. + X**2)**0.333333                   (para 8.10)
F = SQRT(X*(1. — X))                           (para 8.11)
F = X*ALOG(1. + X)                             (para 8.12)
F = EXP(X**2)                                  (para 8.13)
F = EXP(X**3)                                  (para 8.14)
F = EXP(SQRT(X))                               (para 8.15)
F = 1./ALOG(X)                                 (para 8.16)
Y = 1. + X**2                                  (para 8.17)
F = ALOG(Y)/Y                                  (para 8.18)
F = ALOG(5. + 4.*COS(X))                       (para 8.19)
F = (SEN(X) — X)/SQRT(X) + SQRT(X)             (para 8.20)
F = (X**0.333333)*COS(X)                       (para 8.21)
F = SQRT(SEN(X))*SEN(X/2.)                     (para 8.22)
F = (ATAN(X) — X)/X + 1.                       (para 8.23)
F = EXP(X)/X                                   (para 8.24)
F = (SEN(X) — X)/X + 1.
```

8.30. b) La respuesta se da para el problema 8.15:

```
  EXTERNAL F
  N = 16
  Y = R(0.0, 0.5, F, N)
1 Y1 = Y
  N = N*2
  Y = R(0.0, 0.5, F, N)
  EPS = ABS((Y1 — Y)/3.)
  IF(EPS — 0.0001)2,2,1
2 WRITE (3,3) Y
3 FORMAT (' INTEGRAL = ', F8.4)
  STOP
  END
```

● El problema que se plantea ante la calculadora electrónica debe contener tres programas: uno que se indica aquí y los otros dos obtenidos al resolver los problemas 8.25 y 8.29.

El programa para la resolución de cualquier otro problema se diferencia del que se da mediante los operadores que contienen una referencia a la función subprograma R, por ejemplo, para el problema 8.18 Y = R(0.0, 3.1416.F,N).

c) Diferencia con relación al programa aducido arriba en los operadores mencionados:

```
Y = P(0.0,0.5,F,N)
EPS = ABS((Y1 — Y)/15.)
```

8.31. La respuesta para el problema 8.16.

```
  EXTERNAL F
  Y = T(2.,3.,F,0.0001)
  WRITE (3,1) Y
1 FORMAT (', ', F20.4)
  STOP
  END
```

● Véanse las indicaciones para el problema 8.30, b).

CAPÍTULO 7

CÁLCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 1. Conceptos fundamentales

1. Concepto de función de varias variables. Recordemos que todo juego ordenado de n números reales $x_1, \ldots, x_n$ se denota $(x_1, \ldots, x_n)$ ó $P(x_1, \ldots, x_n)$ y se llama punto del espacio aritmético n-dimensional $\mathbb{R}^n$, y los números $x_1, \ldots, x_n$ llevan el nombre de coordenadas del punto $P = P(x_1, \ldots, x_n)$. La distancia entre los puntos $P(x_1, \ldots, x_n)$ y $P'(x_1', \ldots, x_n')$ se determina por la fórmula

$$\rho(P, P') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2}.$$

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario de puntos de un espacio aritmético n-dimensional. Si a cada punto $P(x_1, \ldots, x_n) \in D$ se le ha puesto en correspondéncia cierto número real bien determinado $f(P) = f(x_1, \ldots, x_n)$, se dice que sobre el conjunto D está definida la *función numérica* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de n variables $x_1, \ldots, x_n$. El conjunto D se denomina campo de definición, y el conjunto $E = \{u \in \mathbb{R} \mid u = f(P), P \in D\}$, campo de valores de la función $u = f(P)$.

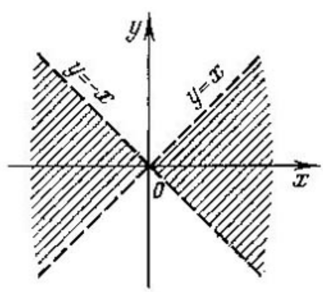


Fig. 68

En el caso particular de $n = 2$ la función de dos variables $z = f(x, y)$ puede considerarse como función de los puntos de un plano en el espacio geométrico tridimensional, provisto de un sistema fijo de coordenadas $Oxyz$. Se llama gráfica de dicha función el conjunto de puntos

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\},$$

que representa, hablando en general, cierta superficie en $\mathbb{R}^3$

EJEMPLO 1. Hállese el campo de definición de la función

$$z = \operatorname{arcsen} \frac{y}{x}.$$

◀ La función está definida para

$$-1 \leqslant \frac{y}{x} \leqslant 1, \quad x \neq 0.$$

Por consiguiente, $-x \leqslant y \leqslant x$ para $x > 0$, y $x \leqslant y \leqslant -x$ para $x < 0$. El campo de definición de la función está expuesto en la fig. 68 y contiene las fronteras del campo, a excepción del origen de coordenadas. ▶

EJEMPLO 2. Sea $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$. Hállense $f(3, -2)$, $f(x, y)$, $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$.

◀ Tenemos:

$$f(3, -2) = \frac{3^2 - (-2)^2}{3(-2)} = -\frac{5}{6}, \quad f(y, x) = \frac{y^2 - x^2}{xy},$$

$$f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{y}\right)^2}{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = \frac{y^2 - x^2}{xy} = -f(x, y).$$ ▶

1.1. Exprésese el área S de un triángulo como una función de longitudes de sus dos lados x e y, si el perímetro del triángulo es igual a $2p$. Hállese el campo de definición de esta función.

1.2. Exprésese el volumen V de un cono circular como función del área S de su superficie lateral y de su longitud l de la generatriz. Hállese el campo de definición de esta función.

1.3. Exprésese el área S de un trapecio isósceles como una función de longitudes de sus lados, si x e y son las longitudes de las bases y z es la longitud del lado lateral. Hállese el campo de definición de esta función.

Hállense los campos de definición de las funciones de dos variables (R = const):

1.4. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. **1.5.** $z = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$.

1.6. $z = \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$. **1.7.** $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}$.

1.8. $z = (2x + 3y - 1)/(x - y)$.

1.9. $z = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$. **1.10.** $z = \ln(-x - y)$.

1.11. $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$. **1.12.** $z = y\sqrt{\cos x}$.

1.13. $z = \sqrt{\log_a (x^2 + y^2)}$. **1.14.** $z = \arccos \frac{x}{x + y}$.

1.15. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-4}$.

1.16. $z=\operatorname{arcsen}\frac{x}{y^2}+\operatorname{arcsen}(1-y)$.

1.17. $f(r, \varphi)=r\sqrt{\operatorname{sen}\varphi}$.

1.18. $f(r, \varphi)=r\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Hállense los campos de definición de las funciones de tres variables:

1.19. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}$. ($R=\text{const}$).

1.20. $u=\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$.

1.21. $u=\ln(1-x^2-y^2+z^2)$.

Hállense los campos de definición de las funciones de n variables:

1.22. $u=\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}+\ldots+\sqrt{1-x_n^2}$.

1.23. $=u\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\ldots-\frac{x_n^2}{a_n^2}}$.

1.24. Sea dada una función $f(x, y)=\frac{2x-3y}{3x-2y}$. Hállense $f(2, 1)$, $f(1, 2)$, $f(3, 2)$, $f(2, 3)$, $f(a, a)$, $f(a, -a)$.

1.25. Sea dada una función $f(x, y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$. Hállense $f(-3, 4)$ y $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

1.26. Hállese $f(x)$, si $f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ $(x>0)$.

1.27. Sea $z=x+y+f(x-y)$. Hállense las funciones f y z, si $z=x^2$ para $y=0$.

1.28.** Hállese $f(x, y)$, si $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$.

1.29. Sean dadas las funciones: $f(x, y)=x^2+y^2$, $\varphi(x, y)=x^2-y^2$. Hállense: a) $f(\varphi(x, y), y^2)$; b) $\varphi(f(x, y), \varphi(x, y))$.

1.30. Sean dadas las funciones: $\varphi(x, y)=e^x\cos y$, $\psi(x, y)=e^x\operatorname{sen} y$. Demuéstrese:

a) $\varphi^2(x, y)-\psi^2(x, y)=\varphi(2x, 2y)$;

b) $2\varphi(x, y)\psi(x, y)=\psi(2x, 2y)$.

1.31. Sean dadas las funciones: $f(x, y)=x^2-y^2$, $\varphi(x)=\cos x$, $\psi(x)=\operatorname{sen} x$. Hállense: a) $f(\varphi(x), \psi(x))$; b) $\varphi(f(x, y))$.

2. Límite y continuidad de la función. El número A se denomina *límite* de la función $u = f(P)$ cuando el punto $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiende al punto $P_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$ que de la condición

$$0 < \rho(P, P_0) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < \delta$$

se deduce

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon.$$

En este caso se escribe:

$$A = \lim_{P \to P_0} f(P) = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

EJEMPLO 3. Aclárese si la función $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ tiene límite cuando $x \to 0$, $y \to 0$.

◀ Supongamos que el punto $P(x, y)$ tiende al punto $P_0(0, 0)$. Examinemos la variación de x e y a lo largo de la recta $y = kx$. Obtenemos

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - k^2}{1 + k^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

El resultado tiene valores diferentes en función de k elegido, razón por la cual la función no tiene límite. ▶

La función $u = f(P)$ se llama *continua en el punto* P_0, si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1) la función $f(P)$ está definida en el punto P_0;

2) existe $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$;

3) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Una función se llama *continua en el campo*, si es continua en cada punto de este campo. Si en el punto P_0 está perturbada por lo menos una de las condiciones de 1) a 3), P_0 se denominará punto de discontinuidad de la función $f(P)$. Los puntos de discontinuidad pueden ser aislados y pueden formar líneas de discontinuidad, superficies de discontinuidad, etc.

EJEMPLO 4. Hállense los puntos de discontinuidad de la función

$$u = \frac{1 - xyz}{2x + 3y - z + 4}.$$

◀ La función no está definida en los puntos, donde se anula el denominador. Por ello, la función tiene una superficie de discontinuidad, a saber, el plano $2x + 3y - z + 4 = 0$. ▶

Hállense los límites:

1.32. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$. **1.33.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy}$.

1.34. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{y}$.

1.35. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

1.36. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

1.37. Muéstrese que para $x\to 0$ e $y\to 0$ la función $z=\dfrac{x}{y-x}$ puede tender hacia cualquier límite. Dénse ejemplos de tal aproximación del punto (x, y) hacia el punto $(0, 0)$, para la cual $\lim z=3$, $\lim z=2$, $\lim z=1$, $\lim z=-2$.

1.38. Muéstrese que para la función $f(x, y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ no existe $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$, calculando los límites reiterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right),\qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right).$$

1.39. Muéstrese que para la función $f(x, y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ existen y son iguales entre sí los límites reiterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right)=0,$$

y, sin embargo, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ no existe.

1.40. Aclárese si tiene límite la función $\operatorname{sen}\ln(x^4+y^2)$, cuando $x\to 0$, $y\to 0$.

1.41. Aclárese si tiene límite la función $\dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$, cuando $x\to\infty$, $y\to\infty$.

1.42*. Muéstrese que la función

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si} \quad x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad x=y=0 \end{cases}$$

es continua en el punto (0, 0) a lo largo de cada rayo $x = t\cos\alpha$, $y = t\operatorname{sen}\alpha$ $(0 \leqslant t < +\infty)$ que pasa por dicho punto, es decir, $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha,\ t\operatorname{sen}\alpha) = f(0, 0)$, sin embargo esta función no es continua en el punto (0, 0).

1.43. Muéstrese que en el punto (0, 0) las funciones que siguen más abajo son continuas respecto a cada una de las variables x e y, pero son discontinuas en la totalidad de variables:

$$\text{a)}\ f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si} \quad x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x=y=0; \end{cases}$$

$$\text{b)}\ f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{x-y}{(x+y)^3}, & \text{si} \quad x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad x=y=0. \end{cases}$$

Hállense los puntos de discontinuidad de las funciones de dos variables:

1.44. $z=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2}$.

1.45. $z=\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 \pi x+\operatorname{sen}^2 \pi y}$. **1.46.** $z=\dfrac{1}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$.

1.47. $z=\ln(1-x^2-y^2)$. **1.48.** $z=\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)(y^2-x)}$.

1.49. $z=\dfrac{1}{(x^2+y^2-1)(x^2-y^2-1)}$.

Hállense los puntos de discontinuidad de las funciones de tres variables:

1.50. $u=\dfrac{1}{xyz}$. **1.51.** $u=\dfrac{1}{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1}$.

1.52. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$. **1.53.** $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2-1}$.

1.54. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2+1}$.

3. Derivadas parciales. Sea $(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ un punto fijo arbitrario perteneciente al campo de definición de la función $u = f(x_1, \ldots, x_n)$. Dando al valor de la variable x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ un incremento Δx_k, examinemos el límite

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}.$$

Este límite lleva el nombre de *derivada parcial (de primer orden)* de la función dada respecto de la variable x_k en el punto $(x_1, \ldots, x_n)$ y se designa $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ ó f'_{x_k} $(x_1, \ldots, x_n)$.

Las derivadas parciales se calculan según las reglas y fórmulas de derivación corrientes (considerando todas las variables, a excepción de x_k, como magnitudes constantes).

EJEMPLO 5. Hállense las derivadas parciales de la función

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

◀ Considerando y constante, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Considerando x constante, se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}. \text{ ▶}$$

La función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se denomina *homogénea* de grado m, si para cualquier número real $t \neq 0$ se verifica la igualdad

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^m \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Si una función homogénea $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de grado m tiene derivadas parciales respecto de cada una de las variables, se cumple la relación (*teorema de Euler*)

$$x_1 f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + x_2 f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots$$
$$\ldots + x_n f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = mf(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

EJEMPLO 6. Compruébese el teorema de Euler, si

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

◀ Tenemos

$$f(tx, ty) = A(tx)^2 + 2B(tx)(ty) + C(ty)^2 = t^2 f(x, y).$$

Por consiguiente, $m = 2$;

$$f'_x(x,\ y) = 2(Ax + By), \quad f'_y(x,\ y) = 2(Bx + Cy),$$

$$xf'_x(x,\ y) + yf'_y(x,\ y) \equiv 2x(Ax + By) + 2y(Bx + Cy) = 2f(x,\ y). \ ▶$$

Se llaman *derivadas parciales de segundo orden* de la función $u = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ las derivadas parciales de sus derivadas parciales de primer orden. Las derivadas parciales de segundo orden se designan del modo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f''_{x_k x_k}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots,\ x_n),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_l} = f''_{x_k x_l}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots,\ x_l,\ \ldots,\ x_n),$$

etc.

De un modo análogo se determinan y se designan las derivadas parciales de orden superior al segundo.

El resultado de la derivación múltiple de una función respecto a las diferentes variables no depende de la sucesión en que se realiza la derivación, siempre que las derivadas parciales «mixtas» que aparecen en este caso sean continuas.

EJEMPLO 7. Hállense las derivadas parciales de segundo orden de la función $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

◀ Tenemos (véase el ejemplo 5)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Derivamos por segunda vez:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{1\cdot(x^2+y^2)-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1\cdot(x^2+y^2)-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\left(\text{nos hemos convencido aquí de que } \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial z}\right)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \ ▶$$

Hállense las derivadas parciales de primer y segundo órdenes de las funciones dadas:

1.55. $z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$. **1.56.** $z = xy + \frac{y}{x}$.

1.57. $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$. **1.58.** $z = xe^{-xy}$.

1.59. $z=\frac{\cos y^2}{x}$. **1.60.** $z=y^x$.

1.61. $z=\ln(x^2+y^2)$. **1.62.** $z=\operatorname{arcsen}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1.63. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **1.64.** $u=\left(\frac{y}{x}\right)^z$.

1.65. $u=xy^2z^3t^4+3x-4y+2z-t+1$.

1.66. Hállense $f'_x(3, 2)$, $f'_y(3, 2)$, $f''_{xx}(3, 2)$, $f''_{x,y}(3, 2)$, $f''_{yy}(3, 2)$, si $f(x, y)=x^3y+xy^2-2x+3y-1$.

1.67. Hállense $f'_x(1, 2)$, $f'_y(1, 2)$, $f''_{xx}(1, 2)$, $f''_{xy}(1, 2)$, $f''_{yy}(1, 2)$, si $f(x, y)=\int\limits_x^{x^2+y^2} e^t\,dt$.

1.68. Muéstrese que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, si $z=x\operatorname{sen}(ax+by)$.

1.69. Muéstrese que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, si $z=\cos\frac{y}{x}\times$ $\times\arccos\frac{x}{y}$.

1.70. Hállense $f'''_{xxx}(0, 1)$, $f'''_{xxy}(0, 1)$, $f'''_{xyy}(0, 1)$, $f'''_{yyy}\times$ $\times(0, 1)$, si $f(x, y)=e^{x^2y}$.

1.71. Hállese $\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y\,\partial\xi\,\partial\eta}$, si $u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$.

1.72. Hállese $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\,\partial y^3}$, si $u=x^3\operatorname{sen}y+y^3\operatorname{sen}x$.

1.73. Hállese $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\,\partial y^q}$, si $u=(x-x_0)^p(y-y_0)^q$.

Compruébese el teorema de Euler sobre las funciones homogéneas en los problemas 1.74—1.77.

1.74. $z=x^3+x^2y-y^3$. **1.75.** $z=\frac{y}{x^3-y^3}$.

1.76. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. **1.77.** $u=\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}$.

1.78. Calcúlese

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{vmatrix},$$

si $x=r\cos\theta\cos\varphi$, $y=r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$, $z=r\operatorname{sen}\theta$.

1.79. Muéstrese que $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial y}+x+z=0$, si $z=4e^{-2y}+(2x+4x-3e)\,e^{-y}-x-1$.

1.80. Muéstrese que $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z}$, si $u=\ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$.

1.81. Muéstrese que $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}=0$, si $u=\frac{x-y}{z-t}+\frac{t-x}{y-z}$.

1.82. Muéstrese que la función $u=A\operatorname{sen}\lambda x\cos a\lambda t$ satisface la *ecuación de oscilaciones de una cuerda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1.83. Muéstrese que la función $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}$ satisface la *ecuación de conducción del calor*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1.84. Muéstrese que la función

$$u=\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

satisface la *ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

1.85*. Muéstrese que la función

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si}\quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{si}\quad x=y=0\end{cases}$$

tiene derivadas parciales $f'_x(x,\ y)$ y $f'_y(x,\ y)$ en el punto $(0,\ 0)$, aunque es discontinua en este punto.

1.86*. Muéstrese que para la función

$$f(x,\ y)=\begin{cases}xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si}\ \ x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{si}\ \ x=y=0\end{cases}$$

el valor de la segunda derivada mixta en el punto (0, 0) depende de la sucesión de derivación, a saber: $f''_{xy}(0, 0) = -1$, $f''_{yx}(0, 0) = 1$.

4. Diferencial de una función y su aplicación. Se llama *incremento total* de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el punto $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, correspondiente a los incrementos de los argumentos $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, la diferencia

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - \\ - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

La función $u = f(P)$ se denomina *derivable* en el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, si en todo lugar de cierto entorno de dicho punto el incremento total de la función puede representarse en la forma

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho),$$

donde $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son números que no dependen de $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

Se llama *diferencial du de primer orden* de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la parte principal, lineal respecto a $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, del incremento total de dicha función en el punto mencionado, es decir,

$$du = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n.$$

Las diferenciales de las variables independientes se toman iguales, por definición, a sus incrementos:

$$dx_1 = \Delta x_1, \quad dx_2 = \Delta x_2, \ldots, dx_n = \Delta x_n.$$

Para la diferencial de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se verifica la fórmula

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n. \qquad (1)$$

Las funciones u, v de varias variables obedecen a las reglas habituales de derivación:

$$d(u+v) = du + dv,$$
$$d(uv) = v\,du + u\,dv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

EJEMPLO 8. Hállese el incremento total y la diferencial de la función $f(x, y) = x^2y$ en el punto (x, y).

◀ $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y)$,

$$\Delta f(x, y) = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y) - x^2 y = \\ = 2xy \cdot \Delta x + x^2 \Delta y + 2x \Delta x \Delta y + y \Delta x^2 + \Delta x^2 \Delta y,$$

$$df(x, y) = 2xy\,\Delta x + x^2 \Delta y. \text{ ▶}$$

EJEMPLO 9. Hállese la diferencial de la función

$$f(x, y, z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

◀ 1er MÉTODO. Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{xz}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{yz}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Conforme a la fórmula (1) obtenemos

$$df(x, y, z)=-\frac{xz}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx-\frac{yz}{(x^2+y^2)^{3/2}}dy+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dz=$$
$$=\frac{(x^2+y^2)\,dz-z\,(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

2do MÉTODO. Aplicando las reglas de derivación, tenemos:

$$df(x, y, z)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}\,dz-z\cdot d\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=$$
$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}\,dz-z\cdot\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2)\,dz-z\,(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}. ▶$$

Cuando $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\ldots+\Delta x_n^2}$ es suficientemente pequeño para una función derivable $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tienen lugar las igualdades aproximadas

$$\Delta u \approx du,$$

$$f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n) \approx$$
$$\approx f(x_1, x_2, \ldots, x_n)+df(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

EJEMPLO 10. Calcúlese aproximadamente

$$\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}.$$

◀ Vamos a considerar el número buscado como un valor de la función $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$ para $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, si $x_0=4$, $y_0=3$, $\Delta x=0{,}05$, $\Delta y=0{,}07$. Tenemos:

$$f(4, 3)=\sqrt{4^2+3^2}=5,$$

$$\Delta f(x, y)\approx df(x, y)=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\Delta f(4, 3)\approx\frac{4\cdot 0{,}05+3\cdot 0{,}07}{5}\approx 0{,}08.$$

Por consiguiente,

$$\sqrt{(4,05)^2+(3,07)^2} \approx 5+0,08=5,08. \blacktriangleright$$

Se denomina *diferencial de segundo orden* d^2u de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la diferencial de su diferencial de primer orden que se considera como función de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ fijas:

$$d^2u = d\,(du).$$

Análogamente se define la diferencial de tercer orden:

$$d^3u = d\,(d^2u).$$

En general,

$$d^mu = d\,(d^{m-1}u).$$

La diferencial de m-ésimo orden de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son variables independientes, se expresa mediante la fórmula simbólica

$$d^mu=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m u, \qquad (2)$$

que se desarrolla formalmente según la ley binomial.

Por ejemplo, en el caso de una función $z = f(x, y)$ de dos variables independientes x e y, para las diferenciales de segundo y tercero órdenes son lícitas las fórmulas

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2, \qquad (3)$$

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}dx^2\,dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3. \qquad (4)$$

Ejemplo 11. Hállese d^2z, si $z = e^{xy}$.

◀ Tenemos (conforme a las reglas de derivación)

$$dz = e^{xy}\cdot d\,(xy) = e^{xy}\,(y\,dx + x\,dy).$$

Derivamos por segunda vez teniendo presente que dx y dy no dependen de x e y (es decir, considerando dx y dy constantes):

$$d^2z = e^{xy}\,d\,(xy)\cdot(y\,dx + x\,dy) + e^{xy}\cdot d\,(y\,dx + x\,dy) =$$
$$= e^{xy}\,(y\,dx + x\,dy)^2 + e^{xy}\,2\,dx\,dy = e^{xy}\,(y\,dx + x\,dy)^2 + 2\,dx\,dy). \blacktriangleright$$

1.87. Hállense el incremento total y la diferencial de la función $z = x^2 - xy + y^2$, si x varía de 2 hasta 2,1, e y, de 1 hasta 1,2.

1.88. Hállense el incremento total y la diferencial de la función $z = \lg(x^2 + y^2)$, si x varía de 2 hasta 2,1, e y, de 1 hasta 0,9.

Hállense las diferenciales de las funciones:

1.89. $z=\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$. **1.90.** $z=\operatorname{tg}\frac{y^2}{x}$.

1.91. $z=\ln\cos\frac{x}{y}$. **1.92.** $u=(xy)^z$.

1.93. $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1^{x_2-x_3}\cdot\ln x_4$.

1.94. Hállese $df(1, 2, 1)$, si $f(x, y, z)=\frac{z}{x^2+y^2}$.

Calcúlese aproximadamente:

1.95. $(2{,}01)^{3{,}03}$. **1.96.** $\sqrt{(1{,}02)^3+(1{,}97)^3}$.

1.97. $\operatorname{sen} 28°\cdot\cos 61°$.

1.98. Un vaso cilíndrico tiene las siguientes dimensiones interiores: el radio de la base $R=2{,}5$ m, la altura $H=4$ m y el espesor de las paredes $l=1$ dm. Hállese aproximadamente el volumen del material gastado para fabricar el vaso.

1.99. Un paralelepípedo rectangular tiene las siguientes dimensiones: $a=2$ m, $b=3$ m, $c=6$ m. Hállese aproximadamente la magnitud en que varía la longitud de la diagonal, si a aumenta en 2 cm, b en 1 cm, y c disminuye en 3 cm.

1.100. En un cono truncado los radios de las bases son $R=20$ cm, $r=10$ cm y la altura $h=30$ cm. ¿Cómo variará aproximadamente el volumen del cono, si R aumenta en 2 mm, r en 3 mm y h disminuye en 1 mm?

Hállense las diferenciales de primer y segundo órdenes de las siguientes funciones (x, y, z son variables independientes):

1.101. $z=x^3+3x^2y-y^3$. **1.102.** $z=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$.

1.103. $z=\sqrt{x^2+2xy}$. **1.104.** $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1.105. $z=(x+y)\,e^{xy}$. **1.106.** $z=x\ln\frac{y}{x}$.

1.107. $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{x+y}$. **1.108.** $u=xy+yz+zx$.

1.109. $u=e^{xyz}$.

1.110. Hállese d^3z, si $z=e^y\operatorname{sen} x$.

1.111. Hállese d^3u, si $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

1.112. Hállese d^6u, si $u=\ln(x+y+z)$.

1.113. Hállese d^mu, si $u=e^{ax+by+cz}$.

§ 2. Derivación de las funciones compuestas e implícitas

1. Funciones compuestas de una y de varias variables independientes. Si $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función derivable de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las cuales son, a su vez, funciones derivables de una variable independiente t:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \ \ldots, \ x_n = \varphi_n(t),$$

la derivada de la función compuesta $u = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ se calcula según la fórmula

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}. \tag{1}$$

En particular, si t coincide, por ejemplo, con la variable x_1, entonces la derivada «total» de la función u respecto de x_1 es

$$\frac{du}{dx_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dx_1}. \tag{2}$$

Ejemplo 1. Hállese $\frac{du}{dt}$, si $u = xyz$, donde $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$.

◀ Según la fórmula (1) tenemos

$$\frac{du}{dt} = yz \cdot 2t + xz \cdot \frac{1}{t} + xy \cdot \sec^2 t =$$

$$= 2t \ln t \operatorname{tg} t + \frac{(t^2+1) \operatorname{tg} t}{t} + (t^2+1) \ln t \sec^2 t. \ ▶$$

Ejemplo 2. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{dz}{dx}$, si $z = y^x$, donde $y = \varphi(x)$.

◀ Tenemos $\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y$. Conforme a la fórmula (2), obtendremos

$$\frac{dz}{dx} = y^x \ln y + xy^{x-1} \cdot \varphi'(x). \ ▶$$

Sea $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $\ldots$, $x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ ($t_1, t_2, \ldots, t_m$ son las variables independientes). Las derivadas parciales de la función u respecto de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ se expresan del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_1}, \\
\frac{\partial u}{\partial t_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial u}{\partial t_m} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_m}.
\end{aligned} \tag{3}$$

En este caso la expresión (1) del § 1 para la diferencial de primer orden conserva su forma intacta (*propiedad de invariación de la forma de la primera diferencial*)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n.$$

Las expresiones para diferenciales de órdenes superiores de una función compuesta se diferencian, hablando en general, de las expresiones del tipo (2) del § 1.

Por ejemplo, la diferencial de segundo orden se expresa por la fórmula

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 u + \\ + \frac{\partial u}{\partial x_1} d^2x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} d^2x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} d^2x_n. \qquad (4)$$

EJEMPLO 3. Hállense dz y d^2z, si $z = f(u, v)$, donde $u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, $v = xy$.

◀ Tenemos $dz = f'_u\, du + f'_v\, dv$, donde

$$du = x\, dx - y\, dy, \quad dv = y\, dx + x\, dy.$$

Por consiguiente,

$$dz = f'_u \cdot (x\, dx - y\, dy) + f'_v \cdot (y\, dx + x\, dy) = \\ = (xf'_u + yf'_v)\, dx + (xf'_v - yf'_u)\, dy.$$

Derivamos por segunda vez:

$$d^2z = d\,(f'_u) \cdot du + f'_u \cdot d\,(du) + d\,(f'_v)\, dv + f'_v \cdot d\,(dv) = \\ = (f''_{uu}\, du + f''_{uv} \cdot dv)\, du + f'_u \cdot d^2u + (f''_{uv}\, du + f''_{vv}\, dv)\, dv + \\ + f'_v \cdot d^2v, \quad \text{donde} \quad d^2u = dx^2 - dy^2, \quad d^2v = 2dx\, dy.$$

Por consiguiente,

$$d^2z = (f''_{uu}\,(x\, dx - y\, dy) + f''_{uv}\,(y\, dx + x\, dy))\,(x\, dx - y\, dy) + \\ + f'_u\,(dx^2 - dy^2) + (f''_{uv}\,(x\, dx - y\, dy) + f''_{vv}\,(y\, dx + x\, dy)) \times \\ \times (y\, dx + x\, dy) + f'_v \cdot 2dx\, dy = f''_{uu}\,(x\, dx - y\, dy)^2 + \\ + f''_{uv}\,(y\, dx + x\, dy)\,(x\, dx - y\, dy) + f'_u\,(dx^2 - dy^2) + \\ + f''_{vv}\,(x\, dx - y\, dy)\,(y\, dx + x\, dy) + f''_u\,(y\, dx + x\, dy)^2 + \\ + 2f'_v\, dx\, dy = f''_{uu}\,(x^2\, dx^2 - 2xy\, dx\, dy + y^2\, dy^2) + \\ + 2f''_{uv}\,(xy\,(dx^2 - dy^2) + (x^2 - y^2)\, dx\, dy) + \\ + f''_{vv}\,(y^2\, dx^2 + 2xy\, dx\, dy + x^2\, dy^2) + f'_u(dx^2 - dy^2) + \\ + 2f'_v\, dx\, dy = (x^2f''_{uu} + 2xyf''_{uv} + y^2f''_{vv} + f'_u)\, dx^2 + \\ + 2\,(xyf''_{vv} + (x^2 - y^2)\, f''_{uv} - xyf''_{uu} + f'_v)\, dx\, dy + \\ + (y^2f''_{uu} - 2xyf''_{uv} + x^2f''_{vv} - f'_v)\, dy^2. \text{ ▶}$$

2.1. Hállese $\frac{dz}{dt}$, si $z=e^{2x-3y}$, donde $x=\operatorname{tg} t$, $y=t^2-t$.

2.2. Hállese $\frac{dz}{dt}$, si $z=x^y$, donde $x=\ln t$, $y=\operatorname{sen} t$.

2.3. Hállese $\frac{dz}{dt}$, si $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, donde $x=e^{2t}+1$, $y=e^{2t}-1$.

2.4. Hállese $\frac{du}{dt}$, si $u=\frac{yz}{x}$, donde $x=e^t$, $y=\ln t$, $z=t^2-1$.

2.5. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{dz}{dx}$, si $z=\ln(e^x+e^y)$, donde $y=\frac{1}{3}x^3+x$.

2.6. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{dz}{dx}$, si $z=\operatorname{arctg}\frac{x+1}{y}$, donde $y=e^{(x+1)^2}$.

2.7. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z=u^2\ln v$, donde $u=\frac{y}{x}$, $v=x^2+y^2$.

2.8. Hállese dz, si $z=u^2v-v^2u$, donde $u=x\operatorname{sen} y$, $v=y\cos x$.

2.9. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z=f(u,\ v)$, donde $u=\frac{2y}{x+y}$, $v=x^2-3y$.

2.10. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z=f(u,\ v)$, donde $u=\ln(x^2-y^2)$, $v=xy^2$.

2.11. Hállese dz, si $z=f(u,\ v)$, donde $u=\cos(xy)$ $v=x^5-7y$.

2.12. Hállese dz, si $z=f(u,\ v)$, donde $u=\operatorname{sen}\frac{x}{y}$, $v=\sqrt{x/y}$.

2.13. Hállese du, si $u=f(x,\ y,\ z)$, donde $x=s^2+t^2$, $y=s^2-t^2$, $z=2st$.

2.14. Hállense $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, si $u=f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, donde $x_3=g(x_1,\ x_2)$, $x_4=h(x_1,\ x_2,\ x_3)$.

2.15. Muéstrese que la función $z=y\cdot\varphi(\cos(x-y))$ satisface la ecuación $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y}$.

2.16. Muéstrese que la función $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ satisface la ecuación $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.

2.17. Muéstrese que la función $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$ satisface la ecuación $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

2.18. Muéstrese que la función $u = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y + z) + \frac{1}{2}x^2yz + f(y - x, z - x)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = xyz.$$

2.19. Hállense $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si $z = f(u, v)$, donde $u = xy$, $v = x/y$.

2.20. Hállese $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, si $u = f(x, y, z)$, donde $z = \varphi(x, y)$.

2.21. Hállense todas las derivadas parciales de segundo orden de la función $u = f(x, xy, xyz)$.

2.22. Muéstrese que la función $u = x\varphi(x + y) + y\psi \times \times (x + y)$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

2.23. Muéstrese que la función $u = \varphi(xy) + \psi\left(\frac{x}{y}\right)$ satisface la ecuación

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

2.24. Hállese d^2u, si $u = f(t)$, donde $t = x^2 + y^2 + z^2$.

2.25. Hállese d^2u, si $u = f(ax, by, cz)$.

2.26. Hállese d^2z, si $z = f(u, v)$, donde $u = x \operatorname{sen} y$, $v = y\cos x$.

2. Funciones implícitas de una y de varias variables independientes. Supongamos que la ecuación $f(x, y) = 0$, donde f es una función derivable de las variables x e y, define y como función de x. La primera derivada de esta función implícita $y = y(x)$ en el punto x_0 se expresa mediante la fórmula

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} \qquad (5)$$

a condición de que $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, donde $y_0 = y(x_0)$, $f(x_0, y_0) = 0$.

Las derivadas de órdenes superiores se calculan por medio de la derivación sucesiva de la fórmula (5).

EJEMPLO 4. Hállense $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$, si

$$1 + xy - \ln (e^{xy} + e^{-xy}) = 0.$$

◀ Designemos el primer miembro de esta ecuación con $f(x, y)$. Entonces

$$f'_x(x, y) = y - \frac{ye^{xy} - ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}},$$

$$f'_y(x, y) = x - \frac{xe^{xy} - xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}.$$

De acuerdo con la fórmula (5) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2ye^{-xy}}{2xe^{-xy}} = -\frac{y}{x}.$$

Derivamos por segunda vez, tomando en consideración que y es una función de x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{y}{x}\right) = -\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2} = \frac{y - x\left(-\frac{y}{x}\right)}{x^2} = \frac{2y}{x^2}. \quad ▶$$

Supongamos que la ecuación $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$, donde F es una función derivable de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$, define u como una función de las variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Las derivadas parciales de esta función implícita $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el punto $M^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ se calculan según las fórmulas

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{M=M^0} = -\frac{F'_{x_k}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0)}{F'_u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad (6)$$

condición de que $F'_u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0) \neq 0$, donde $u^0 = u(M^0)$ y $F(M^0, u^0) = 0$.

Las derivadas parciales de la función u se pueden hallar también de la manera siguiente: calculamos la diferencial total de la función $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ y la igualamos a cero:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F}{\partial u} du = 0$$

y hallamos de aquí du.

EJEMPLO 5. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

◀ 1^er MÉTODO. Designemos el primer miembro de la ecuación dada con $F(x, y, z)$. Entonces

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2 - 3yz,$$
$$F'_y(x, y, z) = 6y^2 - 3xz - 2,$$
$$F'_z(x, y, z) = 3z^2 - 3xy.$$

De acuerdo con las fórmulas (6) obtenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{3x^2-3yz}{3z^2-3xy} = \frac{x^2-yx}{xy-z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{6y^2-3xz-2}{3z^2-3xy} = \frac{6y^2-3xz-2}{3(xy-z^2)}.$$

2^do MÉTODO. Derivamos la ecuación dada:

$$3x^2\,dx + 6y^2\,dy + 3z^2\,dz - 3yz\,dx - 3xz\,dy - 3xy\,dz - 2dy = 0.$$

De aquí hallamos dz:

$$dz = \frac{3(x^2-yz)\,dx + (6y^2-3xz-2)\,dy}{3(xy-z^2)}.$$

Comparando con la fórmula $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2-yz}{xy-z^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2-3xz-2}{3(xy-z^2)}. ▶$$

2.27. Hállese $\frac{dy}{dx}$, si $x^2e^{2y} - y^2e^{2x} = 0$.

2.28. Hállese $\frac{dy}{dx}$, si $y \operatorname{sen} x - \cos(x-y) = 0$.

2.29. Hállense $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $x + y = e^{x-y}$.

2.30. Hállense $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.

2.31. Hállense $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$, $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$, si $x^2 + 2xy + y^2 - 4y + 2y - 2 = 0$.

2.32. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el punto $(1, -2, 2)$, si $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

2.33. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z \ln(x+z) - \frac{xy}{z} = 0$.

2.34. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $F(x+y+z, \; x^2+y^2+z^2) = 0$.

2.35. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $f(yz, e^{xz}) = 0$.

2.36. Hállese dz, si $yz = \operatorname{arctg}(xz)$.

2.37. Hállese dz, si $xz - e^{z/y} + x^3 + y^3 = 0$.

2.38. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, si $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.

2.39. Hállense $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si $x + y + z = e^z$.

2.40. Hállese d^2z, si $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2.41. Muéstrese que la función z, definida por la ecuación $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$, donde φ es una función derivable arbitraria de dos variables, satisface la ecuación

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

2.42. Muéstrese que la función z, definida por la ecuación $(x - a\cos\alpha)^2 + (y - a\operatorname{sen}\alpha)^2 = \left(\frac{z - a}{m}\right)^2$, donde a, α, m son constantes, satisface la ecuación

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = m^2.$$

2.43. Muéstrese que la función z, definida por la ecuación $y = x\varphi(z) + \psi(z)$, satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

3. Sistemas de las funciones implícitas y de las definidas en forma paramétrica. Limitémonos a considerar las funciones de dos variables independientes. Supongamos que un sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} F(x, y, u, v) &= 0, \\ G(x, y, u, v) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

tiene la solución $x = x_0$, $y = y_0$, $u = u_0$ y $v = v_0$, con la particularidad de que las funciones F y G tienen en el entorno del punto $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ derivadas parciales continuas de primer orden y el jacobiano

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

distinto de cero en el punto P_0. Entonces, en cierto entorno del punto P_0 el sistema (7) determina un único sistema de funciones continuas $u(x, y)$ y $v(x, y)$ que tienen derivadas parciales continuas y que satisfacen las condiciones

$$u(x_0, y_0) = u_0, \quad v(x_0, y_0) = v_0.$$

Las diferenciales de estas funciones du y dv (y, por tanto, también las derivadas parciales) pueden hallarse a partir del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial u}\,du + \frac{\partial F}{\partial v}\,dv = 0,$$
$$\frac{\partial G}{\partial x}\,dx + \frac{\partial G}{\partial y}\,dy + \frac{\partial G}{\partial u}\,du + \frac{\partial G}{\partial v}\,dv = 0.$$

EJEMPLO 6. Las funciones u y v de las variables independientes x e y vienen dadas implícitamente mediante el sistema de ecuaciones

$$u + v = x, \quad u - yv = 0.$$

Hállense du, dv, d^2u, d^2v.

◀ El jacobiano del sistema $\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -y \end{vmatrix} = -y - 1$ es distinto de cero cuando $y \neq -1$. Derivando hallamos dos ecuaciones que ligan entre sí las diferenciales de todas las cuatro variables:

$$du + dv = dx, \quad du - y\,dv - v\,dy = 0.$$

Al resolver este sistema respecto a du y dv para $y \neq -1$, obtenemos

$$du = \frac{y\,dx - v\,dy}{1+y}, \quad dv = \frac{dx - v\,dy}{1+y}.$$

Derivamos por segunda vez:

$$d^2u = \frac{(dx\,dy + dv\,dy)(1+y) + dy\,(y\,dx + v\,dy)}{(1+y)^2} =$$

$$= \frac{\left(dx\,dy + \dfrac{dx - v\,dy}{1+y}\,dy\right)(1+y) - dy\,(y\,dx + v\,dy)}{(1+y)^2} =$$

$$= \frac{(1+y)\,dx\,dy + dx\,dy - v\,dy^2 - y\,dx\,dy - v\,dy^2}{(1+y)^2} = \frac{2\,(dx\,dy - v\,dy^2)}{(1+y)^2},$$

$$d^2v = \frac{-dv\,dy\,(1+y) - dy\,(dx - v\,dy)}{(1+y)^2} =$$

$$= -\frac{\dfrac{dx - v\,dy}{1+y}\,dy\,(1+y) - dx\,dy + v\,dy^2}{(1+y)^2} =$$

$$= \frac{-dx\,dy + v\,dy^2 - dx\,dy + v\,dy^2}{(1+y)^2} = \frac{2\,(v\,dy^2 - dx\,dy)}{(1+y)^2} = -d^2u. \ ►$$

Supongamos que la función z de las variables independientes x e y viene dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

y

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

en el entorno del punto $P(u_0, v_0)$. En este caso la diferencial dz de esta función (y, por tanto, sus derivadas parciales) en el entorno del punto P puede ser hallada a partir del sistema de ecuaciones

$$dx = \frac{dx}{du}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

EJEMPLO 7. Hállense $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, si

$$x = u\cos v, \quad y = u\,\mathrm{sen}\, v, \quad z = cv.$$

◀ Tenemos

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\,\mathrm{sen}\, v \\ \mathrm{sen}\, v & u\cos v \end{vmatrix} = u \neq 0 \quad \text{para} \quad u \neq 0.$$

Encontramos por derivación tres ecuaciones que ligan las diferenciales de todas las cinco variables:

$$dx = \cos v\, du - u\,\mathrm{sen}\, v\, dv, \qquad dy = \mathrm{sen}\, v\, du + u\cos v\, dv,$$

$$dz = c\, dv.$$

De las primeras dos ecuaciones hallamos dv:

$$dv = \frac{\cos v\, dy - \mathrm{sen}\, v\, dx}{u}.$$

Sustituyamos el valor hallado de dv en la tercera ecuación:

$$dz = \frac{c}{u}(\cos v\, dy - \mathrm{sen}\, v\, dx).$$

De aquí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c\,\mathrm{sen}\, v}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c\cos v}{u}. \;▶$$

2.44. Las funciones y e z de una variable independiente x vienen dadas por el sistema de ecuaciones

$$7x^2 + y^2 - 3z^2 = -1, \quad 4x + 2y^2 - 3z^2 = 0.$$

Hállense $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ para $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$.

2.45. Las funciones y y z de una variable independiente x vienen dadas por el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$$

Hállense dy, dz, d^2y, d^2z.

2.46. Las funciones u y v de las variables independientes x e y están dadas implícitamente por el sistema de ecuaciones

$$xu + yv = 1 \quad x + y + u + v = 0.$$

Hállense du, dv, d^2u, d^2v.

2.47. Muéstrese que $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, si $uv = 3x - 2y + z$, $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

2.48. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u^2v^2$.

2.49. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $x = a\cos u \operatorname{ch} v$, $y = b\operatorname{sen} u \operatorname{ch} v$, $z = c\operatorname{sh} v$.

2.50. Híllese dz, si $x = e^u\cos v$, $y = e^u\operatorname{sen} v$, $z = uv$.

2.51. Híllese dz, si $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ $(u \neq v)$.

4. Cambio de variables en las expresiones diferenciales. Al considerar las expresiones diferenciales nos encontramos a menudo con la necesidad de expresar las derivadas (que figuran en éstas) respecto de unas variables en términos de las derivadas respecto de algunas variables nuevas.

EJEMPLO 8. Transfórmese la ecuación

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0,$$

suponiendo $x = \cos t$.

◀ Expresemos las derivadas de y respecto de x mediante las derivadas de y respecto de t:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{-\operatorname{sen} t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}=\frac{-\operatorname{sen} t\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\cos t\cdot\frac{dy}{dt}}{\operatorname{sen}^2 t\cdot(-\operatorname{sen} t)}=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\operatorname{sen}^3 t}\cdot\frac{dy}{dt}\ .$$

Sustituyamos las expresiones obtenidas de las derivadas en la ecuación dada y cambiando x por $\cos t$, tenemos:

$$(1-\cos^2 t)\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\operatorname{sen}^3 t}\cdot\frac{dy}{dt}\right)-\cos t\left(-\frac{1}{\operatorname{sen} t}\cdot\frac{dy}{dt}\right)=0,$$

o bien $\frac{d^2y}{dt^2}=0$. ▶

EJEMPLO 9. Transfórmese la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

considerando x como función e y, como un argumento.

◀ Expresemos las derivadas de y respecto a x mediante las derivadas de x respecto de y:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=$$

$$=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

Sustituyamos estas expresiones de las derivadas en la ecuación dada:

$$\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}+2y\cdot\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=0,$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dy^2}-2y\frac{dx}{dy}=0.\ ▶$$

EJEMPLO 10. Pásese a las coordenadas polares en la expresión

$$A=\frac{x+yy'}{xy'-y}\ .$$

◀ Tenemos

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\operatorname{sen}\varphi,$$

$dx = \cos\varphi\, dr - r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi$, $dy = \operatorname{sen}\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$, de donde

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr - r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}.$$

Sustituyamos las expresiones x, y, y' en A:

$$A = \frac{r\cos\varphi + r\operatorname{sen}\varphi \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr - r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}}{r\cos\varphi \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr - r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi} - r\operatorname{sen}\varphi} = \frac{\dfrac{dr}{d\varphi}}{r}.$$

EJEMPLO 11. Transfórmese la ecuación

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

pasando a las variables nuevas independientes u y v, si $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$.

◀ Expresemos las derivadas parciales de z respecto a x e y en érminos de las derivadas parciales de z respecto a u y v.

Tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

De acuerdo con las fórmulas (3) obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot y + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} y + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\cdot\frac{1}{y}\right) y + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} y + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} =$$

$$= y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} x - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{x}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{1}{y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{y^2}\right) =$$

$$= x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{1}{y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{y^3}\right) =$$

$$= x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}x - \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{x}{y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}x - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{x}{y^2}\right)\frac{1}{y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{y^3}\right) =$$

$$= x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Sustituyamos las expresiones obtenidas de las derivadas en la ecuación dada:

$$x^2\left(y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) -$$

$$- y^2\left(x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0.$$

Al simplificar para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, obtendremos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2xy}\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 12. Transfórmese la ecuación $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z$, tomando como variables nuevas independientes $u = x^2 + y^2$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ y como función nueva, $w = \ln z - (x + y)$.

◀ Expresemos las derivadas parciales de z respecto a x e y en términos de las derivadas parciales de w respecto a u y v. Con este fin derivemos las relaciones dadas:

$$du = 2(x\,dx + y\,dy),$$

$$dv = -\left(\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2}\right),$$

$$dw = \frac{dz}{z} - (dx + dy).$$

Tomando en consideración la fórmula (1) § 1, tenemos

$$\frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv = \frac{dz}{z} - (dx + dy),$$

o bien

$$2\frac{\partial w}{\partial u}(x\,dx + y\,dy) - \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2}\right) = \frac{dz}{z} - (dx + dy),$$

de donde

$$dz = z\left(\left(2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right)dx + \left(2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right)dy\right).$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y}=z\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right).$$

Sustituyamos las expresiones $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en la ecuación dada:

$$yz\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)-xz\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)=(y-x)z,$$

o bien $\frac{\partial w}{\partial v}=0$. ▶

2.52. Transfórmese la ecuación

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2}+2x^3\frac{dy}{dx}-y=0,$$

suponiendo $x=1/t$.

2.53. Transfórmese la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{(1+x^2)^2}=0,$$

suponiendo $x=\operatorname{tg} t$.

2.54. Transfórmese la ecuación

$$3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

considerando y como argumento.

2.55. Transfórmese la ecuación

$$(xy'-y)^2=2xy(1+y'^2),$$

pasando a las coordenadas polares.

2.56. Transfórmese la expresión $w=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$, pasando a las coordenadas polares.

2.57. Transfórmese la ecuación

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

pasando a las nuevas variables independientes u y v, si $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

2.58. Transfórmese la ecuación $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$, pasando a las nuevas variables independientes u y v, si $u=y$, $v=y/x$.

2.59. Transfórmese la expresión $w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, pasando a las coordenadas polares.

2.60. Transfórmese la expresión

$$w=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$

pasando a las coordenadas esféricas ($r=\rho\operatorname{sen}\theta$, $\varphi=\varphi$, $z=\rho\cos\theta$).

2.61. Transfórmese la ecuación

$$(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz,$$

tomando como nuevas variables independientes $u=yz-x$, $v=xz-y$, y como función nueva, $w=xy-z$.

2.62. Transfórmese la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{2}y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x},$$

tomando como nuevas variables independientes $u=\frac{x}{y}$, $v=x$ y como función nueva, $w=xz-y$.

2.63. Transfórmese la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=z,$$

tomando como nuevas variables independientes $u=\frac{x+y}{2}$, $v=\frac{x-y}{2}$, y como función nueva, $w=ze^{y}$.

§ 3. Aplicaciones de las derivadas parciales

1. Fórmula de Taylor. Si una función $f(P)$ es $m+1$ veces derivable en cierto entorno $U(P_0)$ del punto $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, entonces para todo punto $P(x_1, \ldots, x_n)\in U(P_0)$ es válida la *fórmula de*

$$f(P)=f(P_0)+\frac{df(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}{1!}+\frac{d^2f(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}{2!}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{d^mf(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}{m!}+\frac{d^{m+1}f(\widetilde{P}, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}{(m+1)!}, \quad (1)$$

donde $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_n^0$, y $\widetilde{P}$ es un punto del entorno mencionado.

Por ejemplo, en el caso de una función $f(x, y)$ de dos variables x e y, la fórmula de Taylor en forma desarrollada se escribe como sigue:

$$f(x, y)=f(x_0, y_0)+\frac{1}{1!}(f'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0, y_0)(y-y_0))+$$
$$+\frac{1}{2!}(f''_{xx}(x_0, y_0)(x-x_0)^2+2f''_{xy}(x_0, y_0)(x-x_0)(y-y_0)+$$
$$+f''_{yy}(x_0, y_0)(y-y_0)^2+\ldots+\frac{1}{m!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^m\times$$
$$\times f(x_0, y_0)+\frac{1}{(m+1)!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1}\times$$
$$\times f(x_0+\theta(x-x_0), \quad y_0+\theta(y-y_0)). \quad (2)$$

El último sumando en la fórmula (2) (*término residual*) puede ser escrito más breve en la forma:

$$o(\rho^m), \text{ donde } \rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

(*forma de Peano*).

En un caso particular, cuando $x_0 = y_0 = 0$, la *fórmula* (2) lleva el nombre *de Maclaurin.*

EJEMPLO 1. Desarróllese la función $f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4$ según la fórmula de Taylor en el entorno del punto $(2, -1)$.

◀ Tenemos $f(2, -1) = 2$. Calculemos sucesivamente las derivadas parciales de la función dada y sus valores en el punto $(2, -1)$:

$$f'_x(x, y)=3x^2-10x-y+10, \quad f'_x(2, -1)=3;$$
$$f'_y(x, y)=-x+2y+5, \quad f'_y(2, -1)=1;$$
$$f''_{xx}(x, y)=6x-10, \quad f''_{xx}(2, -1)=2;$$
$$f''_{xy}(x, y)=-1, \quad f''_{xy}(2, -1)=-1;$$
$$f''_{yy}(x, y)=2, \quad f''_{yy}(2, -1)=2;$$
$$f'''_{xxx}(x, y)=6, \quad f'''_{xxx}(2, -1)=6.$$

Todas las derivadas posteriores son idénticamente iguales a cero.

A partir de la fórmula (2) obtenemos el desarrollo buscado

$$f(x, y) = 2 + 3(x-2) + (y+1) + (x-2)^2 - \\ -(x-2)(y+1) + (y+1)^2 + (x-2)^3. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 2. Desarróllese según la fórmula de Taylor en el entorno del punto (1, 1) hasta los términos de segundo orden inclusive, la función

$$f(x, y) = y^x.$$

◀ Tenemos $f(1, 1) = 1$. Calculemos las derivadas parciales de primer y segundo órdenes de la función dada y sus valores en el punto (1, 1):

$$\begin{aligned}
&f'_x(x, y) = y^x \ln y, && f'_x(1, 1) = 0;\\
&f'_y(x, y) = xy^{x-1}, && f'_y(1, 1) = 1;\\
&f''_{xx}(x, y) = y^x \ln^2 y, && f''_{xx}(1, 1) = 0;\\
&f''_{xy}(x, y) = y^{x-1}(x \ln y + 1), && f''_{xy}(1, 1) = 1;\\
&f''_{yy}(x, y) = x(x-1)y^{x-2}, && f''_{yy}(1, 1) = 0.
\end{aligned}$$

Conforme a la fórmula (2) obtenemos

$$f(x, y) = 1 + (y-1) + (x-1)(y-1) + o(\rho^2),$$

donde $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$. ▶

3.1. Desarróllese $f(x+h, y+k)$ en potencias positivas enteras de h y k, si $f(x, y) = xy^2$.

3.2. Hállese el incremento adquirido por la función $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ al pasar de los valores $x = -2$, $y = 1$ a los valores $x_1 = -2 + h$, $y_1 = 1 + k$.

3.3. Desarróllese según la fórmula de Taylor la función $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ en el entorno del punto (2, 1).

3.4. Desarróllese $f(x+h, y+k, z+l)$ en potencias enteras positivas de h, k, l, si $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - 2yz + 3x - y - 4z + 1$.

3.5. Desarróllese según la fórmula de Taylor la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz)$ en el entorno del punto (1, −1, 2).

3.6. Desarróllese según la fórmula de Maclaurin hasta los términos de tercer orden inclusive, la función $f(x, y) = e^y \cos x$.

3.7. Desarróllese según la fórmula de Maclaurin hasta los términos de cuarto orden inclusive, la función $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y$.

3.8. Desarróllese según la fórmula de Taylor en el entorno del punto (1, 1) hasta los términos de tercer orden inclusive la función $f(x, y) = y/x$.

3.9. Desarróllese según la fórmula de Taylor en el entorno del punto (1, 1, 0) hasta los términos de segundo orden inclusive, la función $f(x, y, z) = \ln(xy + z^2)$.

3.10. Desarróllese según la fórmula de Taylor en el entorno del punto (1, 1) hasta los términos de segundo orden inclusive, la función implícita $z(x, y)$ que se define mediante la ecuación

$$z^3 + 3yz - 4x = 0, \quad \text{si} \quad z(1, 1) = 1.$$

2. Extremo de una función. Una función $u = f(P)$ tiene un *máximo* (*mínimo*) en el punto $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, si existe tal entorno del punto P_0, para todos los puntos del cual $P(x_1, \ldots, x_n)$, distintos de P_0, se verifica la desigualdad $f(P_0) > f(P)$ ($f(P_0) < f(P)$, respectivamente). El máximo o el mínimo de una función lleva el nombre de *extremo* de la misma.

Condición necesaria para la existencia de un extremo. Si una función *derivable* $f(P)$ alcanza su extremo en el punto P_0, entonces en dicho punto

$$f'_{x_k}(P_0) = 0 \text{ para todo } k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

o bien $df(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) = 0$ idénticamente respecto de $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$.

Los puntos, donde se cumplen las condiciones (3), se llaman puntos *estacionarios* de la función $u = f(P)$. De este modo, si P_0 es un punto de extremo de la función $u = f(P)$, entonces o bien P_0 es un punto estacionario, o bien en dicho punto la función no es derivable.

Condiciones suficientes para la existencia de extremo. Supongamos que $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ es un punto estacionario de la función $u = f(P)$, siendo dicha función dos veces derivable en cierto entorno del punto P_0 y todas sus segundas derivadas parciales son continuas en el punto P_0. En este caso:

1) si la segunda diferencial $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ como función de $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, tiene signo constante, cualesquiera que sean los juegos de valores $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ no nulos simultáneamente, la función $u = f(P)$ tendrá en P_0 un extremo, a saber, un máximo cuando $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) < 0$, y un mínimo, cuando $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) > 0$;

2) si $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ es una función de signo variable $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, es decir, admite tanto valores positivos como negativos, el punto P_0 no será un punto de extremo de la función $u = f(P)$;

3) si $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \geqslant 0$ ó $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \leqslant 0$, con la particularidad de que existen tales juegos de valores $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, no nulos simultáneamente, para los cuales el valor de la segunda diferencial se reduce a cero, entonces la función $u = f(P)$ puede tener extremo en el punto P_0 y puede no tenerlo (en este caso se necesita un análisis adicional para aclarar la cuestión).

En el caso particular de una función de dos variables, las condiciones suficientes de un extremo pueden formularse de la manera siguiente. Sea $P_0(x_0, y_0)$ un punto estacionario de la función $z = f(x, y)$, siendo dicha función dos veces derivable en cierto entorno del punto P_0 y todas sus segundas derivadas parciales son continuas en el punto P_0. Introduzcamos las designaciones:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

y

$$D = AC - B^2.$$

Entonces:

1) si $D > 0$, la función $z = f(x, y)$ tiene en el punto $P_0(x_0, y_0)$ un extremo, a saber, un máximo si $A < 0$ $(C < 0)$, y un mínimo, si $A > 0$ $(C > 0)$;

2) si $D < 0$, en el punto $P_0(x_0, y_0)$ no existe extremo;

3) si $D = 0$, se requiere un análisis adicional.

EJEMPLO 3. Analícese el extremo de la función

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

◀ Hallemos las derivadas parciales de primer orden y formemos un sistema de ecuaciones del tipo (3):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3(x^2 - y) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3(y^2 - x) = 0,$$

o bien

$$x^2 - y = 0,$$
$$y^2 - x = 0.$$

Resolviendo el sistema, hallamos dos puntos estacionarios:

$$P_1(0, 0) \quad \text{y} \quad P_2(1, 1).$$

Hallemos las derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

A continuación formemos el discriminante $D = AC - B^2$ para cada punto estacionario.

Para el punto P_1

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_1} = 0, \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_1} = -3, \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_1} = 0, \quad D = -9 < 0.$$

Por consiguiente, en el punto P_1 no hay extremo.

Para el punto P_2

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_2} = 6, \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_2} = -3, \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_2} = 6,$$
$$D = 36 - 9 > 0, \quad A > 0.$$

Por consiguiente, en el punto P_2 la función alcanza un mínimo que es igual a

$$z_{\min} = z|_{\substack{x=1\\y=1}} = 1+1-3 = -1. \blacktriangleright$$

Hállense los extremos de las funciones de dos variables:

3.11. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

3.12. $z = xy^2(1 - x - y)$ $(x > 0,\ y > 0)$.

3.13. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

3.14. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ $(x > 0,\ y > 0)$.

3.15. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$ $(x > 0,\ y > 0)$.

3.16. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

3.17. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

3.18. $z = (2x_2 + y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}$.

3.19. $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

Hállense los extremos de las funciones de tres variables:

3.20. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$.

3.21. $u = xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z)$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$.

3.22. $u = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{2}{z}$.

Hállense los extremos de las funciones z definidas implícitamente:

3.23*. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z - 7 = 0$.

3.24. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0$.

3. **Extremo condicionado.** La función $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_n)$ tiene un *máximo condicionado* (un *mínimo condicionado*) en el punto $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, si existe tal entorno del punto P_0, para todos los puntos P del cual $(P \neq P_0)$ que satisfacen la ecuación de enlace

$$\varphi_k(P) = \varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m;\ m < n),$$

se cumple la desigualdad $f(P_0) > f(P)$ ($f(P_0) < f(P)$, respectivamente).

El problema de búsqueda de un extremo condicionado se reduce al análisis del extremo corriente de la *función de Lagrange*

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\varphi_k(x_1, \ldots, x_n);$$

λ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ se denominan *multiplicadores de Lagrange*.

Las condiciones necesarias para la existencia de un extremo condicionado se expresan por medio del sistema de $n+m$ ecuaciones

$$\frac{\partial L(P)}{\partial x_i}=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$
$$\varphi_k(P)=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{4}$$

a partir del cual pueden ser halladas las incógnitas

$$x_1,\ \ldots,\ x_n,\quad \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m,$$

donde $x_1,\ \ldots,\ x_n$ son las coordenadas del punto en el que puede haber un extremo condicionado.

Las condiciones suficientes para la existencia de extremo condicionado están asociadas con el análisis de la 2da diferencial de la función de Lagrange $d^2L\ (x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ \lambda_1^0,\ \ldots,\ \lambda_m^0,\ dx_1,\ \ldots,\ dx_n)$ para cada sistema de valores $x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ \lambda_1^0,\ \ldots,\ \lambda_m^0$, obtenido de (4) a condición de que $dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_n$ satisfagan las ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)}{\partial x_j}\,dx_j=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m) \tag{5}$$

para $dx_1^2+dx_2^2+\ldots+dx_n^2\neq 0$. A saber, la función $f\ (P)$ tiene un máximo condicionado en el punto $P_0\ (x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ siempre que para toda clase de valores $dx_1,\ \ldots,\ dx_n$ que satisfacen las condiciones (5) y no son nulos simultáneamente se verifica la desigualdad $d^2L\ (x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ \lambda_1^0,\ \ldots,\ \lambda_m^0,\ dx_1,\ \ldots,\ dx_n)<0$, y un mínimo condicionado, si bajo las mismas condiciones $d^2L\ (x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ \lambda_1^0,\ \ldots,\ \lambda_m^0,\ dx_1,\ \ldots,\ dx_n)>0$.

En el caso de la función $z=f\ (x,\ y)$, cuando la ecuación de enlace $\varphi(x,\ y)=0$, la función de Lagrange tiene la forma

$$L\ (x,\ y,\ \lambda)=f\ (x,\ y)+\lambda\cdot\varphi\ (x,\ y).$$

El sistema (4) se compone de tres ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial y}=0,\quad \varphi\ (x,\ y)=0.$$

Sea $P_0\ (x_0,\ y_0),\ \lambda_0$ cualquiera de las soluciones de este sistema y sea

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(P_0) & \varphi'_y(P_0) \\ \varphi'_x(P_0) & L''_{xx}(P_0,\ \lambda_0) & L''_{xy}(P_0,\ \lambda_0) \\ \varphi'_y(P_0) & L''_{xy}(P_0,\ \lambda_0) & L''_{yy}(P_0,\ \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Si $\Delta<0$, entonces la función $z=f\ (x,\ y)$ tiene en el punto $P_0\ (x_0,\ y_0)$ un máximo condicionado; si $\Delta>0$, se tiene en el mismo punto un mínimo condicionado.

EJEMPLO 4. Hállese el extremo condicionado de la función $z = x + 2y$, si $x^2 + y^2 = 5$.

◀ Formemos la función de Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Tenemos $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y$.

El sistema de ecuaciones (4) adquiere la forma

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x &= 0, \\ 2 + 2\lambda y &= 0, \\ x^2 + y^2 &= 5. \end{aligned}$$

El sistema tiene dos soluciones: $x_1 = -1$, $y_1 = -2$, $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$, $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$. Puesto que $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2$, entonces

$$d^2L = 2\lambda\,(dx^2 + dy^2).$$

Cuando $\lambda = \dfrac{1}{2}$, $d^2L > 0$. Por ello la función tiene un mínimo condicionado en el punto $P_1(-1, -2)$ y $z_{\text{mín}} = -5$. Cuando $\lambda = -\dfrac{1}{2}$, $d^2L < 0$. Por ello la función tiene un máximo condicionado en el punto $P_2(1, 2)$ y $z_{\text{máx}} = 5$.

O bien, de otra forma

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 5,$$

$$\varphi'_x = 2x, \quad \varphi'_y = 2y, \quad \varphi'_x(-1, -2) = -2, \quad \varphi'_y(-1, -2) = -4,$$

$$L''_{xx} = 1, \quad L''_{xy} = 0, \quad L''_{yy} = 1 \quad \text{para} \quad \lambda = \frac{1}{2};$$

por consiguiente,

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 > 0,$$

es decir, la función tiene un mínimo condicionado en el punto $P_1(-1, -2)$. Por analogía, para el punto $P_2(1, 2)$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -20 < 0.$$

es decir, $P_2(1, 2)$ es el punto de máximo condicionado. ▶

Hállense los extremos condicionados de las funciones:

3.25. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ para $x + y + 3 = 0$.

3.26. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ para $x + y = 2$.

3.27. $z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ para $x^2 + y^2 = 1$.

3.28. $z = xy^2$ para $x + 2y = 1$.

3.29. $z = 2x + y$ para $x^2 + y^2 = 1$.

3.30. $u = 2x + y - 2z$ para $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

3.31. $u = x^2 + y^2 + z^2$ para $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

3.32. $u = xy^2z^3$ para $x + 2y + 3z = 12$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

3.33. $u = xyz$ para $x + y + z = 4$, $xy + yz + zx = 5$.

3.34*. Demuéstrese la desigualdad

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} > \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3,$$

si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

4. Valores máximo y mínimo de una función. Si una función $f(P)$ es derivable en una región acotada y cerrada, entonces alcanza su valor máximo (mínimo) bien en el punto estacionario o bien en un punto de frontera de la región.

EJEMPLO 5. Hállense los valores máximo y mínimo de la función $z = x^3 + y^3 - 3xy$ en la región

$$0 \leqslant x \leqslant 2, \qquad -1 \leqslant y \leqslant 2.$$

◀ La región dada es un rectángulo.

1) Hallemos los puntos estacionarios (véase el ejemplo 3): $P_1(0, 0)$ y $P_2(1, 1)$. Los valores de la función en estos puntos: $z_1 = 0$, $z_2 = -1$.

2) Analicemos la función en las fronteras de la región.

a) Cuando $x = 0$, se tiene $z = y^3$. Esta función es monótona creciente y en los extremos del segmento $[-1, 2]$ toma los valores: $z|_{y=-1} = -1$, $z|_{y=2} = 8$.

b) Cuando $x = 2$, se tiene $z = 8 + y^3 - 6y$. Hallemos los valores de esta función en el punto estacionario y en los extremos del segmento $[-1, 2]$. Tenemos: $z' = 3y^2 - 6$; $z' = 0$ para $y^2 = 2$, o bien, en la región dada, para $y = \sqrt{2}$; $z|_{y=\sqrt{2}} = 8 + 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}$; $z|_{y=-1} = 13$; $z|_{y=2} = 4$.

c) Cuando $y = -1$, se tiene $z = x^3 - 1 + 3x$ y $z' = 3x^2 + 3 > 0$. La función es monótona creciente de $z|_{x=0} = -1$ hasta $z|_{x=2} = 13$.

d) Cuando $y = 2$ se tiene $z = x^3 + 8 - 6x$; $z' = 3x^2 - 6$; $z' = 0$ para $x = \sqrt{2}$; $z|_{x=\sqrt{2}} = 8 - 4\sqrt{2}$; $z|_{x=0} = 8$, $z|_{x=2} = 6$.

3) Al comparar todos los valores encontrados de la función concluimos que $z_{\text{máx}} = 13$ en el punto $(2, -1)$; $z_{\text{mín}} = 1$ en los puntos $(1, 1)$ y $(0, -1)$. ▶

EJEMPLO 6. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de un baño rectangular abierto, de capacidad V dada, para que su área de superficie sea la menor posible? Hállese este área.

◀ El baño tiene forma de un paralelepípedo rectangular. Sean x, y, z sus dimensiones. Dado que el volumen $V = xyz$ está prefijado, se tiene $z = \frac{V}{xy}$. El área de la superficie del baño es igual a

$$S = S(x, y) = 2(xz + yz) + xy = 2(x + y)\frac{V}{xy} + xy =$$
$$= 2V\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) + xy.$$

El problema se reduce a la búsqueda del mínimo de la función $S(x, y)$, siendo, de acuerdo con el sentido del problema, $x > 0$, $y > 0$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$S'_x(x, y) = -\frac{2V}{x^2} + y = 0,$$
$$S'_y(x, y) = -\frac{2V}{y^2} + x = 0,$$

hallamos el punto estacionario $x_0 = y_0 = \sqrt[3]{2V}$. Comprobemos el cumplimiento de las condiciones suficientes del mínimo:

$$S''_{xx}(x, y) = \frac{4V}{x^3}, \quad S''_{xy}(x, y) = 1, \quad S''_{yy}(x, y) = \frac{4V}{y^3}.$$

Por consiguiente,

$$A = S''_{xx}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 2, \quad B = S''_{xy}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 1,$$
$$C = S''_{yy}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 2, \quad D = AC - B^2 = 4 - 1 > 0, \quad A > 0.$$

Así pues, la función $S(x, y)$ tiene mínimo para $x = y = \sqrt[3]{2V}$; y por tanto, $z = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$;

$$S_{\text{mín}} = 2V\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2V}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2V}}\right) + \sqrt[3]{4V^2} = 3\sqrt[3]{4V^2}. \ ▶$$

3.35. Hállese el valor máximo de la función $z = x - 2y + 5$ en las regiones:

a) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$;

b) $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y - x \leqslant 1$.

3.36. Hállense los valores máximo y mínimo de la función $z = x^2 + y^2 - xy - x$ en la región $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 3$.

3.37. Hállense los valores máximo y mínimo de la función $z = xy$ en la región $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

3.38. Hállense los valores máximo y mínimo de la función $z = xy^2$ en la región $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

3.39. Represéntese el número positivo a en forma de un producto de cuatro factores positivos de una manera tal que la suma de sus magnitudes inversas sea mínima.

3.40. Hállese un paralelepípedo de volumen máximo entre todos los paralelepípedos rectangulares que tienen una suma dada de longitudes de las aristas igual a $12a$.

3.41. Hállese un paralelepípedo rectangular que tenga un volumen máximo, si la longitud de la diagonal del paralelepípedo es d.

3.42. Hállese tal punto dentro de un cuadrilátero, para el cual la suma de los cuadrados de las distancias entre dicho punto y los vértices sea mínima.

3.43. Un paralelepípedo rectangular que tenga el mayor volumen posible inscríbase en una semiesfera de radio R.

3.44. Un paralelepípedo rectangular que tenga un volumen máximo inscríbase en un cono circular recto cuyo radio de la base es R y la altura H.

3.45. Hállese un triángulo de área máxima entre todos los triángulos que tienen la base a y el ángulo α en el vértice.

3.46*. En la elipse $x^2 + 9y^2 = 9$ hállense los puntos más y menos alejados de la recta $4x + 9y = 16$.

3.47*. En la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ están dados dos puntos $A\,(-\sqrt{3},\ 0{,}5)$ y $B\,(1,\ \sqrt{3}/2)$. Hállese en la misma elipse tal punto C que el triángulo ABC tenga un área máxima.

3.48. Determínense las dimensiones exteriores de un cajón cerrado, que tiene un espesor dado de las paredes δ y un volumen (interior) V, de modo tal que la cantidad del material que se gasta para su fabricación sea mínima.

3.49. En un plano están dados n puntos materiales $P_1\,(x_1,\ y_1)$, $P_2\,(x_2,\ y_2)$, . . ., $P_n\,(x_n,\ y_n)$ cuyas masas son m_1, m_2, . . ., m_n, respectivamente. ¿Cuál es la posición del punto $P\,(x,\ y)$, para la cual el momento de inercia del sistema respecto del punto P sea el mínimo?

3.50*. Los puntos A y B están situados en diferentes medios ópticos, separados uno del otro por el plano A_1B_1 (fig. 69). La velocidad de propagación de la luz en el primer medio es v_1, y en el segundo, v_2. Aplicando el principio de Fermat, según el cual el rayo luminoso se propaga a lo largo de aquella línea AMB, para cuyo recorrido se requiere el mínimo de tiempo, dedúzcase la ley de refracción del rayo luminoso.

3.51. Aplicando el principio de Fermat, dedúzcase la ley de la reflexión del rayo luminoso de un plano en un medio homogéneo (fig. 70).

3.52*. Si por un circuito eléctrico de resistencia R pasa una corriente I, la cantidad de calor que se desprende en una unidad de tiempo es proporcional a I^2R. Determínese

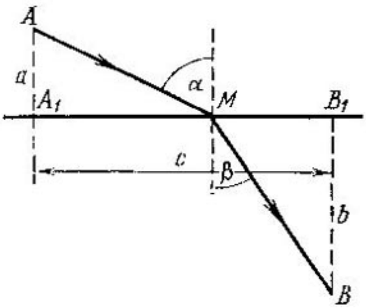


Fig. 69

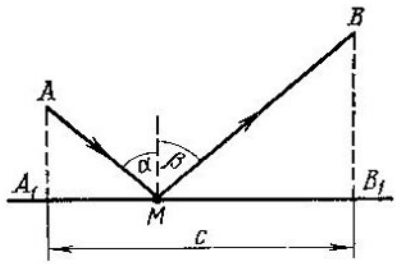


Fig. 70

¿cómo se debe ramificar la corriente I en las corrientes $I_1, I_2, \ldots, I_n$ con ayuda de n conductores cuyas resistencias son $R_1, R_2, \ldots, R_n$, para que el desprendimiento de calor sea mínimo?

5. Aplicaciones geométricas de las derivadas parciales. Se llama *plano tangente* a una superficie en el punto M_0 de ésta (*punto de tangencia*) un plano, que contiene en sí todas las tangentes a las curvas trazadas en la superficie por el punto mencionado.

Se denomina *normal* a la superficie una recta perpendicular al plano tangente y que pasa por el punto de tangencia.

Si la ecuación de la superficie tiene la forma

$$F(x, y, z) = 0,$$

la ecuación del plano tangente en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ es

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + \\ + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0. \qquad (5)$$

Las ecuaciones de la normal es:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)}. \tag{6}$$

En el caso de que una superficie sea dada en la forma explícita

$$z=f(x,\ y),$$

la ecuación del plano tangente en el punto $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ tiene por expresión

$$z-z_0=f'_x(x_0,\ y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,\ y_0)(y-y_0),$$

mientras que la ecuación de la normal será

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,\ y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,\ x_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

EJEMPLO 7. Hállense las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie

$$x^2-2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$$

en el punto $M(1,\ 2,\ 3)$.

◀ Designando mediante $F(x,\ y,\ z)$ el primer miembro de la ecuación de la superficie, hallemos las derivadas parciales y sus valores en el punto M:

$$F'_x(x,\ y,\ z)=2x+y-2z, \qquad F'_x(1,\ 2,\ 3)=-2;$$
$$F'_y(x,\ y,\ z)=-4y+x+z, \qquad F'_y(1,\ 2,\ 3)=12;$$
$$F'_z(x,\ y,\ z)=-6z+y-2x, \qquad F'_z(1,\ 2,\ 3)=-18.$$

Según las fórmulas (5) y (6) tenemos

$$-2(x-1)+12(y-2)-18(z-3)=0, \quad \text{ó}$$
$$x-6y+9z-16=0$$

lo que representa la ecuación del plano tangente,

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-3}{-18}, \qquad \text{ó} \qquad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z-3}{9}$$

es la ecuación de la normal. ▶

Se llama *punto singular* de una curva plana $f(x,\ y)=0$ el punto $M(x_0,\ y_0)$ cuyas coordenadas satisfacen el sistema de tres ecuaciones

$$f(x_0,\ y_0)=0, \quad f'_x(x_0,\ y_0)=0, \quad f'_y(x_0,\ y_0)=0. \tag{7}$$

Supongamos que las condiciones (7) quedan cumplidas, los números

$$A=f''_{xx}(x_0,\ y_0), \quad B=f''_{xy}(x_0,\ y_0), \quad C=f''_{yy}(x_0,\ y_0)$$

no todos son iguales a cero y $\Delta=AC-B^2$. En este caso:

a) si $\Delta > 0$, M será un *punto aislado* (fig. 71).
b) si $\Delta < 0$, M será un *nudo* (*punto doble*) (fig. 72).
c) si $\Delta = 0$, M será o bien un *punto de retroceso de primera especie* (fig. 73) o *de segundo especie* (fig. 74), o bien un *punto aislado o de autoadherencia* (fig. 75).

El coeficiente angular $k = y'$ de la tangente a la curva en un punto singular se halla a partir de la ecuación

$$A + 2Bk + Ck^2 = 0.$$

En el caso de un punto aislado no hay tangente, en un nudo hay dos tangentes diferentes; en un punto de retroceso y en un punto de autoadherencia hay una tangente común a las dos ramas de la curva.

Fig. 71

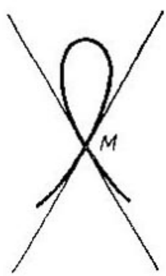


Fig. 72

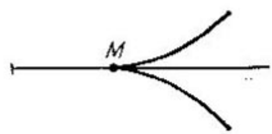


Fig. 72

Fig. 74

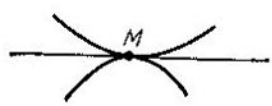


Fig. 75

Si $\Delta = 0$, para resolver la cuestión sobre el tipo de punto singular se debe estudiar la disposición de los puntos de la curva en cierto entorno del punto singular.

En el caso de una curva transcendente pueden haber también otros tipos de puntos singulares: *puntos angulosos*, *puntos terminales*, etc.

EJEMPLO 8. Analícense los puntos singulares de la concoide

$$(x^2+y^2)(x-a)^2-b^2x^2=0 \qquad (a>0,\ b>0).$$

◀ Designando el primer miembro de la ecuación mediante $f(x, y)$, hallemos las derivadas parciales y las igualamos a cero:

$$f'_x(x, y) = 2x(x-a)^2+2(x-a)(x^2+y^2)-2b^2x=0,$$
$$f'_y(x, y) = 2y(x-a)^2=0.$$

El sistema de ecuaciones tiene una única solución $x_0 = y_0 = 0$, es decir, la curva tiene un punto singular $O(0, 0)$.

Hallemos las segundas derivadas:

$$f''_{xx}(x, y) = 2\left((x-a)^2 + 2x(x-a) + x^2 + y^2 + 2x(x-a) - b^2\right),$$

$$f''_{xy}(x, y) = 4y(x-a),$$

$$f''_{yy}(x, y) = 2(x-a)^2.$$

Calculando sus valores en el punto O, obtenemos $A = 2(a^2-b^2)$, $B = 0$, $C = 2a^2$, $\Delta = AC - B^2 = 4a^2(a^2-b^2)$.

Si $a > b$, entonces $\Delta > 0$ y el punto O está aislado (fig. 76). Si $a < b$, entonces $\Delta < 0$ y el punto O es un nudo (fig. 77). Si $a = b$,

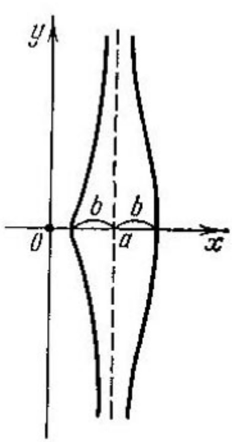


Fig. 76

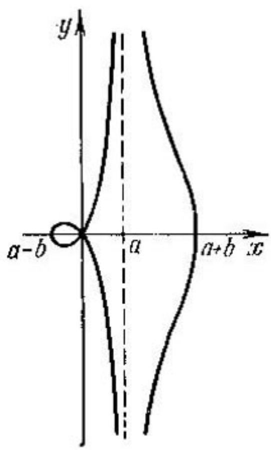


Fig. 77

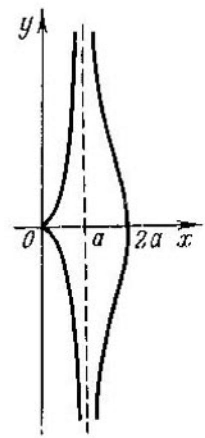


Fig. 78

entonces $\Delta = 0$. Hallemos el coeficiente angular de la tangente:

$$2(a^2-b^2) + 2a^2k^2 = 0, \qquad k = \frac{b^2-a^2}{a^2} = 0,$$

es decir, la tangente coincide con el eje Ox.

De la ecuación de la curva obtenemos (para $a = b$) $y = \pm \frac{x}{x-a}\sqrt{2ax - x^2}$, y, por ende, la curva es simétrica respecto del eje Ox $(0 \leqslant x < a;\ a < x \leqslant 2a)$. Por esta razón, cuando $a = b$, O será un punto de retroceso de primera especie (fig. 78). ▶

Se denomina *envolvente de una familia de curvas planas* la línea (o conjunto de varias líneas) que toca todas las curvas de la familia dada, siendo cada punto de ella un punto de tangencia.

Si una familia de curvas de un solo parámetro $f(x, y, \alpha) = 0$ tiene una envolvente, la ecuación de esta última puede obtenerse a partir del sistema de ecuaciones

$$f(x,\ y,\ \alpha)=0, \qquad f'_{\alpha}(x,\ y,\ \alpha)=0. \tag{8}$$

Eliminando del sistema (8) el parámetro α, obtendremos la ecuación de la forma $D(x,\ y)=0$. La curva que se determina por esta ecuación lleva el nombre de *curva discriminante*. Una curva discriminante se compone de una envolvente y de un conjunto de puntos singulares de la familia dada.

EJEMPLO 9. La ecuación de la trayectoria del movimiento de un proyectil lanzado desde el punto O con una velocidad inicial v_0 formando el ángulo α con relación al horizonte (sin tomar en consideración la resistencia de aire) es

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{3v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Considerando α como parámetro, hállese la envolvente de todas las trayectorias del proyectil dispuestas en un mismo plano vertical.

◀ Tenemos

$$f(x,\ y,\ \alpha)=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}-y,$$

$$f'_{\alpha}(x,\ y,\ \alpha)=\frac{x}{\cos^2\alpha}-\frac{gx^2\operatorname{sen}\alpha}{v_0^2\cos^3\alpha}=\frac{x}{\cos^2\alpha}\left(1-\frac{gx}{v_0^2}\operatorname{tg}\alpha\right).$$

Formemos un sistema del tipo (8)

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}, \qquad \frac{x}{\cos^2\alpha}\left(1-\frac{gx}{v_0^2}\operatorname{tg}\alpha\right)=0.$$

De la segunda ecuación obtenemos: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{v_0^2}{gx}$ y $\cos^2\alpha=$ $=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{g^2x^2}{g^2x^2+v_0^4}$. Sustituyendo en la primera ecuación, hallamos la ecuación de la envolvente (*parábola de seguridad*):

$$y=\frac{v_0^2}{g}-\frac{g^2x^2+v_0^4}{2v_0^2g}, \quad \text{o bien } y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}. \ ►$$

3.53. Hállense las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las siguientes superficies en los puntos que se indican:

a) $z=\operatorname{sen}x\cos y$ en el punto $(\pi/4,\ \pi/4,\ 1/2)$;

b) $z=e^{x\cos y}$ en el punto $(1,\ \pi,\ 1/e)$.

3.54. Hállese la distancia entre el origen de coordenadas y el plano tangente a la superficie $z=y\operatorname{tg}\dfrac{x}{a}$ en el punto $\left(\dfrac{\pi a}{4},\ a,\ a\right)$.

3.55. Hállense los ángulos formados por la normal a la superficie $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ en el punto $\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$ con los ejes de coordenadas.

3.56. Para la superficie $z = 4x - xy + y^2$ hállese la ecuación del plano tangente p ralelo al plano $4x + y + 2z + 9 = 0$.

3.57. Hállense las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las siguientes superficies en los puntos indicados:

a) $x(y+z)(xy-z)+8=0$ en el punto $(2, 1, 3)$;

b) $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$ en el punto $(2, 2, 1)$;

c) $z^2 + 4z + x^2 = 0$ en los puntos de intersección con el eje Oz.

3.58. Para la superficie $x^2 - z^2 - 2x + 6y = 4$ hállese la ecuación de la normal paralela a la recta $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}$.

3.59. Hállense en la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ los puntos, donde los planos tangentes son paralelos a los ejes de coordenadas.

3.60. Muéstrese que los planos tangentes a la superficie $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ cortan en los ejes de coordenadas los segmento cuya suma de los cuadrados es constante e igual a a^2.

3.61. Hállense las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las siguientes superficies, dadas paramétricamente, en los puntos que se indican:

a) $x = r \cos \varphi$, $y = r \operatorname{sen} \varphi$, $z = r \operatorname{ctg} \alpha$ en el punto (r_0, φ_0);

b) $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$ en el punto (u_0, v_0).

3.62*. ¿Cuál es el ángulo que forman al intersecarse el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el parabaloide hiperbólico $bz = xy$ en el punto común (x_0, y_0, z_0)?

3.63*. Muéstrese que las superficies siguientes son ortogonales dos a dos:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2by$;

b) $xyz = a^3$ y $2z^2 = x^2 + y^2 + f(x^2 - y^2)$;

c) $xy = az^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b$ y $z^2 + 2x^2 = c(z^2 + 2y^2)$.

4. Analícense los puntos singulares de las curvas:

3.64. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

3.65. $y^2(a^2 + x^2) = x^2(a^2 - x^2)$. **3.66.** $x^3 + y^2 = x^6$.

3.67. $y^2 = (x-1)^3$. 3.68. $(y-2x^2)^2 = x^5$.
3.69. $4y^2 = x^5 + 5x^4$. 3.70. $y^2 = ax^2 + x^3$.
3.71. $y^2 = 1 - e^{-x^2}$. 3.72. $y^2 = 1 - e^{-x^3}$.

3.73*. $y = \frac{x}{1+e^{1/x}}$. 3.74*. $y = x^x$.

3.75. Hállese la envolvente de la familia de las rectas $y = ax + a^2$.

3.76. Hállese la envolvente de la familia de las rectas $x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha = p$ $(p = \text{const}, p > 0)$.

3.77. Hállese la envolvente de la familia de las circunferencias $x^2 + (y-C)^2 = R^2$ $(R = \text{const})$.

3.78. Hállese la envolvente de la familia de las parábolas $y^2 = 2px + p^2$.

3.79. Hállese la envolvente de la familia de las parábolas $y = 3a^2 + 2ax - x^2$.

3.80. Hállese la envolvente de la familia de las elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(l-a)^2} = 1$ $(l - \text{const})$.

3.81. Hállese la envolvente de la familia de circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y tienen su centro dispuesto en la parábola $y^2 = 4ax$.

3.82. Analícese el carácter de las curvas discriminantes de la familia de las líneas siguientes (C es un parámetro variable)

a) parábolas cúbicas $y - 1 = (x - C)^3$;
b) parábolas semicúbicas $(y - C)^2 = (x - C)^3$;
c) parábolas de Neil $(y - 1)^3 = (x - C)^2$;
d) estrofoide $(a - x)(y - C)^2 = x^2(a + x)$.

§ 4. Números aproximados y operaciones con ellos

1. Errores absoluto y relativo. Supongamos que el número a es una *aproximación* del número A. Por ejemplo, $A = \sqrt{3}$ y $a = 1{,}7$. Cuando $a > A$, el número a se llama *aproximación por exceso*; cuando $a < A$, *aproximación por defecto*. Así, el número 1,73 es una aproximación de $\sqrt{3}$ por defecto, y el número 1,74, aproximación por exceso. El *error absoluto* de la aproximación (del número aproximado) a se determina por la igualdad

$$\Delta = |a - A|.$$

Por cuanto el número exacto A es en muchos casos desconocido, tampoco se sabe el error absoluto Δ; no obstante puede ser indicada la cota superior del error absoluto. La menor de las cotas superiores Δ_x del error absoluto lleva el nombre de *error absoluto límite*. En los cálculos prácticos como error absoluto límite Δ_a se toma con frecuencia una de las cotas superiores. Tiene lugar la inclusión

$$A \in [a - \Delta_a,\ a + \Delta_a],$$

la cual se anota habitualmente en la forma $A = a \pm \Delta_a$. Por ejemplo, $\sqrt{3} = 1{,}7321 \pm 0{,}0001$.

El *error relativo* del número a se determina por la igualdad

$$\delta = \frac{\Delta}{a}.$$

De un modo análogo se determina también el *error relativo límite*

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{a}.$$

Por ejemplo, para $A = \sqrt{3}$ y $a = 1{,}7321$

$$\delta_a = \frac{0{,}0001}{1{,}7321} = 0{,}00006.$$

En la notación decimal de un número se llama *cifra significativa* o signo cualquier cifra distinta de cero. El cero se considera cifra significativa sólo en el caso cuando se dispone entre las cifras significativas o está más a la derecha de todas las cifras significativas.

Se denomina *redondeo* de un número la sustitución del mismo por otro número que tenga menos cifras significativas. Al redondear se observan las siguientes reglas:

1) si la primera de las cifras desechadas es inferior a 5, los signos que se conservan se dejan sin cambios;

2) si la primera de las cifras desechadas es superior a 5, el último de los signos que se conservan se aumentan en 1;

3) si la primera de las cifras desechadas es igual a 5, mientras que entre las cifras que la siguen hay algunas distintas de cero, el último de los signos que se conservan se aumentan en 1;

4) si la primera de las cifras desechadas es igual a 5, mientras que todas las cifras que la siguen son ceros, el último de los signos decimales que se conservan se aumentan en 1 cuando es impar y se deja invariable, cuando es par.

Si el error absoluto de un número aproximado a no sobrepasa la unidad del orden expresado por la n-ésima cifra significativa en la notación decimal de este número, entonces a se llama *número poseedor de n signos justos en el sentido amplio*. En cambio, si el error absoluto no es superior a la mitad de la unidad del orden mencionado más arriba, entonces el número aproximado a lleva el nombre de *número que tiene n signos justos en el sentido estrecho*. En tal caso para el error relativo límite δ_a se verifican las desigualdades

$$\delta_a \frac{1}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \quad \text{y} \quad \delta_a \leqslant \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

en el primer y segundo casos, respectivamente; en ambas desigualdades k significa la primera cifra significativa del número a. Viceversa, si el error relativo límite satisface la desigualdad

$$\delta_a \leqslant \frac{1}{2(k+1)} \cdot \frac{1}{10^{n-1}},$$

el número aproximado correspondiente a, cuya primera cifra significativa es k, tiene n signos justos en el sentido estrecho.

4.1. Hállense los errores absoluto y relativo de los siguientes números aproximados obtenidos durante las mediciones de:

a) 23,015 kg; b) 84,5 cm; c) 25°15′.

4.2. Al medir la longitud de un trayecto se ha obtenido el resultado 25,2 km con exactitud de hasta 2 m, y al medir un área (levantamiento fotográfico aéreo) se ha obtenido el resultado 1500 m² con exactitud de hasta 30 m². Calcúlense los errores absoluto límite y relativo límite de ambos resultados.

4.3. Al medir la longitud de un tramo de camino de longitud 10 km se ha cometido un error igual a 10 m, y al medir el diámetro de una tuerca de 4 cm de diámetro se ha cometido un error igual a 1 mm. ¿Cuál de estas dos mediciones será más exacta?

4.4. ¿Cuáles son los errores absoluto límite y relativo límite de los números aproximados obtenidos al redondear

a) 36,1; b) 0,08?

4.5. Redondéense los números 29,15 y 3,25 hasta el primer signo decimal tras la coma.

4.6. Redondéense el número 5,3726 hasta las milésimas, hasta las centésimas y hasta las décimas partes. Hállense los errores absoluto y relativo de cada uno de los redondeos citados.

4.7. Redondéense hasta las tres cifras significativas los siguientes números: 0,02025, 1876672, 599983.

4.8. Determínese el número de signos justos en el sentido estrecho y dése la notación correspondiente de los siguientes números aproximados:

a) 413287,51 con una exactitud del 1%; b) 0,0794 con una exactitud del 2%.

4.9. ¿Cuántos signos debe tener el número $\sqrt{21}$ para que el error relativo límite no sobrepase el 1%?

4.10. ¿Cuántos signos deben tener los números ln 40 y arctg 2, para que su error relativo límite no sobrepase el 0,1%?

2. Operaciones con números aproximados. Sea $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función derivable en la región que se considera. Entonces el error absoluto límite Δ_u del valor de la función se determina por la correlación

$$\Delta_u = \sum_{h=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_h} \right| \Delta_{x_h}, \tag{1}$$

donde Δ_{x_h} son errores absolutos límites de los valores de los argumentos correspondientes. Para el error relativo límite tiene lugar la igualdad

$$\delta_u = \sum_{h=1}^{n} \left| \frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial x_h} \right| \Delta_{x_h}. \tag{2}$$

EJEMPLO 1. Hállense los errores absoluto límite y relativo límite del volumen de un cono de radio r y altura h, si $r = 15 \pm 0{,}02$ cm, $h = 19{,}1 \pm 0{,}05$ cm y $\pi = 3{,}14$.

◀ Tenemos $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 4498{,}1$ cm³. Teniendo presente que $r = 15$, $h = 19{,}1$, $\pi = 3{,}14$, $\Delta_r = 0{,}02$, $\Delta_h = 0{,}05$ y $\Delta_\pi = 0{,}0016$, hallemos $\frac{\partial v}{\partial \pi} = \frac{1}{3} r^2 h = 1432{,}5$, $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{2}{3}\pi r h = 599{,}74$ y $\frac{\partial v}{\partial h} = \frac{1}{3}\pi r^2 = 235{,}5$. Aplicando la fórmula (1), obtenemos el error absoluto límite

$$\Delta_v = \left| \frac{\partial v}{\partial \pi} \right| \Delta_\pi + \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right| \Delta_r + \left| \frac{\partial v}{\partial h} \right| \Delta_h = 26{,}06 \text{ cm}^3.$$

El error relativo límite puede determinarse a partir de la igualdad

$$\delta_v = \frac{26{,}1}{4498} = 0{,}006.$$

De este modo, $v = 4498 \pm 26{,}1$ cm³. ▶

Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

4.11*. El error absoluto límite de una suma es igual a la suma de los errores absolutos límite de los sumandos.

4.12*. El error relativo límite de un producto es igual a la suma de los errores relativos límite de los factores.

4.13*. El error relativo límite de la n-ésima potencia es n veces mayor que el error relativo límite de la base.

4.14*. El error relativo límite de un cociente es igual a la suma de errores relativos límite del dividendo y del divisor.

4.15*. El error absoluto límite Δ_{uv} de un producto uv satisface la correlación $\Delta_{uv} = \Delta_u v + \Delta_v u$.

Realícense las operaciones indicadas sobre los números aproximados en los cuales todos los signos decimales son justos en el sentido estrecho:

4.16. $130,6 + 0,255 + 1,15224 + 41,84 + 11,8216$.

4.17. $17,83 + 1,07 + 1,1\cdot 10^2$. **4.18.** $153,21 - 81,329$.

4.19. $64,32 - 61,31$. **4.20.** $35,2\cdot 1,748$.

4.21. $65,3\cdot 78,5$. **4.22.** $7,6 : 2,314$.

4.23. $170 : 5$. **4.24.** $40,5^3$.

4.25. $\sqrt{54,71}$.

4.26. Al medir el radio de un círculo con una exactitud de hasta 0,5 cm se ha obtenido el número 12 cm. Hállense los errores absoluto y relativo del área del círculo.

4.27. Determínese el error absoluto del logaritmo decimal de un número aproximado x calculado con un error relativo δ.

4.28. ¿Con qué error absoluto límite se deben medir los lados de un rectángulo $a \approx 4$ m y $b \approx 5$ m, para que su área S pueda calcularse con una exactitud de hasta 0,1 m²?

◀ Tenemos: $S = ab$ y $\Delta S = 0,1$. Suponiendo iguales los sumandos en la fórmula (1), obtenemos

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\Delta x_i = \frac{\Delta_u}{n}, \text{ de donde } \Delta x_i = \frac{\Delta_u}{n\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|}$$

(*principio de igual efecto*). Por ello, calculando las derivadas parciales $\frac{\partial S}{\partial a} = b = 5$ y $\frac{\partial S}{\partial b} = a = 4$, hallamos que

$$\Delta_a = \frac{0,1}{2\cdot 5} = 0,01, \qquad \Delta_b = \frac{0,1}{2\cdot 4} = 0,0125.$$

Repartiendo el número 0,1 en la fórmula para Δ_S entre dos sumandos en partes no iguales, sino de algún otro modo, obtendremos otros valores para Δ_a y Δ_b, que aseguran, no obstante, el mismo error absoluto. ▶

4.29. ¿Con qué error absoluto se debe medir el lado x de un cuadrado para determinar el área de este cuadrado con una exactitud de hasta 0,001 m², si 2 m $< x <$ 3 m?

4.30. Calcúlese la densidad de aluminio, si un cilindro de aluminio de 2 cm de diámetro y 11 cm de altura tiene una masa igual a 93,4 g. El error relativo de medición de las longitudes es igual a 0,01, y el error relativo de determinación de las masas es igual a 0,001.

4.31. ¿Con qué exactitud debe determinarse el radio de la base R y la altura H de una lata cilíndrica para que su capacidad pueda ser calculada con una exactitud de hasta el 1%?

4.32. ¿Con qué exactitud se debe tomar el valor aproximado del ángulo $x \approx 25°$ para determinar el valor del sen x con cuatro signos juntos en el sentido estrecho?

4.33. ¿Con qué número de signos justos en el amplio sentido debe tomarse el valor del argumento $x \approx 2$ para obtener el valor de la función $y = e^x$ con una exactitud de hasta 0,001?

4.34. ¿Con qué número de signos justos debe conocerse el término independiente de la ecuación $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$ para obtener las raíces de esta ecuación con cuatro signos justos en el sentido estrecho?

4.35. Se pide medir con una exactitud de hasta el 1% el área de la superficie lateral de un cono truncado cuyos radios de las bases son ≈ 2 m y ≈ 1 m, mientras que la generatriz es igual aproximadamente a 5 m. ¿Con qué exactitud se deben medir con este fin los radios y la generatriz y cuantos signos debe tener el número π?

RESPUESTAS

1.1. $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+p-l)}$; $0 < x < p$, $0 < y < p$, $x + y > p$. **1.2.** $V = \dfrac{S^2}{3\pi^2 l^3}\sqrt{\pi^2 l^4 - S^2}$; $0 < S < \pi l^2$. **1.3.** $S = \dfrac{x+y}{4}\sqrt{4z^2-(x-y)^2}$; $z > \dfrac{x-y}{2}$. **1.4.** $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. **1.5.** $x^2 + y^2 \geqslant R^2$. **1.6.** $x^2 + y^2 < R^2$. **1.7.** $x^2 + y^2 > R^2$. **1.8.** $x > y$. **1.9.** $-1 \leqslant x^2 + y \leqslant 1$. **1.10.** $x + y < 0$. **1.11.** $x \leqslant x^2 + y^2 < 2x$. **1.12.** Las franjas $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ (k es un número entero). **1.13.** $0 < x^2 + y^2 \leqslant 1$ para $0 < a < 1$, $x^2 + y^2 \geqslant 1$ para $a > 1$. **1.14.** Dos ángulos obtusos opuestos por el vértice y formados por las rectas $y = 0$ e $y = -2x$, incluyendo la frontera sin el vértice común (0, 0). **1.15.** $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9$. **1.16.** El triángulo curvilíneo formado por la recta $y = 2$ y las parábolas $y^2 = \pm x$, excluyendo el vértice (0, 0). **1.17.** $0 \leqslant \varphi < \pi$. **1.18.** La parte de un plano comprendida entre los rayos $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$ y $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ y $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$. **1.19.** $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant R^2$. **1.20.** $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant z^2$, $z \neq 0$. **1.21.** $x^2 + y^2 - z^2 < 1$. **1.22.** El cubo n-dimensional $-1 \leqslant x_k \leqslant 1$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). **1.23.** El elipsoide n-dimensional $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{a_n^2}\leqslant 1$. **1.24.** $f(2,\ 1)=1/4$; $f(1,\ 2)=4$; $f(3,\ 2)=0$; $f(2,\ 3)=\infty$; $f(a,\ a)=-1$; $f(a,\ -a)=1$. **1.25.** $f(-3,\ 4)=-24/25$; $f(1,\ y/x)=f(x,\ y)$. **1.26.** $\sqrt{1+x^2}$. **1.27.** $f(x)=x^2-x$; $z=2y+(x-y)^2$. **1.28.** $\frac{x^2(1-y)}{1+y}$. ◀ Designemos $u=x+y$, $v=\frac{y}{x}$. Entonces, $x=\frac{u}{1+v}$, $y=\frac{uv}{1+v}$, $f(u,\ v)=\frac{u^2}{(1+v)^2}-\frac{u^2v^2}{(1+v)^2}=\frac{u^2(1-v)}{1+v}$. Resta dar el nombre x e y a las variables u y v. ▶ **1.29.** a) $x^4-2x^2y^2+2y^4$; b) $4x^2y^2$. **1.31.** a) $\cos 2x$; b) $\cos(x^2-y^2)$. **1.32.** -6. **1.33.** 1. **1.34.** 0. **1.35.** e. **1.36.** 1. **1.37.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z=\frac{1}{k-1}$ a lo largo de la recta $y=kx$; $\lim z=3$ para $k=4/3$; $\lim z=2$ para $k=3/2$; $\lim z=1$ para $k=2$; $\lim z=-2$ para $k=1/2$. **1.40.** No lo tiene. **1.41.** No lo tiene. **1.42.** ● Analícese la variación de x o y en la parábola $y=x^2$. **1.44.** (1, −1). **1.45.** $(m,\ n)$, donde $m,\ n\in\mathbb{Z}$. **1.46.** Las líneas de discontinuidad son las rectas $x=k\pi$ e $y=m\pi$, donde $k,\ m\in\mathbb{Z}$. **1.47.** La línea de discontinuidad es la circunferencia $x^2+y^2=1$. **1.48.** Las líneas de discontinuidad son la recta $x+y=0$ y la parábola $y^2=x$. **1.49.** Las líneas de discontinuidad son una circunferencia $x^2+y^2=1$ y una hipérbola $x^2-y^2=1$. **1.50.** Las superficies de discontinuidad son los planos coordenados $x=0$, $y=0$, $z=0$. **1.51.** La superficie de discontinuidad es un elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. **1.52.** La superficie de discontinuidad es el cono $x^2+y^2-z^2=0$. **1.53.** La superficie de dicontinuidad es el hiperboloide de una hoja $x^2+y^2-z^2=1$. **1.54.** La superficie de discontinuidad es el hiperboloide de dos hojas $x^2+y^2-z^2=-1$. **1.55.** $\frac{\partial z}{\partial x}=5x^4-15x^2y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=5y^4-15x^3y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=20x^3-30xy^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-45x^2y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=20y^3-30x^3y$. **1.56.** $\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x+\frac{1}{x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=1-\frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **1.57.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{3xy^3}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{5/2}}$. **1.58.** $\frac{\partial z}{\partial x}=(1-xy)\,e^{-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-x^2e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\,(xy-2)\,e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=x\,(xy-2)\,e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^3e^{-xy}$. **1.59.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\cos y^2}{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y\operatorname{sen} y^2}{x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\cos y^2}{x^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2y\operatorname{sen} y^2}{x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2\operatorname{sen} y^2+4y^2\cos y^2}{x}$.

1.60. $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=y^{x-1}\times$ $\times(x\ln y+1)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)\,y^{x-2}\;(y>0)$. **1.61.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ $=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}$. **1.62.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y\operatorname{sgn}x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{|x|}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$ $=\frac{2|x|y}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{(y^2-x^2)\operatorname{sgn}x}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2|x|y}{(x^2+y^2)^2}$. **1.63.** $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=$ $=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$. **1.64.** $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{z}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{z}{y}\times$ $\times\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{y}{x}\right)^z\ln\frac{y}{x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{z(z+1)}{x^2}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=$ $=\frac{z(z-1)}{y^2}\left(\frac{y}{z}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\frac{y}{x}\right)^z\ln^2\frac{y}{x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{z^2}{xy}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=-\frac{1}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^z\left(1+z\ln\frac{y}{x}\right)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=\frac{1}{y}\left(\frac{y}{x}\right)^z\left(1+z\ln\frac{y}{x}\right)$. **1.65.** $\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3t^4+3$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2xyz^3t^4-4$, $\frac{\partial u}{\partial z}=3xy^2z^2t^4+2$, $\frac{\partial u}{\partial t}=$ $=4xy^2z^3t^3-1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2xz^3t^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=6xy^2zt^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=$ $=12xy^2z^3t^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=2yz^3t^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=3y^2z^2t^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}=4y^2z^3t^3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=6xyz^2t^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t}=8yz^3t^3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial t}=12xy^2z^2t^3$. **1.66.** $f'_x(3,2)=$ $=56$, $f'_y(3,2)=42$, $f''_{xx}(3,2)=36$, $f''_{xy}(3,2)=31$, $f''_{yy}(3,2)=6$. **1.67.** $f'_x(1,2)=e(2e^4-1)$, $f'_y(1,2)=4e^5$, $f''_{xx}(1,2)=e(6e^4-1)$, $f''_{xy}(1,2)=8e^5$, $f''_{yy}(1,2)=18e^5$. **1.70.** $f'''_{xxx}(0,1)=0$, $f'''_{xxy}(0,1)=2$, $f'''_{xyy}(0,1)=0$, $f'''_{yyy}(0,1)=0$. **1.71.** $\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y\,\partial\xi\,\partial\eta}=-\frac{6}{r^4}+$ $+\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$, donde $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$. **1.72.** $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\,\partial y^3}=-6(\cos x+\cos y)$. **1.73.** $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\,\partial y^q}=p!q!$ **1.78.** $r^2\cos\theta$.
1.85. $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$. ● Compruébese que la función es nula en todos los puntos de los ejes Ox y Oy y úsese la definición de las derivadas parciales. **1.86.** ● Compruébese, usando las reglas de derivación y la definición de la derivada parcial, que $f'_x(x,y)=y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$ para $x^2+y^2\neq 0$, $f'_x(0,0)=0$,

y, por tanto, $f'_x(0, y) = -y$. De aquí $f''_{xy}(0, y) = f''_{xy}(0, 0) = -1$. Análogamente hallamos que $f''_{yx}(0, 0) = 1$. **1.87.** $\Delta z = 0{,}33$, $dz = 0{,}3$. **1.88.** $\Delta z = 0{,}0187$. $dz = 0{,}0174$. **1.89.** $dz = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}\,(y+\sqrt{x^2+y^2})} + \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **1.90.** $dz = \frac{y}{x^2\cos^2\frac{y^2}{x}}(2x\,dy - y\,dx)$. **1.91.** $dz = \frac{1}{y^2} \times \operatorname{tg}\frac{x}{y}(x\,dy - y\,dx)$. **1.92.** $du = (xy)^z\left(\frac{z}{x}dx + \frac{z}{y}dy + \ln(xy)\,dz\right)$.
1.93. $df = (x_2 - x_3)\,x_1^{x_2-x_3-1}\ln x_4\,dx_1 + x_1^{x_2-x_3}\ln x_1 \ln x_4\,dx_2 - x_1^{x_2-x_3} \times \ln x_1 \cdot \ln x_4 \times dx_3 + x_1^{x_2-x_3}\frac{dx_4}{x_4}$. **1.94.** $df(1, 2, 1) = \frac{5dz - 2(dx + 2dy)}{25}$.
1.95. 8,29. **1.96.** 2,95. **1.97.** 0,227. **1.98.** 8,2 m³. **1.99.** Disminuirá en 1,57 cm. **1.100.** Aumentará en 617,5 cm³. **1.101.** $dz = 3x(x+2y)dx + 3(x^2 - y^2)\,dy$, $d^2z = 6((x+y)\,dx^2 + 2x\,dx\,dy - y\,dy^2)$. **1.102.** $dz = (x\,dy - y\,dx)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$, $d^2z = 2\left(\frac{y}{x^3}dx^2 + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right)dx\,dy - \frac{x}{y^3}dy^2\right)$. **1.103.** $dz = \frac{(x+y)\,dx + x\,dy}{\sqrt{x^2+2xy}}$, $d^2z = \frac{-y^2dx^2 + 2xy\,dx\,dy - x^2dy^2}{(x^2+2xy)^{3/2}}$.
1.104. $dz = \frac{x^2\,dy - xy\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $d^2z = \frac{1}{(x^2+y^2)^{5/2}}(y(2x^2 - y^2)\,dx^2 + 2x \times (2y^2 - x^2)\,dx\,dy - 3x^2y\,dy^2)$. **1.105.** $dz = e^{xy}(y^2 + xy + 1)\,dx + (x^2 + xy + 1)\,dy)$, $d^2z = e^{xy}(y(y^2 + xy + 2)\,dx^2 + 2(x+y)(xy+2) \times dx\,dy + x(x^2 + xy + 2)\,dy^2)$. **1.106.** $dz = \left(\ln\frac{y}{x} - 1\right)dx + \frac{x}{y}\,dy$; $d^2z = -\frac{1}{x}\,dx^2 + \frac{2}{y}\,dx\,dy - \frac{x}{y^2}\,dy^2$. **1.107.** $dz = \frac{1}{2x^2 + 2xy + y^2} \times (y\,dx + x\,dy)$, $d^2z = -\frac{1}{(2x^2+2xy+y^2)^2}(2y(2x+y)\,dx^2 + 2(y^2 - 2x^2) \times dx\,dy - 2x(x+y)\,dy^2)$. **1.108.** $du = (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, $d^2u = 2(dx\,dy + dy\,dz + dz\,dx)$. **1.109.** $du = e^{xyz}(yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz)$, $d^2u = e^{xyz}(yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz)^2 + 2(z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dz\,dx)$.
1.110. $d^3z = e^y(-\cos x\,dx^3 - 3\operatorname{sen} x\,dx^2\,dy + 3\cos x\,dx\,dy^2 + \operatorname{sen} x\,dy^3)$.
1.111. $d^3u = 6(dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3dx\,dy\,dz)$. **1.112.** $d^6u = -\frac{5!\,(dx+dy+dz)^6}{(x+y+z)^6}$. **1.113.** $d^mu = e^{ax+by+cz}(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^m$.

2.1. $\frac{dz}{dt} = e^{2x-3y}(2\sec^2 t - 3(2t-1))$. **2.2.** $\frac{dz}{dt} = x^y\left(\frac{y}{xt} + \ln x\cos t\right)$.
2.3. $\frac{dz}{dt} = \frac{2e^{2t}(x-y)}{x^2+y^2}$. **2.4.** $\frac{du}{dt} = \frac{x(z+2yt^2) - yzte^t}{tx^2}$. **2.5** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x + e^y(x^2+1)}{e^x + e^y}$. **2.6.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y^2 + (x+1)^2}$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{y(1 - 2(x+1)^2}{y^2 + (x+1)^2}$. **2.7.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 2u\left(\frac{ux}{v} - \frac{y\ln v}{x^2}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2u\left(\frac{\ln v}{x} +\right.$

$\left.+\frac{uy}{v}\right)$. **2.8.** $dz=((2uv-v^2)\operatorname{sen} y-(u^2-2uv)\, y \operatorname{sen} x)\, dx+(2uv-v^2)\, x\cos y+(u^2-2uv)\cos x)\, dy$. **2.9.** $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_v'(u, v)-\frac{2y}{(x-y)^2}\times f_u'(u, v)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{(x+y)^2}f_u'(u, v)-3f_v'(u, v)$. **2.10.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2-y^2}\times f_u'(u, v)+y^2f_v'(u, v)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2xyf_v'(u, v)-\frac{2y}{x^2-y^2}f_u'(u, v)$. **2.11.** $dz=(5x^4f_v'(u, v)-yf_u'(u, v)\operatorname{sen}(xy))\, dx-(x\operatorname{sen}(xy)\, f_u'(u, v)+7f_v'(u, v))\, dy$. **2.12.** $dz=\frac{1}{y^2}\left(\cos\frac{x}{y}f_u'(u, v)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\, f_v'\times(u, v)\right)(y\, dx-x\, dy)$. **2.13.** $du=(2sf_x'(x, y, z)+2sf_y'(x, y, z)+t2f_z'(x, y, z))\, ds+(2tf_x'(x, y, z)-2tf_y'(x, y, z)+2sf_z'(x, y, z))\, dt$. **2.14.** $\frac{\partial u}{\partial x_1}=f_{x_1}'(x_1, x_2, x_3, x_4)+f_{x_3}'(x_1, x_2, x_3, x_4)\, g_{x_1}'(x_1, x_2)+f_{x_4}'(x_1, x_2, x_3, x_4)\, (h_{x_1}'(x_1, x_2, x_3)+h_{x_3}'(x_1, x_2, x_3)\, g_{x_1}'(x_1, x_2))$ $\frac{\partial u}{\partial x_2}=f_{x_2}'(x_1, x_2, x_3, x_4)+f_{x_3}'(x_1, x_2, x_3, x_4)\, g_{x_2}'(x_1, x_2)+f_{x_4}'(x_1, x_2, x_3, x_4)\, (h_{x_2}'(x_1, x_2, x_3)+h_{x_3}'(x_1, x_2, x_3)\, g_{x_2}'(x_1, x_2))$. **2.19.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2f_{uu}''(u, v)+2f_{uv}''(u, v)+\frac{1}{y^2}f_{vv}''(u, v)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=xyf_{uu}''(u, v)-\frac{x}{y^3}f_{vv}''(u, v)+f_u'(u, v)-\frac{1}{y^2}f_v'(u, v)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2f_{uu}''(u, v)-\frac{2x^2}{y^2}\times f_{uv}''(u, v)+\frac{x^2}{y^4}f_{vv}''(u, v)+\frac{2x}{y^3}f_v'(u, v)$, **2.20.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=f_{xy}''+f_{xz}''\varphi_y'+f_{yz}''\varphi_z'+f_{zz}''\varphi_x'\varphi_y'+f_z'\varphi_{xy}''$. **2.21.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_{11}''+y^2f_{22}''+y^2z^2f_{33}''+2yf_{12}''+2yzf_{13}''+2y^2zf_{23}''$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2f_{22}''+2x^2zf_{23}''+x^2z^2f_{33}''$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2f_{33}''$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=xyf_{22}''+xyz^2f_{33}''+xf_{12}''+xzf_{13}''+2xyzf_{23}''+f_2'+zf_3'$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=xyf_{13}''+xy^2f_{23}''+xy^2zf_{33}''+yf_3'$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=x^2yf_{23}''+x^2yzf_{33}''+xf_3'$ *). **2.24.** $d^2u=4f''(t)\cdot(x\, dx+y\, dy+z\, dz)^2+2f'(t)\cdot(dx^2+dy^2+dz^2)$. **2.25.** $d^2u=a^2f_{11}''\, dx^2+b^2f_{22}''\, dy^2+c^2f_{33}''\, dz^2+2abf_{12}''\, dx\, dy+2acf_{13}''\, dx\, dz+2bcf_{23}''\, dy\, dz$. **2.26.** $d^2z=(\operatorname{sen}^2 y\cdot f_{uu}''-2y\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y\cdot f_{uv}''+y^2\operatorname{sen}^2 x f_{vv}''-y\cos x\cdot f_v')\, dx^2+(x\operatorname{sen} 2y\cdot f_{uu}''+2(\operatorname{sen} y\cos x-xy\operatorname{sen} x\cos y)\, f_{uv}''-y\operatorname{sen} 2x\cdot f_{vv}''+2(\cos y\cdot f_u'-\operatorname{sen} x\cdot f_v'))\, dx\, dy+(x^2\cos^2 y\cdot f_{uu}''+2x\cos x\times$

---

* En las respuestes a los probl mas 2.21 y 2.25 mediante f_i' y f_{ij}'' están designadas las derivadas parciales de la función $f(\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z), \varphi_3(x, y, z))$ respecto a las variables φ_i ó φ_i y φ_j.

$\times \cos y \cdot f''_{uv} + \cos^2 x \cdot f''_{vv} - x \operatorname{sen} y \cdot f'_u)\, dy^2$. **2.27.** $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 e^{2x} - xe^{2y}}{x^2 e^{2y} - ye^{2x}}$.
2.28. $\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x + \operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen}(x-y) - \operatorname{sen} x}$. **2.29.** $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x+y+1}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$. **2.30.** $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{y^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}$. **2.31.** $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = 0$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = -\frac{1}{3}$, $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{1}{3}$. **2.32.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$. **2.33.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz(x+z) - z^3}{z^3 + 2xy(x+z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz(x+z)}{z^3 + 2xy(x+z)}$.
2.34. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_u(u, v) + 2xF'_v(u, v)}{F'_u(u, v) + 2zF'_v(u, v)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_u(u, v) + 2yF'_v(u, v)}{F'_u(u, v) + 2zF'_v(u, v)}$, donde $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$. **2.35.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ze^{xz} f'_v(u, v)}{yf'_u(u, v) + xe^{xz} f'_v(u, v)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{zf'_u(u, v)}{yf'_u(u, v) + xe^{xz} f'_v(u, v)}$, donde $u = yz$, $v = e^{xz}$. **2.36.** $dz = \frac{z\, dx - z(1 + x^2z^2)\, dy}{y(1 + x^2z^2) - x}$. **2.37.** $dz = \frac{y^2(z + 3x^2)\, dx + (3y^4 + ze^{z/y})\, dy}{y(e^{z/y} - xy)}$.
2.38. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2-x}{1+z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1+z}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{2y(x-2)}{(1+z)^3}$. **2.39.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$. **2.40.** $d^2z = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}((y^2 - b^2) \times$ $\times dx^2 - 2xy\, dx\, dy + (x^2 - a^2)\, dy^2)$. **2.44.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{5}{3}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{8}$, $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{5}{18}$. **2.45.** $dy = -\frac{4x}{5y}\, dx$, $dz = \frac{x}{5z}\, dx$, $d^2y = -\frac{4}{25y^3}(4x^2 + 5y^2)\, dx^2$, $d^2z = \frac{1}{25z^3}(5z^2 - x^2)\, dx^2$. **2.46.** $du = \frac{(y-u)\, dx + (y-v)\, dy}{x-y}$, $dv = \frac{(x-u)\, dx + (x-v)\, dy}{y-x}$, $d^2v = -d^2u = \frac{2}{(x-y)^2}((y-u)\, dx^2 + (y - v + u - x)\, dx\, dy + (v - x)\, dy^2)$.
2.48. $\frac{\partial z}{\partial x} = uv^2 + u^2v$, $\frac{\partial z}{\partial y} = uv^2 - u^2v$. **2.49.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c}{a} \cos u \operatorname{cth} v$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c}{b} \operatorname{sen} u \operatorname{cth} v$. **2.50.** $dz = e^{-u}((v \cos v - u \operatorname{sen} v)\, dx + (u \cos v + v \operatorname{sen} v)\, dy)$. **2.51.** $dz = -3uv\, dx + \frac{3}{2}(u + v)\, dy$. **2.52.** $\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$. **2.53.** $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$. **2.54.** $\frac{d^3x}{dy^3} + \frac{d^2x}{dy^2} = 0$. **2.55.** $r'^2 = \frac{1 - \operatorname{sen} 2\varphi}{\operatorname{sen} 2\varphi} r^2$. **2.56.** $w = r \frac{\partial u}{\partial r}$. **2.57.** $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v}$. **2.58.** $\frac{\partial z}{\partial r} =$

$= u\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}$ **2.59.** $w=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$. **2.60.** $w=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}$. **2.61.** $\frac{\partial w}{\partial v}=0$. **2.62.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$. **2.63.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=2w$.

3.1. $f(x+h,\ y+k)=xy^2+y^2h+2xyk+2yhk+xk^2+hk^2$. **3.2.** $\Delta f(x,\ y)=-h^2+2hk+3k^2$. **3.3.** $f(x,\ y)=12+15(x-2)+6(x-2)^2+3(x-2)(y-1)-6(y-1)^2+(x-2)^3-2(y-1)^3$. **3.4.** $f(x+h,\ y+k,\ z+l)=f(x,\ y,\ z)+h(2x+y+3)+k(x+4y-2z-1)+l(6z-2y-4)+h^2+2k^2+3l^2+hk-2kl$. **3.5.** $f(x,\ y,\ z)=8-8(y+1)+4(z-2)+(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2-2(x-1)(y+1)-2(x-1)\times(z-2)-2(y+1)(z-2)$. **3.6.** $f(x,\ y)=1+y+\frac{1}{2!}(y^2-x^2)+\frac{1}{3!}(y^3-3x^2y)+o(\rho^3)$, donde $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. **3.7.** $f(x,\ y)=xy+\frac{1}{3!}(xy^3-x^3y)+o(\rho^4)$, donde $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. **3.8.** $f(x,\ y)=1-(x-1)+(y-1)+(x-1)^2-(x-1)(y-1)-(x-1)^3+(x-1)^2(y-1)+o(\rho^3)$, donde $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$. **3.9.** $f(x,\ y,\ z)=(x-1)+(y-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{2}(y-1)^2+z^2+o(\rho^2)$, donde $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$. **3.10.** $z=1+\frac{2}{3}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{2}{9}(x-1)^2-\frac{1}{8}(y-1)^2+o(\rho^2)$, donde $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$. **3.11.** $z_{\text{mín}}=-9$ cuando $x=0$, $y=3$. **3.12.** $z_{\text{máx}}=1/64$ cuando $x=1/4$, $y=1/2$. **3.13.** $z_{\text{mín}}=-4/3$ cuando $x=0$, $y=-2/3$. No hay extremo en el punto estacionario $(2,\ -2/3)$. **3.14.** $z_{\text{mín}}=30$ cuando $x=5$, $y=2$. **3.15.** $z_{\text{mín}}=10-18\ln 3$ cuando $x=1$, $y=3$. **3.16.** $z_{\text{mín}}=-28$ cuando $x=2$, $y=1$; $z_{\text{máx}}=28$ cuando $x=-2$, $y=-1$. No hay extremos en los puntos estacionarios $(1,\ 2)$ $(-1,\ -2)$. **3.17.** $z_{\text{mín}}=0$ cuando $x=y=0$. No hay extremos en los puntos estacionarios $(-5/3,\ 0)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ -4)$. **3.18.** $z_{\text{mín}}=0$ cuando $x=y=0$; $z_{\text{máx}}=2e^{-1}$ cuando $x=\pm 1$, $y=0$. No hay extremos en los puntos estacionarios $(0,\ \pm 1)$. **3.19.** $z_{\text{máx}}=2$ cuando $x=y=0$. **3.20.** $u_{\text{mín}}=-14$ cuando $x=2$, $y=-3$, $z=1$. **3.21.** $u_{\text{máx}}=1/7^7$ cuando $x=y=z=1/7$. **3.22.** $u_{\text{mín}}=2^{9/4}$ cuando $x=2^{1/4}$, $y=2^{1/2}$, $z=2^{3/4}$. **3.23.** La ecuación define dos funciones, de las cuales una tiene un máximo ($z_{\text{máx}}=6$) cuando $x=-2$, $y=1$, y la otra, un mínimo ($z_{\text{mín}}=-2$) cuando $x=-2$, $y=1$; en los puntos de la circunferencia $(x+2)^2+(y-1)^2=16$ cada una de las funciones citadas tiene un extremo de contorno $z=2$. ● Las funciones mencionadas se definen en forma explícita mediante la igualdad $z=2\pm$

$\pm\sqrt{16-(x+2)^2-(y-1)^2}$ y quedan determinadas sólo en el interior y en la circunferencia $(x+2)^2+(y-1)^2=16$ en cuyos puntos ambas funciones toman el valor $z=2$. Este valor es mínimo para una de las funciones y máximo para la otra. **3.24.** La ecuación define dos funciones, de las cuales una tiene un mínimo ($z_{\text{mín}}=1$) cuando $x=0$, $y=-2$, y la otra, un máximo ($z_{\text{máx}}=-8/7$) cuando $x=0$, $y=16/7$. **3.25.** $z_{\text{mín}}=-19/4$ cuando $x=y=-3/2$. **3.26.** $z_{\text{mín}}=2$ cuando $x=y=1$. **3.27.** $z_{\text{mín}}=-1-2\sqrt{2}$ cuando $x=-1/\sqrt{2}$, $y=1/\sqrt{2}$; $z_{\text{máx}}=1-2\sqrt{2}$ cuando $x=1/\sqrt{2}$, $y=-1\sqrt{2}$. **3.28.** $z_{\text{mín}}=0$ cuando $x=1$, $y=0$; $z_{\text{máx}}=1/27$ cuando $x=y=1/3$. **3.29.** $z_{\text{mín}}=-5$ cuando $x=-2/\sqrt{5}$, $y=-1/\sqrt{5}$; $z_{\text{máx}}=\sqrt{5}$ cuando $x=2/\sqrt{5}$, $y=1/\sqrt{5}$. **3.30.** $u_{\text{mín}}=-18$ cuando $x=-4$, $y=-2$, $z=4$; $u_{\text{máx}}=18$ cuando $x=4$, $y=2$, $z=-4$. **3.31.** $u_{\text{mín}}=4$ cuando $x=y=0$, $z=\pm2$; $u_{\text{máx}}=16$ cuando $x=\pm4$, $y=z=0$; no hay extremo cuando $x=z=0$ e $y=\pm3$. **3.32.** $u_{\text{máx}}=2^8$ cuando $x=y=z=2$. **3.33.** $u_{\text{máx}}=2$ en los puntos (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2); $u_{\text{mín}}=50/27$ en los puntos (2/3, 5/3, 5/3), (5/3, 2/3, 5/3), (5/3, 5/3, 2/3). **3.34.** ● Búsquese el mínimo de la función $u=(x^3+y^3+z^3)/3$ para $x+y+z=s$. **3.35.** a) $z_{\text{máx}}=6$ cuando $x=1$, $y=0$; b) $z_{\text{máx}}=5$ para $x=y=0$. **3.36.** $z_{\text{máx}}=6$ para $x=3$, $y=0$ y cuando $x=0$, $y=3$; $z_{\text{mín}}=-1$ para $x=y=1$. **3.37.** $z_{\text{máx}}=1/2$ para $x=y=\pm1/\sqrt{2}$; $z_{\text{mín}}=-1/2$ para $x=-y=\pm1/\sqrt{2}$. **3.38.** $z_{\text{máx}}=2/(3\sqrt{3})$ para $x=1/\sqrt{3}$, $y=\pm\sqrt{2/3}$; $z_{\text{mín}}=-2/(3\sqrt{3})$ para $x=-1/\sqrt{3}$, $y=\pm\sqrt{2/3}$. **3.39.** $a=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$. **3.40.** Un cubo cuya arista tiene la longitud a. **3.41.** Un cubo cuya arista tiene la longitud $d/\sqrt{3}$. **3.42.** Las coordenadas del punto buscado son iguales a las medias aritméticas de las coordenadas de los vértices. **3.43.** Las longitudes de los lados del paralelepípedo son: $2R/\sqrt{3}$, $2R/\sqrt{3}$, $R/\sqrt{3}$. **3.44.** Las longitudes de los lados del paralelepípedo son $\frac{2\sqrt{2}}{3}R$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}R$, $\frac{H}{3}$. **3.45.** Un triángulo isósceles en el que el lado lateral es $a/(2\operatorname{sen}\alpha/2)$. **3.46.** $(-12/5, -3/5)$, $(12/5, 3/5)$. ● Sustitúyanse las condiciones suficientes de extremo por los razonamientos geométricos.

3.47. $C\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right.$. ● Hágase uso de la expresión del área del triángulo en términos de las coordenadas de sus vértices. **3.48.** $x=y=z=\sqrt[3]{V}+2\delta$. **3.49.** $x=\frac{m_1x_1+m_2x_2\ldots m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$, $y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$. **3.50.** $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{v_1}{v_2}$. ● Es evidente que el punto M, por el cual el rayo pasa de un medio al otro, deberá encontrarse entre los puntos A_1 y B_1, siendo $AM=\frac{a}{\cos\alpha}$, $BM=\frac{b}{\cos\beta}$, $A_1M=a\,\operatorname{tg}\alpha$, $B_1M=b\,\operatorname{tg}\beta$. La duración del movimiento del rayo es igual a $\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$. El problema se reduce a la búsqueda del mínimo de la función $f(\alpha, \beta)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$ a condición de que $a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta=c$. **3.51.** $\alpha=\beta$. **3.52.** $I_1:I_2:\ldots$ $\ldots:I_n=\frac{1}{R_1}:\frac{1}{R_2}:\ldots:\frac{1}{R_n}$. ● Hállese el mínimo de la función $f(I_1, I_2, \ldots, I_n)=I_1^2R_1+I_2^2R_2+\ldots+I_n^2R_n$, si $I_1+I_2+\ldots+I_n=I$. **3.53.** a) $x-y-2z+1=0$, $\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1}=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{-1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-2}$; b) $x+ez-2=0$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-\pi}{0}=\frac{z-\frac{1}{e}}{e}$. **3.54.** $\frac{\pi a}{2\sqrt{6}}$. **3.55.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{\sqrt{6}}$. **3.56.** $4x+y+2z-78=0$. **3.57.** a) $2x+7y-5z+4=0$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{-5}$; b) $x+y-4z=0$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$; c) $z=0$, $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$ (en el punto $(0, 0, 0)$); $z=-4$, $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+4}{1}$ (en el punto $(0, 0, -4)$). **3.58.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-\frac{10}{3}}{3}=\frac{z+4}{4}$. **3.59.** En los puntos $(0, \pm 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{2})$ los planos tangentes son paralelos al plano Oxy, en los puntos $(\pm 2, \mp 4, \pm 2)$ al plano Oxz, en los puntos $(\pm 4, \mp 2, 0)$, al plano Oyz. **3.61.** a) $x\cos\varphi_0+y\operatorname{sen}\varphi_0-z\operatorname{tg}\alpha=0$, $\frac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0}=\frac{y-r_0\operatorname{sen}\varphi_0}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{z-r_0\operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}$; b) $ax\operatorname{sen}v_0-ay\cos v_0+u_0z=au_0v_0$, $\frac{x-u_0\cos v_0}{a\operatorname{sen}v_0}=\frac{y-u_0\operatorname{sen}v_0}{-a\cos v_0}=\frac{z-av_0}{u_0}$. **3.62.** $\cos\varphi=\frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}$. ● Un ángulo formado por dos superficies en el punto de su intersección se denomina ángulo entre dos planos tangentes trazados a dichas superficies en un punto dado. **3.63.** Las superficies se llaman ortogonales, si se cortan bajo un ángulo recto en cada punto de la línea de su intersección. **3.64.** El punto aislado $(0, 0)$. **3.65.** El nudo $(0, 0)$. **3.66.** Un punto aislado $(0, 0)$. **3.67.** El punto de retroceso de primera especie $(1, 0)$. **3.68.** El punto de retroceso de segunda especie $(0, 0)$. **3.69.** El punto de autoadherencia (0, 0). **3.70.** (0, 0) es un punto aislado, si $a < 0$; un nudo, si $a > 0$; un punto de retroceso de primera especie, si $a = 0$. **3.71.** Un nudo (0, 0). **3.72.** El punto de retroceso de primera especie (0, 0). **3.73.** Un punto anguloso (0, 0). ⊙ Muéstrese que $\lim\limits_{x \to +0} y' = 0$, $\lim\limits_{x \to -0} y' = 1$. **3.74.** El punto terminal (0, 1). ⊙ Muéstrese que $\lim\limits_{x \to +0} y = 1$. **3.75.** $y = -x^2/4$. **3.76.** $x^2 + y^2 = p^2$. **3.77.** $x = \pm R$. **3.78.** No hay envolvente. **3.79.** $y = -\frac{4}{3}x^2$. **3.80.** $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$. **3.81.** $y^2 = -\frac{x^3}{x + 2a}$. **3.82.** a) La curva discriminante $y = 1$ es una envolvente y constituye un conjunto de puntos de inflexión de la familia dada; b) la curva discriminante se descompone en las rectas: $y = x - \frac{4}{27}$ (la envolvente) e $y = x$ (el conjunto de puntos de retroceso de primera especie); c) la curva discriminante $y = 1$ es un conjunto de puntos de retroceso de primera especie y no es una envolvente; d) la curva discriminante se descompone en las rectas: $x = -a$ (la envolvente) y $x = 0$ (el conjunto de nudos).

4.1. a) 1 g, 0,0043%; b) 1 mm, 0,12%; c) 1′, 0,066%. **4.2.** 1) $\Delta = 0{,}002$ km, $\delta = 0{,}008\%$; 2) $\Delta = 30$ m², $\delta = 2\%$. **4.3.** La primera. **4.4.** a) 0,05, 0,14%; b) 0,005, 6,25%; **4.5.** 29,2 y 3,2. **4.6.** 1) 5,373, 0,0004, 0,0074%; 2) 5,73, 0,0026, 0,048%; 3) 5,4, 0,0274, 0,51%. **4.7.** $202 \cdot 10^{-1}$, $188 \cdot 10^{1}$, $600 \cdot 10^{3}$. **4.8.** a) Dos, $41 \cdot 10^{4}$; b) uno, $8 \cdot 10^{-2}$. **4.9.** No menos que con dos signos. **4.10.** No menos que con tres signos. **4.11.** —**4.15.** ⊙ Hágase uso de la fórmula (1), § 4. **4.16.** 185,7. **4.17.** $1{,}3 \cdot 10^{2}$. **4.18.** 71,88. **4.19.** No se puede realizar la sustracción. **4.20.** 61,6. **4.21.** $512 \cdot 10$. **4.22.** 3,3. **4.23.** $3 \cdot 10$. **4.24.** $66 \cdot 10^{3}$. **4.25.** 7,397. **4.26.** $\leqslant 12\pi$ cm², $\leqslant 8{,}3\%$, **4.27.** $\approx 0{,}43\delta$. **4.29.** $\leqslant 0{,}17$ mm. **4.30.** $(2{,}7 \pm 0{,}1)$ g/cm³. **4.31.** De acuerdo con el principio de efecto igual, mídase R con el error relativo 0,25% y la altura H, con el error relativo 0,5%. **4.32.** 12″. **4.33.** 4. **4.34.** 4. **4.35.** De acuerdo con el principio de igual efecto, se puede tomar π con tres signos justos en el sentido estrecho, mídanse los radios con la exactitud de hasta 0,8 cm, y la directriz, con la exactitud de hasta 1,25 cm.

APÉNDICE

DESCRIPCIÓN BREVE DEL LENGUAJE FORTRAN-IV

El FORTRAN es un lenguaje algorítmico cómodo destinado para resolver diferentes problemas aplicados. La palabra «FORTRAN» está formada por las sílabas iniciales de dos palabras inglesas FORmula TRANslator (intérprete de fórmulas).

El programa en FORTRAN se anota, como regla, en un formulario especial y de una sucesión de operadores. Para cada operador se destina una línea aparte. La línea del formulario comprende 80 columnas (posiciones). En ausencia de formularios especiales, el programa FORTRAN se anota en un papel corriente tomando en consideración que cada línea debe comprender no más de 80 símbolos y observándose las exigencias que se exponen más abajo. El operador del FORTRAN ocupa las columnas del 7 al 72 inclusive. Las columnas desde la primera hasta la quinta inclusive se destinan para la marca del operador. La marca que representa un número entero sin signo alguno puede escribirse en cualesquiera de las cinco columnas citadas. Los blancos dentro de la marca si ignoran. Si falta lugar para el operador en una línea, puede continuarse en la otra. Los signos de las operaciones aritméticas no se repiten. La continuación de la anotación puede ocupar no más de 19 líneas, en cada una de las cuales se anota en la sexta columna un símbolo, distinto de 0 ó del blanco. Comúnmente se pone el número de la línea de continuación.

Anotación de los comentarios. El programa puede contener diferentes explicaciones que facilitan su lectura y asimilación. Los comentarios se pueden disponer en cualquier lugar del programa. En la primera posición de la línea del comentario se pone obligatoriamente la letra C. Para la anotación de los comentarios se puede utilizar cualquier símbolo del FORTRAN.

Las construcciones principales del lenguaje FORTRAN están constituidas por los *operadores*. Éstos se dividen en dos clases: directivos (ejecutables) y descriptivos (no ejecutables). Los operadores directivos indican las operaciones y el orden en que se ejecutan dichas operaciones. Los operadores descriptivos se utilizan para describir las magnitudes, indicar el tipo de éstas, su estructura, etc.

Símbolos principales. A título de letras para la anotación de los operadores se usan las letras mayúsculas del alfabeto latino: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z y las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. La cifra 0 (cero) se tacha (∅) para distinguirla de la letra O. Los símbolos especiales son:

+, el signo de sumación,
—, el signo de sustracción,
*, el signo de multiplicación,
/, el signo de división,
., el punto decimal,
,, la coma.
(, el paréntesis izquierdo (abrir paréntesis)
), el paréntesis derecho (cerrar paréntesis).

Constantes y variables. Existen seis tipos de constantes: enteras, reales, complejas, lógicas, de símbolo, sexadecimales.

La constante entera (forma I) es un número cualquiera anotado sin punto decimal. El valor de una constante entera no puede sobrepasar de $2^{31} - 1 \approx 2 \cdot 10^9$.

La constante real (forma F) es un número cualquiera escrito con un punto decimal que divide las partes entera y fraccionaria del número. El número máximo de cifras en la forma F es igual a 7.

Forma exponencial de notación de un número real (forma E). En esta forma todo número consta de una constante entera o real y un exponente. La primera letra del exponente es siempre E, tras la cual sigue la constante entera (valor del exponente) formada por no más de dos cifras decimales con un signo o sin éste. El número de cifras de la mantisa no debe ser superior a 7.

Cuando hay necesidad de recurrir a una exactitud mayor, se emplea la constante de precisión doble (forma D). Se anota como un número con un punto decimal que contiene de 8 a 16 cifras significativas, o bien en la forma exponencial en la que en lugar de E se pone la letra D; la mantisa puede contener hasta 16 cifras significativas.

Las variables son unas magnitudes a las que se han asignado ciertas denominaciones, o sea nombres simbólicos. El nombre simbólico es un juego de letras o de letras y cifras; la cantidad de éstas en un juego varía de 1 a 6. El nombre siempre comienza con una letra. No se permite que en los nombres se empleen símbolos especiales o blancos.

Tipos de variables. El tipo de variables corresponde al tipo de datos que ellas describen. Las variables enteras describen números enteros, las variables reales describen números reales, etc. En el caso más sencillo para describir el tipo de las variables sirve el operador

$$\text{tipo } a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

donde el tipo es una de las palabras de servicio REAL (real), INTEGER (íntegro), DOUBLE PRECISION (precisión doble), LOGICAL (lógico); $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los nombres de las variables. Si el programa no contiene indicaciones explícitas acerca del tipo de variables, entonces las variables cuyos nombres comienzan por las letras I, J, K, L, M, N representan magnitudes enteras; todas las demás variables representan variables reales.

Variables con índices. La tabla es una sucesión ordenada de magnitudes (elementos de la tabla), denotada por un nombre simbólico único. Todo elemento de la tabla se determina mediante el nombre de la tabla y su posición en ésta última, es decir, mediante los valores de los índices. A título de nombre de la tabla puede servir cualquier nombre simbólico admisible. Los índices se encierran entre paréntesis. El número de índices lleva el nombre de dimensión de la tabla. El número de elementos en la tabla se denomina tamaño de la tabla. En calidad de índices se emplea cualquier expresión aritmética y las variables, tanto del tipo entero como real. En el caso de una expresión de tipo real se toma como índice su parte entera, es decir, se desecha la parte fraccionaria. Los índices de los elementos de una tabla siempre son mayores o iguales a 1.

Descripción de las tablas. Las tablas, que se usan en el programa han de ser obligatoriamente descritas. La descripción de las tablas se da al principio del programa y se dispone antes del primer operador directivo. Para describir la tabla sirve el operador DIMENSION cuya forma general es

$$\text{DIMENSION } a_1 (n_1, n_2, \ldots, n_l), \ldots, a_k (m_1, m_2, \ldots, m_k),$$

donde $a_1, \ldots, a_k$ son los nombres de las tablas. Las cotas superiores de variación de los índices están dadas por números positivos enteros, $1 \leqslant l \leqslant 7$, $1 \leqslant k \leqslant 7$. Los elementos de una tabla multidimensional se disponen en la memoria de destinación sucesivamente uno tras otro, de suerte que el primer índice cambia más rapidamente y el posterior, más lentamente.

Expresiones aritméticas. Las expresiones aritméticas en el FORTRAN son análogas a las expresiones algebraicas corrientes. En las expresiones aritméticas pueden figurar constantes, variables simples o con índices, funciones que se unen con ayuda de las operaciones aritméticas. Si en una expresión faltan los paréntesis, los cálculos se realizan de acuerdo con las reglas siguientes: al principio se realiza la elevación a potencia (el signo **), luego la multiplicación (el signo *) y división (el signo /) y después, la sumación y la sustracción. Si en una expresión se tienen paréntesis, entonces al principio se realizan los cálculos dentro de los paréntesis. Si la expresión contiene funciones, en primer lugar se calculan los argumentos de estas funciones y los valores correspondientes de las mismas. Las expresiones aritméticas pueden contener constantes, variables y funciones de diferentes tipos. Previamente a la ejecución de una operación las variables se reducen a un mismo tipo, razón por la cual con el fin de disminuir el tiempo gastado para realizar la operación, no se recomienda que se mezclen las variables de diferentes tipos en una expresión (la notación Y + 5. es preferible en comparación con la notación Y + 5).

Operadores descriptivos principales del FORTRAN. Algunos de los operadores descriptivos se han examinado más arriba. Nos detendremos en otros operadores que se encuentran con frecuencia.

El operador EQUIVALENCE se anota en la forma

$$\text{EQUIVALENCE } (a, b, c, \ldots), \ldots, (d, e, f, \ldots),$$

donde a, b, c, ..., d, e, f, ... son variables, simples o con índices. El sentido del operador dado consiste en que los valores, que corresponden a a, b, c, ..., se disponen en una célula y los correspondientes a d, e, f, ... están también todos en una célula. Las variables a cotejar deben ser de igual longitud. Hay que tener en cuenta que al cotejar los elementos sueltos de las tablas, se someten al cotejo todos los demás elementos de las dos tablas.

El operador COMMON se anota en la forma COMMON A, B, C, ..., donde A, B, C son los nombres de las variables con índices o sin ellos. La zona COMMON es especial y está destinada para guardar los datos comunes para dos o varios subprogramas o bien datos comunes para el programa principal y sus subprogramas. En el FORTRAN-IV la zona COMMON puede dividirse en varios bloques. La estructura de la notación del operador COMMON, con la utilización de los bloques, es la siguiente:

COMMON (nombre del bloque) a_1, a_2 . . .

El operador FUNCTION tiene la siguiente forma

FUNCTION nombre (argumento$_1$, . . ., argumento$_n$).

El operador dado constituye el título del subprograma. Los argumentos en el operador son ficticios e intervienen sólo en la descripción del método empleado para calcular las funciones. Como argumentos pueden figurar las variables sin índices, las tablas o los nombres de las funciones. En el interior del subprograma debe encontrarse, aunque sea una sola vez, un operador que tiene el nombre de función subprograma en el miembro derecho del operador de asignación. El último operador directivo de la función subprograma debe ser el operador RETURN. Éste asegura el retorno del mando al programa principal. END debe ser el último operador del subprograma. Al referirse a la función subprograma debe haber una correspondencia entre los tipos y la cantidad de variables verdaderas y formales.

El operador SUBROUTINE tiene la forma

SUBROUTINE nombre (argumento$_1$, argumento$_2$, . . ., argumento$_n$).

El operador constituye el título del subprograma SUBROUTINE. Este subprograma se emplea cuando es necesario obtener varios resultados. Las variables, cuyos valores se calculan, se indican en la lista de argumentos. La función subprograma considerada anteriormente nos proporciona explícitamente un solo resultado. El subprograma SUBROUTINE es individual y sus variables están localizadas sólo en este subprograma, en lo que toca a la región de su acción. En el programa principal la referencia al subprograma SUBROUTINE se realiza con ayuda del operador

CALL nombre (argumento$_1$, . . ., argumento$_n$).

Aquí la sucesión argumento$_1$, . . ., argumento$_n$ representa los parámetros verdaderos de entrada y de salida. A título de argumento del subprograma puede figurar el nombre de cualquier subprograma. En este caso el programa principal debe incluir el operador descriptivo

EXTERNAL nombre$_1$, nombre$_2$, . . .

Tanto en la función subprograma como en el subprograma SUBROUTINE, al emplear a título de parámetro formal el nombre de tabla, éste se debe describir con ayuda del operador DIMENSION. Se admiten emplear como cotas de variación de los índices las variables enteras, a la par con las constantes enteras. Dichas variables han de incluirse forzosamente en el número de argumentos formales. El subprograma SUBROUTINE debe contener al menos un operador RETURN. El subprograma termina en operador END que significa el fin del subprograma SUBROUTINE.

La introducción y la retirada de la información en el FORTRAN se realiza bajo el mando del operador FORMAT. A la entrada éste indica en qué posiciones (columnas) deben leerse los datos para las variables enumeradas en la lista e/s (entrada/salida) y en qué formato. La estructura de la lista e/s la volveremos a considerar más abajo. A la salida el operador FORMAT señala a qué posiciones y en qué formato se realiza la retirada. La forma de representación de una variable o de un número y del campo, del cual debe tomarse la lectura a la entrada (o en el que deben imprimirse a la salida), se determinan por la especificación del formato del operador FORMAT. En los casos más sencillos el número de espesificaciones del formato en el operador FORMAT ha de corresponder al número de variables en la lista e/s. El operador FORMAT se escribe en la forma

$$\text{marca FORMAT } (S_1, S_2, \ldots, S_n),$$

donde la marca es un número entero sin signo, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ son las especificaciones.

He aquí las especificaciones que se encuentran con mayor frecuencia. Para la introducción (retirada) de los datos numéricos sirven las especificaciones I_w, $F_{w.d}$, $E_{w.d}$; aquí w es el número total de posiciones que se destinan para el número dado (la cantidad total de cifras del número), d es el número de cifras decimales después del punto decimal. La longitud del campo d debe incluir las posiciones para el punto y el signo del número para la especificación de F, como también las posiciones para el signo del exponente, la letra E(D) y dos posiciones para el valor del exponente, en el caso de las especificaciones E, D. Durante la salida del número deben preverse en el formato E(D) cuatro posiciones para el exponente del número y, además, las posiciones para 0 entero, el punto y el signo de dicho número. A la salida ha de observarse la limitación $w - d \geqslant 7$. Al salir los datos en el caso de la especificación F, si el número retirado no cabe dentro de las posiciones destinadas, el campo correspondiente se llena por los asteriscos. Para la notación reiterada de varias especificaciones iguales se puede emplear sólo una de ellas anteponiéndole un número igual a la cantidad de repeticiones. Se pueden repetir los grupos de especificaciones encerrándolos entre paréntesis y anteponiendo al paréntesis un número entero igual a la cantidad de repeticiones de los grupos. Al salir para la imprenta un texto o algunos comentarios, se emplean las especificaciones del tipo H y las del tipo «literal». La especificación del formato del tipo H tiene la forma wH, donde w es el número de cualesquiera símbolos de letras y cifras, admisibles en el FORTRAN, que se disponen tras la letra H inmediatamente. Cuando se usa la especificación del tipo «literal», la información de letras y cifras debe encerrarse entre comillas. La ventaja de la especificación del tipo «literal» consiste en que en este caso no hay necesidad en indicar la cantidad de símbolos, mientras que al usar la especificación del tipo H esta indicación es obligatoria. Para dirigir la disposición de los datos en una línea, se usa, en el caso más simple, la especificación del tipo wX, donde w es el número de blancos que se emplean con el objeto de mejorar el carácter ilustrativo de los resultados en la salida.

El operador FORMAT puede disponerse en cualquier lugar del programa.

El operador FORMAT actúa recíprocamente con los operadores de la entrada—salida: el READ (leer) para la entrada y el WRITE (escribir) para la salida. La forma general de los operadores READ y WRITE es la siguiente:

READ (i, n1) lista

WRITE (i, n2) lista

Aquí i en el primer caso significa el número del dispositivo, del cual sale la información a leer, en el segundo caso determina el impresor de sistema, n1 es la marca del operador FORMAT. En los sistemas de operación de disco el operador READ para la introducción de la información proveniente de la tarjeta perforada tiene, como regla, la forma READ(1, n1) lista, y el operador WRITE: WRITE(3, n2) lista, respectivamente. La lista e/s tiene la forma $a_1, a_2, \ldots, a_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los elementos de la lista. Como elementos de la lista pueden figurar: las variables (simples o con índices), los nombres de las tablas, la forma de DO implícito. Esta última se utiliza con una frecuencia particular cuando es necesario grabar en la memoria o hacer salir para el impresor cierta parte de la tabla, como también para organizar la salida de la tabla en líneas. La forma de DO implícito se encierra entre paréntesis. Entre paréntesis se disponen las variables con índices o las formas de DO implícito separadas mediante comas, si hay varias. Tras la última variable se anotan los parámetros de índice $i = m_1, m_2, m_3$, donde i es el índice, m_1, m_2, m_3 son las cotas inferior y superior y el paso de variación del índice, respectivamente. Si $m_3 = 1$, el paso no se indica.

Al perforar la información, para el operador READ se emplean todas las 80 columnas (posiciones) de la tarjeta, las que determinan la anotación a la entrada. La anotación a la salida no debe sobrepasar de 120 símbolos en la línea del impresor de sistema. Para sacar la información para el impresor puede utilizarse el operador PRINT n2 lista.

Operadores directivos principales del FORTRAN. El operador aritmético de asignación tiene la forma

variable = expresión

Aquí el signo = se diferencia del signo algebraico corriente de igualdad. Este signo tiene el sentido «sustituir por . . . », es decir, se calcula el valor de la expresión aritmética que se encuentra en el miembro derecho y la magnitud obtenida se convierte en el nuevo valor corriente de la variable que está a la izquierda del signo de igualdad. Por esto, por ejemplo, resulta admisible la notación I = I + 1; ésta implica el aumento del valor de la variable entera I en una unidad.

Todos los operadores del programa escrito en FORTRAN se ejecutan sucesivamente, siempre que no haya entre ellos operadores especiales que dirigen la sucesión de ejecución de los operadores. Éstos son los operadores que siguen:

El operador GO TO n asegura la transmisión incondicional de mando al operador con la marca n. En el programa no deben haber operadores que tengan marcas iguales. El operador marcado puede disponerse en cualquier lugar del programa.

PROBLEMAS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES

II

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

В. БОЛГОВ, Б. ДЕМИДОВИЧ, В. ЕФИМЕНКО,
А. ЕФИМОВ, А. КАРАКУЛИН, С. КОГАН
Г. ЛУНЦ, Е. ПОРШНЕВА, А. ПОСПЕЛОВ,
С. ФРОЛОВ, Р. ШОСТАК, А. ЯПОЛЬСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Под редакцией
А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

V. Bolgov, B. Demidovich, V. Efimenko,
A. Efimov, A. Karakulin, S. Kogan,
G. Lunts, E. Porshneva, A. Pospelov,
S. Frolov, R. Shostak, A. Yampolski

PROBLEMAS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES

PARA LOS CENTROS
DE ENSEÑANZA
TÉCNICA SUPERIOR

CAPÍTULOS ESPECIALES DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

REDACTORES
A. EFIMOV, B. DEMIDOVICH

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por
S. Ya. Kalashnik

На испанском языке
Impreso en la URSS

INDICE

PREFACIO 9

CAPÍTULO 8. INTEGRALES MÚLTIPLES 11

§ 1. Integral doble 11

1. Propiedades de la integral doble y su cálculo en coordenadas cartesianas rectangulares (11). 2. Cambio de variables en la integral doble (18). 3. Aplicaciones de las integrales dobles. Aplicaciones geométricas (22).

§ 2. Integral triple 30

1. La integral triple y su cálculo en las coordenadas rectangulares cartesianas (30). 2. Cambio de variables en la integral triple (32). 3. Aplicaciones de las integrales triples (34).

§ 3. Integrales múltiples impropias 38

1. Integral respecto a la región infinita (38). 2. Integral de una función discontinua (40).

§ 4. Cálculo de las integrales dependientes de un parámetro 42

1. Integrales propias dependientes de un parámetro (42). 2. Integrales impropias dependientes de un parámetro (46).

Respuestas 50

CAPÍTULO 9. ECUACIONES DIFERENCIALES 57

§ 1. Ecuaciones de primer orden 57

1. Conceptos fundamentales (57). 2. Método gráfico de construcción de curvas integrales (método de isoclinas) (59). 3. Ecuaciones con variables separables (60). 4. Ecuaciones homogéneas (62). 5. Ecuaciones lineales (64). 6. Ecuaciones de Bernoulli (67). 7. Ecuaciones diferenciales exactas (68). 8. Teorema de existencia y unicidad de la solución. Soluciones singulares (70). 9. Ecuaciones no resueltas respecto a la derivada (72). 10. Problemas mixtos de las ecuaciones diferenciales de primer orden (75). 11. Problemas geométricos y físicos que llevan a la resolución de las ecuaciones diferenciales de primer orden (77).

§ 2. Ecuaciones diferenciales de órdenes superiores 83

1. Nociones fundamentales. Teorema de Cauchy (83).

2. Ecuaciones que permiten la reducción del orden (85). 3. Ecuaciones homogéneas lineales (93). 4. Ecuaciones no homogéneas lineales (97). 5. Ecuaciones homogéneas lineales con coeficientes constantes (100). 6. Ecuaciones no homogéneas lineales con coeficientes constantes (103). 7. Ecuaciones diferenciales de Euler (107). 8. Problemas de contorno en el caso de las ecuaciones diferenciales lineales (109). 9. Problemas de carácter físico (110).

§ 3. Sistemas de ecuaciones diferenciales 112

1. Conceptos principales. Relación con las ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden (112). 2. Métodos de integración de los sistemas normales (116). 3. Sentido físico del sistema normal (119). 4. Sistemas homogéneos lineales (120). 5. Sistemas no homogéneos lineales (125).

§ 4. Elementos de la teoría de estabilidad 130

1. Conceptos fundamentales (130). 2. Tipos elementales de los puntos de reposo (133). 3. Método de funciones de Liapunov (135). 4. Estabilidad según la primera aproximación (137).

§ 5. Integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias 139

1. Problema de Cauchy (139). 2. Problema de contorno para la ecuación lineal (147).

Respuestas 149

CAPÍTULO 10. ANÁLISIS VECTORIAL 167

§ 1. Campos escalares y vectoriales. Gradiente 167

1. Características geométricas de los campos escalares y vectoriales (167). 2. Derivada direccional y gradiente del campo escalar (168).

§ 2. Integrales curvilíneas y de superficie 170

1. Integrales curvilíneas de primera especie (170). 2. Integral de superficie de primera especie (172). 3. Integral curvilínea de segunda especie (175). 4. Integral de superficie de segunda especie (178).

§ 3. Relaciones entre las distintas características de los campos escalares y vectoriales 182

1. Divergencia del campo vectorial y el teorema de Gauss—Ostrogradski (182). 2. Rotor del campo vectorial. Teorema de Stokes (184). 3. Operador de Hamilton y su aplicación (187). 4. Operaciones diferenciales de segundo orden (189).

§ 4. Tipos especiales de campos vectoriales 189

1. Campo vectorial potencial (189). 2. Campo solenoidal (192). 3. Campo laplaciano (o armónico) (193).

§ 5. Aplicación de las coordenadas curvilíneas en el análisis vectorial 195

1. Coordenadas curvilíneas. Relaciones principales (195). 2. Operaciones diferenciales del analisis vectorial en las coordenadas curvilíneas (198). 3. Campos escalares centrales, axiales y simétricos al eje (200).
Respuestas 201

CAPÍTULO 11. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA 206

§ 1. Funciones elementales 206
1. Concepto de función de variable compleja (206). 2. Límite y continuidad de una función de variable compleja. Funciones elementales (208).

§ 2. Funciones analíticas. Condición de Cauchy—Riemann 212
1. Derivada. Analiticidad de la función (212). 2. Propiedades de las funciones analíticas (215).

§ 3. Aplicaciones conformes 217
1. Sentido geométrico del módulo y del argumento de la derivada (217). 2. Aplicaciones conformes. Funciones lineal y lineal fraccional (218). 3. Función potencial (224). 4. Función de Zhukovski (226). 5. Función exponencial (228). 6. Funciones trigonométricas e hiperbólicas (229).

§ 4. Integral de una función de variable compleja 230
1. Integral por la curva y su cálculo (230). 2. Teorema de Cauchy. Fórmula integral de Cauchy (232).
Respuestas 236

CAPÍTULO 12. SERIES Y SUS APLICACIONES 246

§ 1. Series numéricas 246
1. Convergencia de la serie. Criterio de Cauchy (246). 2. Convergencia absoluta y condicional. Criterios de convergencia absoluta (249). 3. Criterios de convergencia condicional (256).

§ 2. Series de funciones 260
1. Región de convergencia de la serie de funciones (260). 2. Convergencia uniforme (262). 3. Propiedades de las series convergentes uniformemente (265).

§ 3. Series de potencias 267
1. Región de convergencia y propiedades de las series de potenciales (267). 2. Desarrollo de las funciones en serie de Taylor (270). 3. Teorema de unicidad. Prolongación analítica (277).

§ 4. Aplicación de las series de potencias 279
1. Cálculo de los valores de las funciones (279). 2. Integración de funciones (281). 3. Obtención de las sumas de series numéricas. Aceleración de la convergencia

(283). 4. Integración de las ecuaciones diferenciales aplicando las series (287). 5. Ecuación y funciones de Bessel (291).

§ 5. Series de Laurent 292

1. Series de Laurent. Teorema de Laurent (292). 2. Carácter de los puntos singulares aislados (297).

§ 6. Residuos y sus aplicaciones 299

1. Residuo de la función y su cálculo (299). 2. Teoremas sobre los residuos y sus aplicaciones al cálculo de las integrales de contorno (301). 3. Aplicación de los residuos al cálculo de las integrales definidas (303). 4. Principio del argumento (307).

§ 7. Series de Fourier. Integral de Fourier 308

1. Desarrollo de las funciones en series trigonométricas de Fourier (308). 2. Series dobles de Fourier (312). 3. Integral de Fourier (314). 4. Características espectrales de la serie y de la integral de Fourier (317). 5. Transformación discreta de Fourier (TDF) (319).

Respuestas 322

CAPÍTULO 13. CÁLCULO OPERACIONAL 355

§ 1. Transformación de Laplace 355

1. Definición y propiedades de la transformación de Laplace (355). 2. Ampliación de la clase de originales (363).

§ 2. Fórmula de inversión. Teoremas del desarrollo 365

§ 3. Aplicación del cálculo operacional para resolver las ecuaciones diferenciales 369

1. Resolución de las ecuaciones diferenciales lineales y de los sistemas de ecuaciones con coeficientes constantes (369). 2. Cálculo de los circuitos eléctricos (374). 3. Integración de las ecuaciones lineales en derivadas parciales (377).

§ 4. Funciones impulsivas 379

1. Función impulsiva de primer orden $\delta(t)$ (379). 2. Función impulsiva de segundo orden $\delta_1(t)$ (381). 3. Representaciones de las funciones impulsivas y sus aplicaciones (381).

§ 5. Aplicaciones del cálculo operacional a la resolución de las ecuaciones integrales e integrales diferenciales, al cálculo de las integrales impropias y a la sumación de las series 382

1. Resolución de las ecuaciones integrales lineales e integrales diferenciales (382). 2. Cálculo de las integrales impropias (384). 3. Sumación de las series (387).

§ 6. Transformación discreta de Laplace y su aplicación . . 389

1. Transformación Z y transformación discreta de Laplace (389). 2. Resolución de las ecuaciones en diferencias (396).

Respuestas 399

PREFACIO

El segundo tomo del libro «Problemas de matemáticas superiores para los centros de enseñanza técnica superior» contiene tales temas de matemáticas como el cálculo integral de las funciones de varias variables, análisis vectorial, ecuaciones diferenciales, conceptos fundamentales de la teoría de las funciones de variable compleja, series numéricas y funcionales y sus aplicaciones, cálculo operacional.

El material expuesto en este libro refleja las partes correspondientes del programa del curso de matemáticas superiores aprobado por el Ministerio de Enseñanza Superior y Media Especializada de la URSS.

Al igual que en el primer tomo, en el segundo cada párrafo comienza por una introducción teórica breve. A los problemas propuestos para la resolución individual preceden los ejemplos que se analizan detalladamente. Todos los problemas de cálculo tienen respuestas; los problemas marcados con uno o dos asteriscos vienen acompañados por indicaciones para resolverlos o por soluciones.

La particularidad de este libro consiste en que contiene problemas que exigen la utilización de ordenadores para resolverlos; estos problemas se dan en las secciones correspondientes. Luego, la teoría de las series funcionales y potenciales generales se expone aplicando la teoría de la funciones de variable compleja. Este enfoque, a nuestro juicio, permite apreciar de un modo adecuado las propiedades de las series potenciales y la representación de las funciones por series potenciales. Para los centros de enseñanza técnica superior en los cuales la teoría de las series se expone por separado en la región real y en la compleja, en los puntos correspondientes del § 2 del cap. 12 se dan primero los problemas de las series con funciones de variable real y en los problemas del § 3 la variable z puede considerarse real, es decir, se puede poner $z = x$.

Así como en el primer tomo el comienzo de las resoluciones de diversos ejemplos se indica con el signo ◀, el fin, con el signo ▶ ; y el comienzo de las indicaciones para los problemas, con el signo ●.

A pesar de que el trabajo referente a la composición de la recopilación de problemas fue distribuido entre los autores por capítulos, cada miembro del colectivo de autores lleva una responsabilidad completa por la recopilación en total.

El colectivo de autores aprovecha la ocasión para expresar una vez más la gratitud a los profesores Prilepco A. I., Trenóguin B. A. y Pojozháev S. I., jefes de las cátedras de matemáticas en los Institutos de Moscú de Ingeniería Física, de Acero y Aleaciones y Energético, así como a los colaboradores de estas cátedras que tomaron parte en la discusión del manuscrito del libro y hicieron valiosas observaciones mejorando así su contenido.

Los autores piden se comuniquen todas las observaciones y deseos referentes al contenido y la collección de los problemas a la dirección: 117071, Moscú B-71, Leninski prospect 15, Redacción principal de literatura físico-matemática.

CAPÍTULO 8

INTEGRALES MULTIPLES

§ 1. Integral doble

1. Propiedades de la integral doble y su cálculo en coordenadas rectangulares cartesianas. Sea la función $f(x, y) = f(P)$ definida y continua sobre la región cerrada y acotada G del plano Oxy, $\sigma_n = \{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n\}$ una partición de la región G en subregiones elementales $\Delta\sigma_k$, cuyas áreas designamos también por $\Delta\sigma_k$, y sus diámetros por d_k. Fijemos los puntos $P_k \in \Delta\sigma_k$, $k = 1, \ldots, n$. La expresión

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\,\Delta\sigma_k$$

se llama suma integral para la función $f(P)$ por la región G. Si existe el límite de sucesión de las sumas integrales S_n para $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} d_k \to 0$ (en este caso $n \to \infty$) y si este límite no depende ni del método de división de la región G en subregiones elementales $\Delta\sigma_k$, ni de la elección de los puntos $P_k \in \Delta\sigma_k$, entonces éste se llama *integral doble* de la función $f(x, y)$ por la región G y se designa mediante $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$.

De este modo,

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\,\Delta\sigma_k.$$

Para la integral doble son válidas las propiedades de linealidad y aditividad (véase el problema 1.1).

El cálculo de la integral doble se reduce al cálculo de las integrales reiteradas del modo siguiente. Sea la región G (fig. 79) limitada por las curvas $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$, además, las funciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ siempre son continuas sobre $[a, b]$ y $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$. Entonces

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dy\,dx = \int_b^a dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, x)\,dy, \qquad (1)$$

con la particularidad de que primero se calcula la integral interna por la variable y (x es parámetro) y el resultado obtenido se integra según x. Señalemos que si la curva $\varphi_1(x)$ (o la curva $\varphi_2(x)$) en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ está definida por distintas expresiones analíticas, por ejemplo,

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi_1^{(1)} x & \text{para } a \leqslant x \leqslant c, \\ \varphi_1^{(2)}(x) & \text{para } c < x \leqslant b, \end{cases}$$

entonces la integral por la derecha se escribe en forma de suma de dos integrales

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy = \int_a^c dx \int_{\varphi_1^{(1)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy + \int_c^b dx \int_{\varphi_1^{(2)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

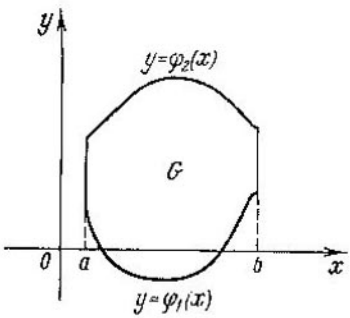


Fig. 79

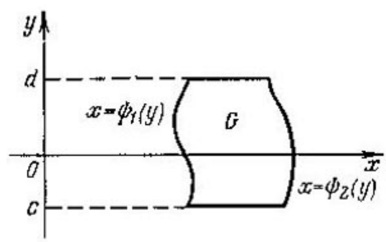


Fig. 80

Análogamente, si la región G está limitada por las curvas $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = d$, y las funciones $\psi_1(y)$ y $\psi_2(y)$ siempre son continuas sobre $[c, d]$ y $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ (fig. 80), entonces

$$\iint_G f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx. \tag{2}$$

La integral doble representada en forma de (1) ó (2) se llama también integral reiterada.

EJEMPLO 1. Determínense los límites de integración por dos modos y calcúlese la integral doble $I = \iint_G \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy$ si la región de integración G está limitada por las líneas $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$.

◀ La forma de la región G (fig. 81) permite aplicar la fórmula (1) para $\varphi_1(x)=\frac{1}{x}$, $\psi_2(x)=x$, $a=1$, $b=2$:

$$I=\iint\limits_G \frac{x^2}{y_2}\,dx\,dy=\int\limits_1^2 x^2\,dx\int\limits_{1/x}^{x}\frac{dy}{y^2}=\int\limits_1^2 x^2\left(-\frac{1}{y}\Big|_{1/x}^{x}\right)dx$$

$$=\int\limits_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=2\,\frac{1}{4}.$$

Si para calcular la integral doble se aplica la fórmula (2) entonces se debe poner

$$\psi_1(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y} & \text{para } \dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1,\\ y & \text{para } 1<y\leqslant 1,\end{cases}\qquad \psi^2(x)=2,$$

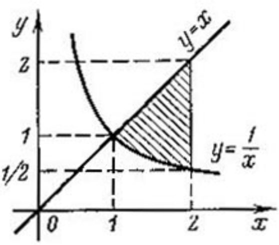


Fig. 81

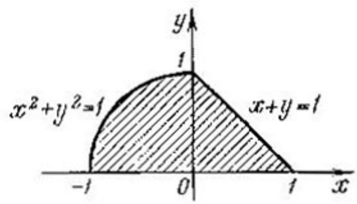


Fig. 82

$c=\frac{1}{2}$, $d=2$. Entonces

$$I=\iint\limits_G \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy=\int\limits_{1/2}^{1}\frac{dy}{y^2}\int\limits_{1/y}^{2}x^2\,dx+\int\limits_1^2\frac{dy}{y^2}\int\limits_y^2 x^2\,dx.$$

Es evidente que el primer método de cálculo en este ejemplo es más conveniente que el segundo.

EJEMPLO 2. Cámbiese el orden de integración en la integral reiterada

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,\,y)\,dx.$$

◀ Construyamos la región de integración G según los límites de integración: $\psi_1(y)=-\sqrt{1-y^2}$, $\psi_2(y)=1-y$, $y=0$, $y=1$

(fig. 82). Superiormente la región G está limitada por la curva

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{para } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-x & \text{para } \quad 0<x<1,\end{cases}$$

e inferiormente por la curva $y=0$. Por esto tenemos

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,\ y)\,dy=$$

$$=\int_{-1}^{0} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy+\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,\ y)\,dy. \ \blacktriangleright$$

1.1. Utilizando la definición de la integral doble demuéstrense las siguientes propiedades suyas:

a) linealidad:

$$\iint_G (f(x,\ y)\pm g(x,\ y))\,dx\,dy=$$

$$=\iint_G f(x,\ y)\,dx\,dy\pm\iint_G g(x,\ y)\,dx\,dy$$

y

$$\iint_G \lambda f(x,\ y)\,dx\,dy=\lambda\iint_G f(x,\ y)\,dx\,dy \quad (\lambda\in\mathbb{R});$$

b) aditividad: si $G=G_1+G_2$ entonces

$$\iint_G f(x,\ y)\,dx\,dy=\iint_{G_1} f(x,\ y)\,dx\,dy+\iint_{G_2} f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Calcúlense las integrales reiteradas:

1.2. $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^2 (x^2+y)\,dy.$ **1.3.** $\displaystyle\int_0^2 dx\int_x^{x\sqrt{3}} \frac{x\,dy}{x^2+y^2}.$

1.4. $\displaystyle\int_1^3 dy\int_2^5 \frac{dx}{(x+2y)^2}.$

1.5 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr.$

1.6. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r^3\,dr.$

Para las integrales reiteradas dadas escríbanse las ecuaciones de las curvas que limitan las regiones de integración y constrúyanse estas regiones:

1.7. $\int_1^2 dx \int_x^{x+3} f(x, y)\, dy.$

1.8. $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} f(x, y)\, dy.$

1.9. $\int_0^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\, dx.$

1.10. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)\, dy.$

Para las regiones G indicadas más abajo escríbase la integral doble

$$\iint_G f(x, y)\, dx\, dy$$

en forma de integrales reiteradas tomadas en distintos órdenes

1.11. G es un rectángulo con los vértices A (1, 2), B (5, 2), C (5, 4), D (1, 4).

1.12. G es un paralelogramo limitado por las rectas $y = x$, $y = x - 3$, $y = 2$, $y = 4$.

1.13. G es una región limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 2a^2$, $x^2 = ay$ $(a > 0,\ y > 0)$.

1.14. G es una región limitada por las curvas $y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ $(a > 0,\ y > 0)$.

1.15. G es una región limitada por las curvas $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ $(a > 0,\ y > 0)$.

1.16. ¿Según qué variable está tomada la integral exterior en la integral reiterada

$$\int_1^2 \int_{-\sqrt{x}}^{x^3} f(x, y)\, dy\, dx?$$

¿Cuál es la región de integración?

Cámbiese el orden de integración en las siguientes integrales reiteradas:

1.17. $\int\limits_{-1}^{6} dx \int\limits_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x, y)\, dy.$

1.18. $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f(x, y)\, dx.$

1.19. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y)\, dy.$

1.20. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2/9}^{y} f(x, y)\, dx + \int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{y^2/9}^{1} f(x, y)\, dx.$

1.21. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\frac{x+2}{2}} f(x, y)\, dy + \int\limits_{2}^{10/3} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x, y)\, dy.$

1.22. $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy.$

1.23. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{y^2/2} f(x, y)\, dx.$

1.24. $\int\limits_{3}^{7} dx \int\limits_{9/x}^{3} f(x, y)\, dy + \int\limits_{7}^{9} dx \int\limits_{9/x}^{10-x} f(x, y)\, dy.$

1.25. Muéstrese que

$$\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{x} f(x, y)\, dy = \int\limits_{0}^{a} dy \int\limits_{y}^{a} f(x, y)\, dx$$

y aplicando esta fórmula, demuéstrese la *fórmula de Dirichlet*

$$\int\limits_{0}^{t} dx \int\limits_{0}^{x} f(y)\, dy = \int\limits_{0}^{t} (t-y) f(y)\, dy.$$

Calcúlense las siguientes integrales:

1.26. $\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las rectas $y=x$, $x+y=2a$, $x=0$.

1.27. $\iint\limits_G \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy$, donde G es un trapecio con vértices $A(1,\ 1)$, $B(5,\ 1)$, $C(10,\ 2)$, $D(2,\ 2)$.

1.28. $\iint\limits_G xy\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las curvas $x+y=2$, $x^2+y^2=2y$.

1.29. $\iint\limits_G y\,dx\,dy$, donde G es un triángulo con vértices $O(0,\ 0)$, $A(1,\ 1)$, $B(0,\ 1)$.

1.30. $\iint\limits_G (x+2y)\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las curvas $y=x^2$ o $y=\sqrt{x}$.

1.31. $\iint\limits_G (4-y)\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las curvas $x^2=4y$, $y=1$, $x=0\ (x>0)$,

1.32. $\iint\limits_G \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, donde la región G está limitada por las curvas $y=x\operatorname{tg}x$, $y=x$.

1.33. $\iint\limits_G \sqrt{a^2+x^2}\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las curvas $y^2-x^2=a^2$, $x=a$, $x=0$, $y=0\ (y>0)$.

1.34. $\iint\limits_G e^{x+y}\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las curvas $y=e^x$, $x=0$, $y=2$.

1.35*. $\iint\limits_G x^2y\,dx\,dy$, donde la región está limitada por el eje Ox y el arco de la elipse $x=a\cos t$, $y=b\operatorname{sen}t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi/2)$.

1.36. $\iint\limits_G x\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por el eje Ox y la onda de una cicloide $x=a\,(t-\operatorname{sen}t)$, $y=a\,(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,

1.37. $\iint\limits_{G} y\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por los ejes de coordenadas y el arco de una astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$.

1.38. Hállese el valor medio de la función $f(x, y) = \cos^2 x \cos^2 y$ en la región $G = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2\}$.

1.39*. Estímese la magnitud de la integral

$$I = \iint\limits_{|x|+|y| \leqslant 3} \frac{dx\,dy}{9 + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 (x+y)}.$$

1.40. Hálleso el valor medio de la función $f(x, y) = 3x + 2y$ en el triángulo con vértices $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

2. Cambio de variables en la integral doble. Supongamos que las funciones

$$x = \varphi(u, v) \text{ e } y = \psi(u, v) \tag{3}$$

realizan una aplicación biunívoca continuamente diferenciable de la región Γ del plano O_1uv sobre la región G del plano Oxy. Esto significa, que en la región G existe una aplicación continuamente diferenciable inversa $u = \eta(x, y)$ y $v = \chi(x, y)$ y en la región Γ el jacobiano de transformación es diferente de cero, es decir,

$$I(x, v) = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{matrix} \right\| \neq 0 \ (u, v) \in \Gamma. \tag{4}$$

Las magnitudes u y v pueden considerarse como coordenadas rectangulares para los puntos de la región Γ y al mismo tiempo como coordenadas *curvilíneas* de los puntos de la región G.

Si en la integral doble

$$\iint\limits_{G} f(y, y)\,dx\,dy$$

cambiamos las variables según la fórmula (3), la región de integración de la integral obtenida será la región que al elegir adecuadamente las funciones $\varphi(u, v)$ y $\psi(u, v)$ puede resultar más simple que la región G, además tiene lugar la fórmula:

$$\iint\limits_{G} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Gamma} f(\varphi(y, v), \psi(u, v))\,|(u, v))|\,du\,dv. \tag{5}$$

Para calcular la integral por la región Γ se emplean los métodos, expuestos en el p. 1, de reducción de la integral doble a las reiteradas.

EJEMPLO 3. Calcúlese $\iint\limits_G \sqrt{xy}\,dx\,dy$ si la región G está limitada por las curvas $y^2=ax$, $y^2=bx$, $xy=p$, $xy=q$ $(0<a<b,\ 0<p<q)$.

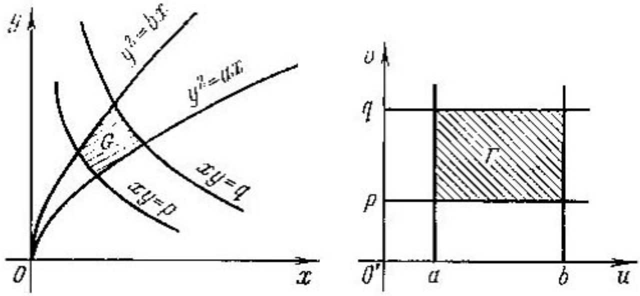


Fig. 83

◀ Pasemos a las nuevas variables u y v según las fórmulas $y^2 = ux$, $xy = v$. Entonces

$$x=u^{-1/3}v^{2/3}, \qquad y=u^{1/3}v^{1/3}.$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3},$$

$$I(u,\ v)=\begin{Vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \end{Vmatrix}=-\frac{1}{3u}$$

$$|I(u,\ v)|=\frac{1}{3u} \text{ para } u>0.$$

Las ecuaciones de las líneas toman la forma

$$u=a,\ u=b,\ v=p,\ v=q.$$

La región G del plano Oxy se transforma en el rectángulo Γ del plano $O'uv$ (fig. 83). Empleando la fórmula (5) obtenemos

$$\iint\limits_G \sqrt{xy}\,dx\,dy=\frac{1}{3}\iint\limits_\Gamma \sqrt{v}\,\frac{du\,dv}{u}=\frac{1}{3}\int\limits_a^b \frac{du}{u}\int\limits_p^q \sqrt{v}\,dv=$$

$$=\frac{1}{3}\ln u\Big|_a^b\cdot\frac{2}{3}v^{3/2}\Big|_p^q=\frac{2}{9}\left(q^{3/2}-p^{3/2}\right)\ln\frac{b}{a}. \ ▶$$

Entre las coordenadas curvilíneas las más usadas son las coordenadas polares

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r \operatorname{sen}\varphi,$$

para las cuales

$$I(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

y la fórmula (5) se escribe en forma

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_\Gamma f(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \tag{6}$$

Ejemplo 4. Pasando a las coordenadas polares calcúlese la integral doble

$$\iint\limits_G (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

donde la región G está limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 2ax$.

◀ Pongamos $x = r\cos\varphi$, $y = r\operatorname{sen}\varphi$ y apliquemos la fórmula (6). Puesto que $x^2 + y^2 = r^2$, entonces

$$\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_\Gamma r^3\,dr\,d\varphi.$$

La ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 2ax$ se transforma en $r = 2a\cos\varphi$. Por esto la región Γ es la región limitada inferiormente por el eje $r = 0$, superiormente por la cosinusoide $r = 2a\cos\varphi$, con la particularidad de que $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Por consiguiente

$$\iint\limits_\Gamma r^3\,dr\,d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} r\,dr^3 =$$

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{2a\cos\varphi}\right) d\varphi = 4a^4 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi =$$

$$= 8a^4 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi = 8a^4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^4. \ ▶$$

Pásese a las coordenadas polares y determínense los límites de integración por las nuevas variables en las integrales siguientes:

1.41. $\displaystyle\int\limits_0^{3a/4} dx \int\limits_{\frac{a\sqrt{3}}{2} - \sqrt{\frac{3a^2}{4} - x^2}}^{\sqrt{ax - x^2}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy.$

1.42. $\int_0^a dx \int_{\sqrt{ax}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy.$

1.43. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx.$

1.44. $\iint\limits_G f\left(\frac{y}{x}\right) dx\, dy$, donde la región G está limitada por las líneas $x^2+y^2=\sqrt{6}x$, $(x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2)$, $y=0$ $(y\geqslant 0,\ x\leqslant\sqrt{6})$.

Pasando a las coordenadas polares calcúlense las siguentes integrales:

1.45. $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dy.$

1.46. $\int_0^a dy \int_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$

1.47. $\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2-9}\, dx\, dy$ donde la región G es un anillo entre dos circunferencias $x^2+y^2=9$ y $x^2+y^2=25$.

1.48. $\iint\limits_G \frac{dx\, dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ donde la región G es una parte del círculo de radio a con el centro en el punto $O(0, 0)$, la cual está situada en el primer cuadrante.

1.49. $\iint\limits_G (x^2+y^2)\, dx\, dy$, donde la región G está limitada por las curvas $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax$, $y=0$ $(y>0)$.

1.50. $\iint\limits_G \frac{x\, dx\, dy}{x^2+y^2}$ donde la región G está limitada por las curvas $x^2=ay$, $x^2+y^2=2a^2$, $y=0$ $(x>0,\ a>0)$.

1.51. $\iint\limits_G x\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$ donde la región G está limitada por el pétalo de la lemniscata $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\geqslant 0)$.

Pásese a las nuevas variables u y v y determínense los límites de integración en las siguientes integrales:

1.52. $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ donde la región G está determinada por las desigualdades $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x+y \leqslant a$. Pónganse $u = x + y$, $ay + uv$.

1.53. $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ donde la región G está limitada por las curvas $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$ $(0 < a < b)$ $0 < p < q)$. Pónganse $x^2 = uy$, $y^2 = vx$.

1.54. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{1-x}^{3-x} f(x, y)\,dy$. Pónganse $u = x + y$, $v = x - y$.

1.55. $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ donde la región G está limitada por las curvas $xy = p$, $xy = q$, $y = ax$, $y = bx$ $(0 < p < q$, $0 < a < b)$. Pónganse $u = xy$, $y = vx$.

Calcúlense las siguientes integrales dobles:

1.56. $\iint\limits_G \dfrac{dx\,dy}{\sqrt{c^2 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}}$ $(c > 1)$ donde la región G esta limitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (pásese a las *coordenadas polares generalizadas* r y φ aplicando las fórmulas $x = ar\cos\varphi$, $y = br\operatorname{sen}\varphi$).

1.57. $\iint\limits_G e^{(x+y)^2}\,dx\,dy$, donde la región G está dada por las desigualdades $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$ (realícese el cambio de las variables $x = u(1 - v)$, $y = uv$).

1.58. $\iint\limits_G xy\,dx\,dy$ donde la región G está limitada por las líneas $y = ax^3$, $y = bx^3$, $y^2 = px$, $y^2 = qa$ $(0 < a < b$, $0 < p < q)$ (escójase el cambio adecuado de las variables).

3. Aplicaciones de las integrales dobles. *Aplicaciones geométricas.* El *área* S de la región plana G se expresa, en función del sistema que se analiza, mediante las siguientes integrales

$$S = \iint\limits_G dx\,dy \qquad (1)$$

en las coordenadas rectangulares cartesianas,

$$S=\iint_{\Gamma} |I|\, du\, dv \tag{8}$$

en las coordenadas curvilíneas. Aquí

$$I=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ en la región } \Gamma.$$

En particular, en las coordenadas polares $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ tenemos

$$S=\iint_{\Gamma} r\, dr\, d\varphi. \tag{9}$$

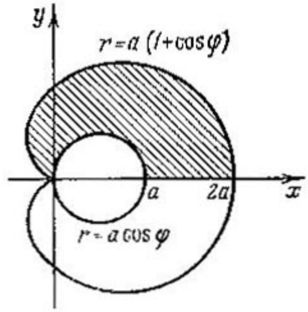


Fig. 84

EJEMPLO 5. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $r=a(1+\cos\varphi)$ y $r=a\cos\varphi$ $(a>0)$.

◀ En el plano Oxy la figura está representada en la fig. 84. Calcúlese por la fórmula (9) el área de la parte superior y dóblese:

$$S=2\iint_{\Gamma} r\,dr\,d\varphi=2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr+$$

$$+2\int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr=\int_0^{\pi/2}\left(r^2\Big|_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)}\right)d\varphi+$$

$$+\int_{\pi/2}^{\pi}\left(r^2\Big|_0^{a(1+\cos\varphi)}\right)d\varphi=a^2\int_0^{\pi/2}(1+2\cos\varphi)\,d\varphi+$$

$$+a^2\int_{\pi/2}^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=a^2(\varphi+2\operatorname{sen}\varphi)\Big|_0^{\pi/2}+$$

$$+a^2\left(\frac{3\varphi}{2}+2\operatorname{sen}\varphi+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\varphi\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{5}{4}\pi a^2. \ ▶$$

Si la superficie suave tiene la ecuación $z=f(x, y)$, entonces el *área* de una parte de esta *superficie* que se proyecta en la región G del plano Oxy es igual a

$$Q=\iint_{G}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \tag{10}$$

(la función $z=f(x, y)$ es unívoca en la región G).

EJEMPLO 6. Hállese el área de una parte de la superficie del paraboloide $y^2 + z^2 = 2ax$ que se encuentra entre el cilindro $y^2 = ax$ y el plano $x = a$ $(a > 0)$.

◀ La mitad superior del paraboloide dado se describe por la ecuación $z = \sqrt{2ax - y^2}$. Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a}{\sqrt{2ax-y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{2ax-y^2}},$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{a^2+y^2}{2ax-y^2} = \frac{2ax+a^2}{2ax-y^2}.$$

Ya que la superficie que se examina es también simétrica respecto al plano Oyz, entonces el área buscada se calcula como el área cuadri-

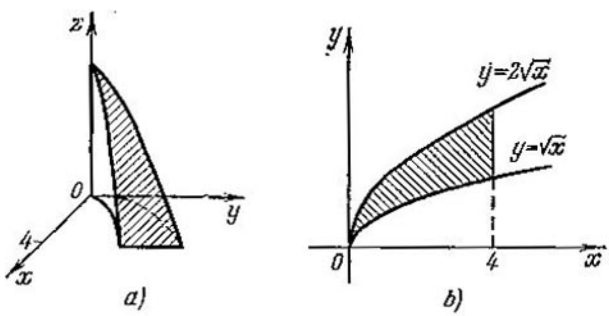


Fig. 85

plicada de una parte de esta superficie situada en el primer octante:

$$Q = 4 \iint_G \sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax-y^2}}\, dx\, dy = 4 \int_0^a \sqrt{2ax+a^2}\, dx \int_0^{\sqrt{ax}} \times$$

$$\times \frac{dy}{\sqrt{2ax-y^2}} = 4 \int_0^a \sqrt{2ax+a^2} \left(\operatorname{arcsen} \frac{y}{\sqrt{2ax}} \Big|_0^{\sqrt{ax}} \right) dx =$$

$$= 4 \int_0^a \sqrt{2ax+a^2}\, \frac{\pi}{4}\, dx = \frac{\pi}{3a} (2ax+a^2)^{3/2} \Big|_0^a =$$

$$= \frac{\pi}{3a} (3\sqrt{3}\, a^3 - a^3) = \frac{\pi a^2}{3} (3\sqrt{3} - 1). \ ▶$$

El *volumen V del cilindro* limitado superiormente por la superficie continua $z = f(x, y)$, inferiormente por el plano $z = 0$ y por los lados mediante la superficie cilíndrica plana que corta en el plano Oxy la región G, se expresa por la integral

$$V=\iint_G f(x, y)\,dx\,dy \tag{11}$$

(la función $f(x, y) \geqslant 0$ es unívoca en la región G).

Ejemplo 7. Hállese el volumen de cuerpo limitado por las superficies $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x+z=4$, $z=0$.

◀ El cuerpo dado es un cilindroide limitado superiormente por el plano $x+z=4$, inferiormente por el plano $z=0$ y por los lados mediante los cilindros rectos $y=\sqrt{x}$ e $y=2\sqrt{x}$ (fig. 85, a). La región de integración está representada en la fig. 85, b.

Tenemos: $z=4-x$,

$$V=\iint_G (4-x)\,dx\,dy=\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(4-x)\,dy=$$

$$=\int_0^4 (4-x)(2\sqrt{x}-\sqrt{x})\,dx=\int_0^4 (4-x)\sqrt{x}\,dx=$$

$$=\left(4\cdot\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{2x^{5/2}}{5}\right)\Bigg|_0^4=\frac{128}{15}.\ ▶$$

1.59. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y^2=4ax+4a^2$ y $x+y=2a$ $(a>0)$.

1.60. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $xy=4$ y $x+y=5$.

1.61. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$, $x=2y$, $x=0$ $(a>0)$.

1.62*. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $x^2+y^2=2ax$, $x^2+y^2=2bx$, $y=x$, $y=0$ $(0<a<b)$.

1.63. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $r=a(1-\cos\varphi)$ y $r=a$ (fuera de la cardioide).

1.64. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ y $x^2+y^2=2ax$.

1.65*. Hállese el área de la figura limitada por el bucle de la curva $(x+y)^4=ax^2y$ que se encuentra en el primer cuadrante $(a>0)$.

1.66*. Hállese el área de la figura limitada por la curva $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{c^2}$.

1.67*. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $my^2 = x^3$, $ny^2 = x^3$ $(0 < a < b$, $(0 < m < n)$.

1.68*. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $y = ax$, $y = bx$ $(0 < p < q, 0 < a < < b)$.

1.69. Hállese el área de una parte del plano $x + y + + z = a$, que está cortada por el cilindro $y^2 = ax$ y el plano $x = a$.

1.70. Hállese el área de una parte de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está cortada por el cilindro $y^2 = = a(a - x)$.

1.71. Hállese el área de una parte de la superficie del cono $x^2 + z^2 = y^2$ que está cortada por el cilindro $y^2 = 2px$ $(p > 0)$.

1.72. Hállese la superficie total del cuerpo limitado por los cilindros $x^2 = ay$, $z^2 = ay$ y el plano $y = 2a$ $(a > 0)$.

1.73. Hállese el área de una parte de la superficie del cono $x^2 + z^2 = y^2$ que está cortada por los planos $x = 0$, $x + y = 2a$, $y = 0$.

1.74. Hállese el área de una parte de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ que está cortada por el cilindro $z^2 = = 2a(2a - x)$.

1.75. Hállese el área de una parte de la esfera $x^2 + y^2 + + z^2 = 2a^2$ que está dentro del cono $x^2 + y^2 = z^2$.

1.76. Hállese el área de una parte de la superficie del paraboloide $z = x^2 - y^2$ que está entre los paraboloides $z = 3x^2 + y^2 - 2$ y $z = 3x^2 + y^2 - 4$.

1.77. Hállese el área de una parte de la esfera $x^2 + y^2 + + z^2 = a^2$ que se corta por el cilindro con las generatrices paralelas al eje Oz; la rosácea de tres pétalos $r = a \operatorname{sen} 3\varphi$ sirve de directriz de éste.

1.78. Hállese el área de una parte de la superficie helicoidal $z = a \operatorname{arctg} x$ que se corta por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

1.79. Hállese el área de una parte de la esfera $x^2 + y^2 + + z^2 = 1$ situada entre los planos $z = \frac{\sqrt{3}}{3} y$ y $z = y$ $(z \geqslant 0$, $y \geqslant 0)$.

1.80. Hállese el área de una parte de la superficie del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que se corta por un cilindro con generatrices paralelas al eje Oz; la cardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$ sirve de directriz de éste.

1.81. Hállese el área de una parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se corta de ésta por el cilindro $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$.

Hállense los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies indicadas:

1.82. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0)$.

1.83*. $z^2 - x^2 = a^2$, $z^2 - y^2 = a^2$, $z = a\sqrt{2}$ $(a > 0)$.

1.84. $y = x^2$, $z = y$, $z + y = 2$.

1.85. $x^2 - y^2 = 2az$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ (dentro del cilindro; $a > 0$).

1.86. $x^2 + y^2 - 2z^2 = -a^2$, $2(x^2 + y^2) - z^2 = a^2$ $(a > 0)$.

1.87. $z = ce^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

1.88. $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 - 2z^2 = -a^2$ $(a > 0)$.

1.89. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

1.90*. $z = xy$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y^2 = x$, $y^2 = 3x$.

1.91*. $z = x^2 + y^2$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$, $(x > 0,\ y > 0)$.

Aplicaciones mecánicas. Si una placa ocupa la región G del plano Oxy y tiene una densidad superficial variable $\gamma = \gamma(x, y)$, entonces la *masa* M de la placa y sus *momentos estáticos* M_x y M_y respecto a los ejes Ox y Oy se expresan mediante integrales dobles

$$
\begin{aligned}
M &= \iint_G \gamma(x, y)\,dx\,dy, \\
M_x &= \iint_G y\gamma(x, y)\,dx\,dy, \qquad (12) \\
M_y &= \iint_G x\gamma(x, y)\,dx\,dy.
\end{aligned}
$$

Las coordenadas del *centro de masas* $\bar{x}$ e $\bar{y}$ de la placa se determinan del modo siguiente:

$$
\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_G x\gamma(x, y)\,dx\,dy}{\iint_G \gamma(x, y)\,dx\,dy}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_G y\gamma(x, y)\,dx\,dy}{\iint_G \gamma(x, y)\,dx\,dy}. \qquad (13)
$$

Los *momentos de inercia* de la placa respecto a los ejes Ox y Oy son, respectivamente, iguales a

$$I_x=\iint\limits_G y^2\gamma(x,\ y)\,dx\,dy,$$
$$I_y=\iint\limits_G x^2\gamma(x,\ y)\,dx\,dy, \tag{14}$$

y el momento de inercia respecto al origen de coordenadas (momento de inercia *polar*) es igual

$$I_O=\iint\limits_G (x^2+y^2)\,\gamma(x,\ y)\,dx\,dy=I_x+I_y. \tag{15}$$

Si la placa es homogénea entonces en las fórmulas (12)—(15) se debe poner $\gamma(x,\ y)=1$.

EJEMPLO 8. Hállense las coordenadas del centro de masas de la placa homogénea limitada por las curvas $ay=x^2$, $x+y=2a$ $(a>0)$.

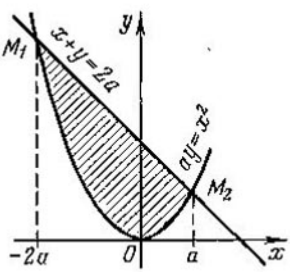


Fig. 86

◀ Las líneas se cortan en los puntos $M_1(-2a,\,4a)$, $M_2(a,\,a)$ (fig. 86). Por esto se puede escribir:

$$S=\iint\limits_G dx\,dy=\int\limits_{-2a}^{a}dx\int\limits_{x^2/a}^{2a-x}dy=\int\limits_{-2a}^{a}\left(2a-x-\frac{x^2}{a}\right)dx=$$
$$=\left(2ax-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3a}\right)\Big|_{-2a}^{a}=\frac{9}{2}\,a^2;$$

$$M_x=\iint\limits_G y\,dx\,dy=\int\limits_{-2a}^{a}dx\int\limits_{x^2/a}^{2a-x}y\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_{-2a}^{a}\left((2a-x)^2-\frac{x^4}{a^2}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{(2a-x)^3}{3}-\frac{x^5}{5a^2}\right)\Big|_{-2a}^{a}=\frac{36}{5}\,a^3;$$

$$M_y=\iint\limits_G x\,dx\,dy=\int\limits_{-2a}^{a} x\,dx\int\limits_{x^2/a}^{2a-x} dy=\int\limits_{-2a}^{a} x\,(2a-x-x^2/a)\,dx=$$

$$=\left(ax^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4a}\right)\Big|_{-2a}^{a}=-\frac{9}{4}\,a^3.$$

Sustituyendo los valores hallados en la fórmula (13) tenemos

$$\bar{x}=\frac{M_y}{S}=-\frac{a}{2},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{S}=\frac{8}{5}\,a. \blacktriangleright$$

1.92. Hállese la masa de una placa redonda de radio R si su densidad es proporcional al cuadrado de la distancia del punto hasta el centro y es igual a δ en el borde de la placa.

1.93. Hállense los momentos estáticos respecto a los ejes Ox y Oy de la figura homogénea limitada por la cardioide $r=a\,(1+\cos\varphi)$ y el eje polar.

1.94. Hállense las coordenadas del centro de masas de una figura homogénea limitada por las curvas $y^2=ax$, $y=x$.

1.95. Hállese la masa de una placa que tiene forma de un triángulo rectángulo con catetos $OB=a$ y $OA=b$, si la densidad en cualquier punto es igual a la distancia del punto hasta el cateto OA.

1.96. Hállense los momentos estáticos respecto a los ejes Ox y Oy de una figura homogénea limitada por la sinusoide $y=\operatorname{sen} x$ y la recta OA que pasa por el origen de coordenadas y el vértice $A\,(\pi/2,\ 1)$ de la sinusoide.

1.97. Hállense las coordenadas del centro de masas de una figura homogénea limitada por las curvas $xy=a^2$, $y^2=8ax$, $x=2a$ $(a>0)$.

1.98. Hállense los momentos de inercia de un triángulo homogéneo limitado por las rectas $x+y=1$, $x+2y=2$, $y=0$ respecto a los ejes Ox y Oy.

1.99. Hállense las coordenadas del centro de masas de una figura homogénea limitada por el bucle de la curva $r=a\operatorname{sen} 2\varphi$ que está situado en el primer cuadrante.

1.100. Hállense los momentos de inercia de una figura homogénea limitada por la cardioide $r=a\,(1+\cos\varphi)$ con respecto a los ejes Ox, Oy y con respecto al polo.

1.101. Hállense los momentos de inercia de una figura homogénea limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ con respecto a los ejes Ox, Oy y con respecto al origen de coordenadas.

1.102*. Hállense los momentos de inercia de una figura homogénea limitada por las curvas $y^2 = ax$, $y = a$, $x = 0$:
a) respecto al origen de coordenadas,
b) respecto a la recta $x = -a$.

1.103. Hállense los momentos de inercia de un triángulo limitado por las rectas $x + y = a$, $x = a$, $y = a$, con respecto a los ejes Ox, Oy y con respecto al origen de coordenadas, si la densidad es proporcional a la ordenada del punto.

1.104. Hállese el momento de inercia de una figura homogénea limitada por la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ respecto al polo.

1.105. Hállense los momentos de inercia de un sector circular homogéneo de radio a, con el ángulo α en el vértice (que coincide con el origen de coordenadas), con respecto a los ejes Ox y Oy.

1.106*. Una placa fina tiene forma de anillo circular con radios R_1 y R_2 $(R_1 < R_2)$. El calor específico de la placa varía según la ley $c = |xy|$, la densidad es constante e igual a γ. Hállese la cantidad de calor Q recibida por la placa al calentarla desde la temperatura t_1 hasta la temperatura t_2.

1.107*. Sobre una placa fina que tiene forma de segmento parabólico con base $2a$ y altura h, está distribuida una carga eléctrica con una densidad superficial de $\sigma = 2x + y$. Hállese la carga total E de la placa.

§ 2. Integral triple

1. La integral triple y su cálculo en coordenadas rectangulares cartesianas. Se llama *integral triple* de una función continua $f(x, y, z)$ sobre una región espacial cerrada y acotada T, al límite de la sucesión de las sumas integrales tridimensionales correspondientes, cuando el mayor de los diámetros d_k de las regiones elementales Δv_k tiende al cero, si este límite no depende ni del procedimiento de partición de la región T en subregiones elementales Δv_k, ni de la elección de los puntos intermedios:

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\text{máx } d_k \to 0} \sum_{k=0}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta v_k, \qquad (1)$$

donde $(x_k, y_k, z_k) \in \Delta v_k$. Con Δv_k se désigna tanto la región elemental, como su volumen. Las propiedades de las integrales triples son semejantes a las de integrales dobles.

El cálculo de la integral triple en coordenadas cartesianas se reduce al cálculo sucesivo de una integral simple y una integral doble o al cálculo de tres integrales simples. Si, por ejemplo, la región de integración T está acotada por abajo por la superficie $z = \varphi_1(x, y)$, por arriba por la superficie $z=\varphi_2(x, y)$ $(\varphi_1(x, y) \leqslant \varphi_2(x, y))$ y por los lados mediante los cilindros rectos, cuya sección por el plano Oxy es la región G, entonces la integral triple (1) se calcula por la fórmula

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_G dx\,dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{2}$$

Escribiendo la integral doble respecto a la región G con ayuda de una de las integrales reiteradas, obtenemos:

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{3}$$

Ejemplo 1. Calcúlese $\iiint_T z\,dx\,dy\,dz$ si la región T está limitada por los planos $x+y+z=1$, $z=0$, $y=0$, $x=0$.

◀ Tenemos

$$\iiint_T z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{1-x-y} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{(1-x-y)^3}{3} \Big|_{y=0}^{1-x} \right) dx = \frac{1}{6} (1-x)^3\,dx =$$

$$= \frac{1}{6} \left(-\frac{(1-x)^4}{4} \Big|_{x=0}^{1} \right) = \frac{1}{24}. \ \blacktriangleright$$

Pónganse los límites de integración en la integral triple $\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ para las regiones indicadas T:

2.1. La región T es un tetraedro limitado por los planos $2x+3y+4z=12$, $z=0$, $x=0$.

2.2. La región T es el interior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2.3. La región T está limitada por las superficies $y^2 + 2z^2 = 4x$, $x = 2$.

Calcúlense las integrales:

2.4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz.$

2.5. $\iiint\limits_T (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, donde T es un tetraedro limitada por los planos $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2.6. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{xy}} z\,dz.$

2.7. $\iiint\limits_T xyz\,dx\,dy\,dz$, donde la región T está limitada por las superficies $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$.

2. Cambio de variables en la integral triple. Si en la integral triple

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

se cambian las variables según las fórmulas $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ y además las funciones $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, w, v)$ realizan una aplicación biunívoca de la región T del espacio $Oxyz$ sobre la región T_1 del espacio $O_1\,uvw$ y el jacobiano de transformación no se anula en la región T_1:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces es válida la fórmula

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{T_1} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\,|I|\,du\,dv\,dw. \qquad (4)$$

Las coordenadas curvilíneas más usadas son las coordenadas *cilíndricas* r, φ, z (fig. 87): $x = r\cos\varphi$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $z = z$, cuyo jacobiano es $I = r$, y las coordenadas *esféricas* r (longitud del radio vector), φ

(longitud), θ (latitud) (fig. 88): $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta$, $z = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, cuyo jacobiano $I = r^2\cos\theta$. La fórmula (4) toma, respectivamente, la forma

$$\iiint\limits_{T} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{T_1} f(r\cos\varphi,\ r\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz \qquad (5)$$

ó

$$\iiint\limits_{T} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{T_1} f(r\cos\varphi\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta. \qquad (6)$$

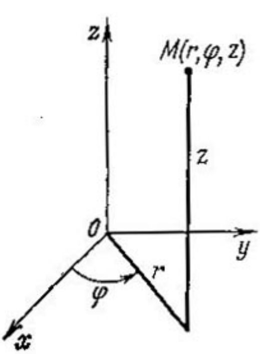


Fig. 87

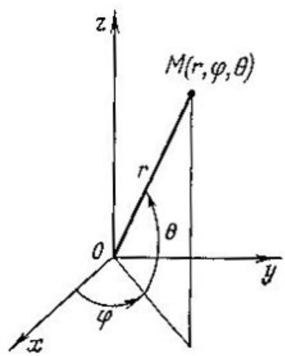


Fig. 88

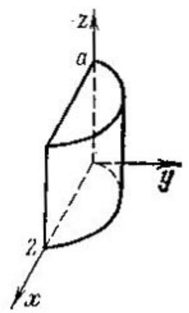


Fig. 89

Ejemplo 2. Pasando a las coordenadas cilíndricas calcúlese $\iiint\limits_{T} z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, donde la región T está dada por las desigualdades $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2}$, $0 \leqslant z \leqslant a$ (fig. 89).

◀ Ya que la igualdad $y = \sqrt{2x-x^2}$ en el sistema de coordenadas cilíndricas toma la forma $r = 2\cos\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$, entonces según la fórmula (5)

$$\iiint\limits_{T} \sqrt{x^2+y^2}\,z\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{T_1} r^2 z\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr \int\limits_0^{a} z\,dz = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr =$$

$$= \frac{4a^2}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{8}{9}a^2. \ ▶$$

EJEMPLO 3. Pasando a las coordenadas esféricas calcúlese $\iiint_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, si la región T es una semiesfera x^2+y^2+ $+z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$.

◀ Para la región T_1 los límites de variación de las coordenadas esféricas son: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant r \leqslant R$. Según la fórmula (6) tenemos:

$$\iiint_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{T_1} r^2\cos^2\theta \cdot r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\,d\theta \int_0^R r^4\,dr = \frac{4}{15}\pi R^5. \ ▶$$

Calcúlense los integrales:

2.8. $\int\limits_0^{a/\sqrt{2}} dy \int\limits_y^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \int\limits_0^{(x^2-y^2)/a} \sqrt{x^2+y^2}\,dz$, pasando a las coordenadas cilíndricas.

2.9*. $\iiint_T \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ pasando a las coordenadas esféricas, si T es el interior del sector esférico con el centro en el origen de coordenadas, radio a y el ángulo en el vértice 2α $(0<\alpha<\pi)$.

2.10. $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{\frac{h}{a^2}(x^2+y^2)}^{h} \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pasando a las coordenadas cilíndricas.

2.11. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, pasando a las coordenadas esféricas.

3. **Aplicaciones de las integrales triples.** El *volumen* V de una región espacial T es igual a

$$V = \iiint_T dx\,dy\,dz.$$

La *masa* M de un cuerpo con densidad variable $\gamma(x, y, z)$ que ocupa la región T es:

$$M = \iiint\limits_T \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Los *momentos estáticos* de un cuerpo, respecto a los planos coordenados son:

$$M_{yz} = \iiint\limits_T x\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$M_{zx} = \iiint\limits_T y\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_T z\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Las *coordenadas del centro de masas* de un cuerpo son

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{zx}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

Los *momentos de inercia* de un cuerpo respecto a los ejes de coordenadas son

$$I_x = \iiint\limits_T (y^2 + z^2)\,\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_y = \iiint\limits_T (z^2 + x^2)\,\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_z = \iiint\limits_T (x^2 + y^2)\,\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Si el cuerpo es homogéneo entonces en las fórmulas indicadas más arriba hay que poner $\gamma(x, y, z) = 1$.

EJEMPLO 4. Hállense las coordenadas del centro de masas de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$, si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia de este punto hasta el centro.

◀ Tenemos $\gamma(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y a consecuencia de la simetría $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Realicemos los cálculos en las coordenados esféricas:

$$M_{xy}=k\iiint\limits_{T} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=k\iiint\limits_{T_1} r^4\times$$

$$\times\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta\int\limits_0^{R}r^4\,dr=\frac{1}{5}k\pi R^5.$$

$$M=k\iiint\limits_{T}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=k\iiint\limits_{T_1} r^3\times$$

$$\times\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\int\limits_0^{R}r^3\,dr=$$

$$=\frac{1}{2}k\pi R^4;\quad \bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{2}{5}R.$$

De este modo $C\left(0,\ 0,\ \frac{2}{5}R\right)$. ►

2.12. Hállese el volumen de un cuerpo limitado por las superficies $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $y=x$, $y^2=x$.

2.13*. ¿Para que valores de a el volumen de un cuerpo limitado por las superficies $x^2+y^2=az$, $x^2+y^2=ax$, $z=0$ es igual al número dado V?

2.14*. Hállese el volumen de un cuerpo limitado por la superficie cerrada $(x^2+y^2+z^2)^2=2\ axyz\ \ (a>0)$.

2.15*. Hállese el volumen de un cuerpo limitado por la superficie cerrada $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

2.16.* Hállese el volumen de un cuerpo limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=4a^2$ y el paraboloide $x^2+y^2=3az$ (dentro del paraboloide).

2.17*. Hállese el volumen de un cuerpo limitado por la superficie cerrada $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\ (a>0)$.

2.18. Hállense la masa y la densidad media de un cuerpo limitado por las superficies $x^2+y^2-z^2=a^2$, $z=0$, $z=a>0$, si la densidad en cada punto es proporcional a la coordenada z y en el plano $z=a$ es igual a γ_0.

2.19. Hállense la masa y la densidad media de un cono circular que tiene por radio de la base R y por altura H, si la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia del punto hasta el plano que pasa por el vértice del cono paralelamente al plano de base y en el centro de la base es igual a γ_0.

2.20. Hállense la masa y la densidad media de un cuerpo limitado por las superficies $x^2 - y^2 = az$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ $(z > 0)$ si la densidad en cada punto es proporcional a la coordenada z y el valor máximo de la densidad es igual a γ_0.

2.21. Hállense la masa y la densidad media de la capa esférica entre las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, si la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia del punto hasta el origen de coordenadas y el valor máximo de la densidad es igual a γ_0.

2.22. Hállense la masa y la densidad media del segmento del paraboloide de revolución que tiene por radio de la base R y por altura H, si la densidad en cada punto es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia desde el punto hasta el plano de la base del segmento y en el vértice del segmento es igual a γ_0.

2.23. Hállense la masa y la densidad media de una bola de radio R, si la densidad en cada punto es inversamente proporcional a la distancia desde el punto hasta uno de los diámetros de la bola y en la circunferencia del círculo grande situado en el plano perpendicular a este diámetro es igual a γ_0.

2.24. Hállense las coordenadas del centro de masas de un cuerpo homogéneo limitado por las superficies $z = \frac{h}{a^2}(y^2 - x^2)$, $z = 0$, $y = a$, $y = 0$ $(a > 0,\ h > 0)$.

2.25. Hállense las coordenadas del centro de masas de un cuerpo homogéneo limitado por las superficies $y = \frac{b}{a^2}x^2$, $z = \frac{h}{b}(b - y)$, $z = 0$ $(a > 0,\ b > 0,\ h > 0)$.

2.26. Hállense las coordenadas del centro de masas de un cuerpo homogéneo limitado por las superficies $z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2)$, $z = H$.

2.27. Hállense las coordenadas del centro de masas de un cuerpo homogéneo limitado por las superficies $z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = H$ $(H > 0,\ R > 0)$.

2.28. Hállense las cordenadas del centro de masas de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$, si la densidad en cada punto es inversamente proporcional a la distancia del punto hasta el origen de coordenadas.

2.29. Hállese el momento de inercia con respecto al eje Oz del cuerpo homogéneo de densidad γ, limitado por las superficies $y=\frac{b}{a^2}x^2$, $z=0$, $z=\frac{h}{b}(b-y)$ $(a>0,\ b>0,\ h>0)$.

2.30. Hállese el momento de inercia del segmento homogéneo del paraboloide de revolución de densidad γ y de radio de la base R y altura H, respecto a su eje de revolución.

2.31. Hállese el momento de inercia de una esfera de radio R con respecto a su diámetro, si la densidad en cada punto es inversamente proporcional a la distancia del punto hasta el centro de la esfera y en la superficie de la esfera es igual a γ_0.

2.32.** Hállese el potencial de Newton U de un cuerpo homogéneo de densidad γ, limitado por el elipsoide de revolución $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, en su centro $(b>a)$.

2.33.** Hállese la fuerza de atracción que ejerce un cono homogéneo de densidad γ, altura H y radio de la base R sobre el punto material situado en su vértice y que contiene una unidad de masa.

2.34. Hállese el momento de inercia respecto al eje Oz de un cuerpo homogéneo de densidad γ, limitado por las superficies $z=\frac{h}{a^2}(y^2-x^2)$, $z=0$, $y=\pm a$.

2.35. Hállese el momento de inercia del cono circular homogéneo de densidad γ, radio de la base R y altura H con respecto a su eje.

§ 3. Integrales múltiples impropias

1. Integral respecto a la región infinita. Si la función $f(x, y)$ es continua en una región infinita G, entonces, según la definición,

$$\iint_G f(x, y)\,dx\,dy=\lim_{D\to G}\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \tag{1}$$

donde D es una región finita que está situada totalmente en la región G, además $D\to G$ significa que la región D se extiende arbitrariamente de tal modo que entre y quede en ella cualquier punto de la región G (*extensión exhaustiva*). Si existe un límite finito (1) que no depende de la elección de la subregión D y del procedimiento de extensión $D \to G$, entonces la *integral impropia* $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ se llama *convergente*; en el caso contrario, *divergente*.

Análogamente se determina la integral triple por la región infinita.

Si $f(x, y) \geqslant 0$, entonces para la convergencia de la integral impropia es necesario y suficiente que el límite (1) exista por lo menos para una sola extensión exhaustiva de la región G.

EJEMPLO 1. Calcúlese la integral impropia

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$$

donde G es una región determinada por las desigualdades $x \geqslant 1$, $y \geqslant x^2$.

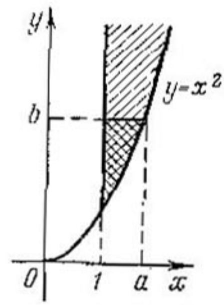


Fig. 90

◀ Supongamos que la subregión D (fig. 90) está dada por las desigualdades $1 \leqslant x \leqslant a$, $x^2 \leqslant y \leqslant b$, donde $a \to +\infty$, $b \to +\infty$. Entonces

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^4+y^2} = \lim_{D \to G} \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{a\to+\infty\\ b\to+\infty}} \int_1^a dx \int_{x^2}^b \frac{dy}{x^4+y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{a\to+\infty\\ b\to+\infty}} \int_1^a \left(\frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x^2} \Big|_{x^2}^{b} \right) dx =$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2} \left(\lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{x^2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4} \lim_{a\to+\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^a \right) = \frac{\pi}{4}. \ ▶$$

Calcúlense las integrales impropias:

3.1. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^5y^3}$, donde G es una región determinada por las desigualdades $x \geqslant 1$, $xy \geqslant 1$.

3.2. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^3}$, donde G es una región determinada por las desigualdades $x^2+y^2 \geqslant 1$ (parte exterior del círculo).

3.3. $\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, donde T es una región determinada por la desigualdad $x^2+y^2+z^2 \geqslant 1$ (parte exterior de la esfera).

3.4. $\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x+y+z)}\,dz$.

Investíguese la convergencia de las integrales impropias:

3.5. $\iint\limits_G \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy$, donde G es una región determinada por las desigualdades $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3.6. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$, donde G es una región determinada por la desigualdad $x^2+y^2 \geqslant 1$ (parte exterior del círculo).

2. Integral de una función discontinua. Sea la función $f(x, y)$ continua en la región cerrada y acotada G en todos los puntos, excepto el punto $P_0(x_0, y_0)$ (o la línea L). Si existe el límite finito

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{G_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy,$$

donde G es una región obtenida de G eliminando ε-entorno del punto P_0 (ε-entorno de la línea L, respectivamente), entonces este límite se llama *integral impropia de la función $f(x, y)$ por la región G* y se designa mediante $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$, es decir,

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{G_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{2}$$

La integral (2) en este caso se llama *convergente*. Si $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{G_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy$ no existe o es igual a ∞, entonces $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ se llama *divergente*.

De modo análogo se determina la integral triple de la función discontinua.

EJEMPLO 2. Investíguese la convergencia de la integral impropia $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$, $\alpha > 0$, donde G es un círculo $x^2+y^2 \leqslant 1$.

◀ El origen de coordenadas es un punto de discontinuidad de la función $\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$. Eliminemos de G el ε-entorno del origen de coordenadas. Entonces la región G_ε es un anillo entre las circunferencias de radios ε y 1. Pasemos a las coordenadas polares (Γ es una imagen polar de la región G):

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}=\iint\limits_\Gamma \frac{r\,dr\,d\varphi}{r^{2\alpha}}=\iint\limits_\Gamma r^{1-2\alpha}\,dr\,d\varphi=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} r^{1-2\alpha}\,dr\,d\varphi=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_\varepsilon^1 r^{1-2\alpha}\,dr=$$

$$=2\pi\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{r^{2(1-\alpha)}}{2(1-\alpha)}\Big|_\varepsilon^1=\pi\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\varepsilon^{2(1-\alpha)}}{1-\alpha}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{1-\alpha} & \text{para } \alpha<1,\\ -\infty & \text{para } \alpha>1.\end{cases}$$

Para $\alpha=1$ tenemos:

$$\iint\limits_\Gamma \frac{dr\,d\varphi}{r}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dr}{r}=2\pi\lim_{\varepsilon\to 0}\ln r\Big|_\varepsilon^1=+\infty.$$

Así pues para $\alpha<1$ la integral converge y es igual a $\dfrac{\pi}{1-\alpha}$. ▶

Calcúlense las integrales impropias:

3.7. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{\sqrt{xy}}$, donde G es un cuadrado $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

3.8. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{\sqrt[3]{1-x^2-y^2}}$, donde G es un círculo $x^2+y^2\leqslant 1$.

3.9. $\iint\limits_G \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, donde G es un círculo $x^2+y^2\leqslant 1$.

Investíguese la convergencia de las integrales impropias:

3.10*. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x-y)^\alpha}$, donde G es un triángulo $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant x$.

3.11. $\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$, donde T es una esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

§ 4. Cálculo de las integrales dependientes de un parámetro

1. Integrales propias dependientes de un parámetro. Si la función $f(x, y)$ está definida y es continua en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, entonces la integral

$$F(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx \tag{1}$$

se llama *integral dependiente del parámetro* y es una función continua en el intervalo $[A, B]$.

La integral de una forma más general

$$F(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx \tag{2}$$

se llama también integral dependiente del parámetro y es una función continua del argumento y en el intervalo $[A, B]$; si $f(x, y)$ es continua en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ son continuas para $y \in [A, B]$ y sus valores se contienen en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 1. Calcúlese el límite

$$\lim_{y\to 0}\int_{-(1+y)}^{1+y}\frac{dx}{1+x^2+y^2}.$$

◀ Analicemos la integral siguiente dependiente del parámetro y:

$$F(y)=\int_{-(1+y)}^{1+y}\frac{dx}{1+x^2+y^2}.$$

Ya que los límites de integración, así como la función subintegral son continuos para cualesquiera valores de sus argumentos, entonces $F(y)$ es una función continua. Por eso

$$\lim_{y\to 0}\int_{-(1+y)}^{1+y}\frac{dx}{1+x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}F(y)=F(0)=$$
$$=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}.\ ▶$$

Si $f(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ son continuas en el triángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, entonces para la integral (1) es válida la *fórmula de di-*

ferenciación bajo el signo de la integral (fórmula de Leibniz):

$$F'(y)=\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,\ y)\,dx=\int_a^b f'_y(x,\ y)\,dx. \tag{3}$$

Si en (2) para las mismas condiciones de f y f'_y los límites de integración $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ son diferenciables cuando $y\in(A,\ B)$, entonces es válida la fórmula:

$$F'(y)=\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,\ y)\,dx=$$

$$=f(\psi(y),\ y)\,\psi'(y)-f(\varphi(y),\ y)\,\varphi'(y)+\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,\ y)\,dx. \tag{4}$$

EJEMPLO 2. Hállese $F'(y)$ si

$$F(y)=\int_{\operatorname{sen} y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

◀ Ya que la función subintegral $e^{y\sqrt{1-x^2}}$ es continua en el dominio de definición junto con su derivada parcial respecto a y, igual a $\sqrt{1-x^2}\,e^{y\sqrt{1-x^2}}$ y los límites de integración son también funciones diferenciables, entonces se puede aplicar la fórmula (4):

$$F'(y)=-e^{y\sqrt{1-\cos^2 y}}\operatorname{sen} y-e^{y\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}\cos y+$$

$$+\int_{\operatorname{sen} y}^{\cos y}\sqrt{1-x^2}\,e^{y\sqrt{1-x^2}}\,dx=-(e^{y|\operatorname{sen} y|}\operatorname{sen} y+$$

$$+e^{y|\cos y|}\cos y)+\int_{\operatorname{sen} y}^{\cos y}\sqrt{1-x^2}\,e^{y\sqrt{1-x^2}}\,dx. \ ▶$$

Si $f(x,\ y)$ es continua en el triángulo $a\leqslant x\leqslant b,\ A\leqslant y\leqslant B$, entonces para la integral (1) es válida la fórmula de *integración respecto al parámetro y bajo el signo de la integral*:

$$\int_A^B F(y)\,dy=\int_A^B dy\int_a^b f(x,\ y)\,dx=\int_a^b dx\int_A^B f(x,\ y)\,dy. \tag{5}$$

EJEMPLO 3. Calcúlese la integral

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx \quad (b>a>0),$$

◀ Observemos que

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y\, dy.$$

Entonces la integral buscada toma el aspecto

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = \int_a^b dx \int_a^b x^y\, dy.$$

La función subintegral $f(x, y) = x^y$ es continua en el triángulo $0 \leqslant \leqslant x \leqslant 1$, $a \leqslant y \leqslant b$, por eso se puede utilizar la fórmula (5):

$$\int_0^1 dx \int_a^b x^y\, dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y\, dx = \int_a^b \frac{1}{y-1}\, dy = \ln \frac{b+1}{a+1}\ . \ ▶$$

Calcúlense los siguientes límites:

4.1. $\lim\limits_{y\to 0} \int_1^2 x^3 \cos xy\, dx.$

4.2. $\lim\limits_{y\to 0} \int_0^1 \sqrt[3]{x^4 + y^2}\, dx.$

4.3. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^{x_0} (f(x+h) - f(x))\, dx$, si $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ $(a < 0 < x_0 < b)$ y $f(0) = 0$.

Diferénciense las funciones:

4.4. $F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x}\, dx.$

4.5. $F(y) = \int_{y-1}^{y+1} \frac{\operatorname{sen} xy}{x}\, dx.$

4.6. $F(y) = \int_y^{y^2} e^{-yx^2}\, dx.$

4.7. $F(y) = \int_0^y (x-y) \operatorname{sen} xy\, dx.$

4.8. Hállese F''_{xy}, si

$$F(x,\ y) = \int\limits_{x/y}^{xy} (x - yt)\ f(t)\, dt,$$

donde $f(t)$ es una función diferenciable.

4.9. Sea $f(x)$ una función dos veces diferenciable y $F(x)$ una función diferenciable. Demuéstrese que la función

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2}\left(f(x - at) + f(x + at)\right) + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} F(y)\, dy$$

satisface la ecuación de oscilaciones de una cuerda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ .$$

4.10*. Hállense las derivadas de las integrales elípticas totales

$$\left.\begin{aligned} E(k) &= \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi, \\ F(k) &= \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \end{aligned}\right\} \quad (0 < k < 1)$$

y exprésense mediante las funciones $E(k)$ y $F(k)$.

Integrando bajo el signo de la integral calcúlense las integrales:

4.11. $\displaystyle\int\limits_0^1 \operatorname{sen}\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x}{\ln x} (x^2 - 1)\, dx.$

4.12. $\displaystyle\int\limits_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x}{\ln x} (x - 1)\, dx.$

4.13. Demuéstrense las fórmulas:

a) $\displaystyle\int\limits_0^k F(x)\, x\, dx = E(k) - (1 - k^2)\, F(k),$

b) $\displaystyle\int\limits_0^k E(x)\, x\, dx = \frac{1}{3}\left((1 + k^2)\, E(k) - (1 - k^2)\, F(k)\right),$

donde $E(k)$ y $F(k)$ son integrales elípticas totales (véase el problema 4.10).

2. **Integrales impropias dependientes de un parámetro.** La integral impropia que depende del parámetro y, es decir,

$$F(y)=\int_{a}^{+\infty} f(x, y)\,dx, \tag{6}$$

donde la función $f(x, y)$ es continua en la región $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ se llama uniformemente convergente en el intervalo $[y_1, y_2]$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $B = B(\varepsilon)$ tal que para cualquier $b \geqslant B(\varepsilon)$

$$\left|\int_{b}^{+\infty} f(x, y)\,dx\right| \leqslant \varepsilon$$

para cualquier $y \in [y_1, y_2]$.

Si la integral (6) es convergente uniformemente en el intervalo $[y_1, y_2]$, entonces es una función continua y en este intervalo.

De modo análogo se define la convergencia uniforme de la integral impropia de la función no acotada, que depende del parámetro.

Al investigar la convergencia uniforme de las integrales dependientes del parámetro, a menudo se emplea la siguiente afirmación:

Criterio de Weierstrass. *Para que la integral* (6) *converja uniformemente es suficiente que exista una función $F(x)$ independiente del parámetro y, tal que*

a) $|f(x, y)| \leqslant F(x)$ *si* $a \leqslant x < +\infty$,

b) $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} F(x)\,dx < +\infty$.

La función $F(x)$ se llama *mayorante* para $f(x, y)$.

Ejemplo 4. Demuéstrese la convergencia uniforme de la integral siguiente:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx, \quad -\infty < y < +\infty.$$

◀ Observemos que

$$\int \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ un número arbitratio. Suponiendo $B(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}$, hallamos (para cualquier $b > B$):

$$\left| \int_b^{+\infty} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx \right| = \left| \lim_{A\to+\infty} \int_b^A \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx \right| =$$

$$= \left| \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_b^A \right) \right| = \left| \lim_{A\to+\infty} \frac{A}{A^2+y^2} - \frac{b}{b^2+y^2} \right| =$$

$$= \frac{b}{b^2+y^2} \leqslant \frac{1}{b} < \frac{1}{B} = \varepsilon,$$

lo que demuestra según la definición la convergencia uniforme de la integral indicada respecto al parámetro y por todo el eje. ▶

EJEMPLO 5. Establézcase la convergencia uniforme de la integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\cos x\,dx, \qquad 0 < y_0 \leqslant y < +\infty.$$

◀ Mostremos que podemos tomar la fnución $F(x) = e^{-xy_0}$ en calidad de mayorante. En efecto, si $y > y_0$ entonces

$$|e^{-xy}\cos x| \leqslant e^{-xy} \leqslant e^{-xy_0}.$$

Además,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy_0}\,dx = -\frac{1}{y_0}\,e^{-xy_0}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{y_0}.$$

Por consiguiente, basándose en el criterio de Weierstrass la integral indicada converge uniformemente. ▶

Para las integrales impropias dependientes de un parámetro, con un límite infinito, al cumplirse las siguientes condiciones:

a) la función $f(x, y)$ es continua junto con su derivada $f'_y(x, y)$ en la región $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$,

b) $\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ converge para cualquier $y \in [y_1, y_2]$,

c) $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx$ converge uniformemente en el intervalo $[y_1, y_2]$

es válida la *fórmula de diferenciación respecto al parámetro* (*fórmula de Leibniz*):

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx \tag{7}$$

que es análoga a la relación (3).

Cumpliéndose las condiciones correspondientes la fórmula de Leibniz queda válida también para la integral de la función discontinua, dependiente del parámetro.

EJEMPLO 6. Calcúlese la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} \cos mx\, dx \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

◀ Sea

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} \cos mx\, dx = F(\alpha,\ \beta).$$

Señalemos que la integral $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos mx\, dx$ converge uniformemente para $\alpha > 0$ y es igual a $\frac{\alpha}{\alpha^2+m^2}$ (¡compruébese!). La integral inicial converge para cualesquiera $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ y la función subintegral es continua junto con su derivada parcial por α, igual a $-e^{-\alpha x} \cos mx$. Por consiguiente las condiciones a), b), c) están cumplidas y se puede utilizar la relación (7). Entonces

$$\frac{\partial F(\alpha,\ \beta)}{\partial \alpha} = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos mx\, dx = -\frac{\alpha}{\alpha^2+m^2}.$$

De aquí

$$F(\alpha,\ \beta) = -\frac{1}{2} \ln(\alpha^2+m^2) + C(\beta).$$

Para hallar $C(\beta)$ suponemos en la última igualdad $\alpha = \beta$. Tenemos $0 = -\frac{1}{2}\ln(\beta^2+m^2) + C(\beta)$. De aquí

$$C(\beta) = \frac{1}{2} \ln(\beta^2+m^2)$$

ó

$$F(\alpha,\ \beta) = \frac{1}{2}(\ln(\beta^2+m^2) - \ln(\alpha^2+m^2)) = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}. \ ▶$$

4.14. Formúlese en el lenguaje «$\varepsilon - \delta$» la afirmación: la integral $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,\ y)\, dx$ converge no uniformemente en el segmento $[y_1,\ y_2]$.

Investíguense con respecto a la convergencia uniforme en los intervalos indicadas las siguientes integrales:

4.15. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos x\,dx \quad (0<\alpha_0\leqslant\alpha<\infty).$

4.16. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}+1} \quad (1<\alpha<+\infty).$

4.17. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln^{\alpha} x}{x^2}\,dx \quad (0\leqslant\alpha\leqslant1).$

4.18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx \quad (-\infty<\alpha<+\infty).$

4.19. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1} \quad (0\leqslant\alpha<+\infty).$

4.20. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^{\alpha}\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)\,(x-2)^2}} \left(|\alpha|<\frac{1}{2}\right).$

4.21. $\int\limits_{0}^{1} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,\frac{dx}{x^{\alpha}} \quad (0<\alpha<2).$

4.22. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\,dx \quad (0\leqslant\alpha\leqslant1).$

4.23. Demuéstrese que la función $u(x, y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xf(t)}{x^2+(y-t)^2}\,dt$ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Aplicando la diferenciación por el parámetro, calcúlense las integrales siguientes:

4.24. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\,dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$

4.25. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\operatorname{sen} mx\,dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0,\ m\neq0).$

4.26. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,\frac{\operatorname{sen}\beta x}{x}\,dx \quad (\alpha \geqslant 0).$

4.27. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^{x}}\,dx \quad (\alpha > -1).$

4.28*. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\gamma x^2}\cos\delta x\,dx \quad (\gamma > 0).$

4.29. $\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (-\infty < \alpha < +\infty).$

4.30. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (|\alpha| \leqslant 1).$

4.31. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (|\alpha| \leqslant 1).$

RESPUESTAS

1.2. $\frac{8}{3}$. **1.3.** $\frac{\pi}{6}$. **1.4.** $\frac{1}{2}\ln\frac{14}{11}$. **1.5.** $\frac{a^2}{4}(\pi+4)$. **1.6.** $3\pi/2$. **1.7.** $y=x$, $y=x+3$, $x=1$, $x=2$. **1.8.** $y=x^2$, $y=2-x^2$, $x=\pm 1$. **1.9.** $x+y=2$, $x=\sqrt{4-y^2}$, $y=0$, $y=2$. **1.10.** $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2-x^2}$, $x=0$, $x=1$. **1.11.** $\int\limits_1^5 dx \int\limits_2^4 f(x, y)\,dy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_1^5 f(x, y)\,dx.$

1.12. $\int\limits_2^4 dx \int\limits_2^x f(x, y)\,dy + \int\limits_4^5 dx \int\limits_2^4 f(x, y)\,dy + \int\limits_5^7 dx \int\limits_{x-3}^4 f(x, y)\,dy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_y^{y+3} f(x, y)\,dx.$ **1.13.** $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{x^2/a}^{\sqrt{2a^2-x^2}} f(x, y)\,dx = \int\limits_0^a dy \int\limits_{-\sqrt{ay}}^{\sqrt{ay}} \times$ $\times f(x, y)\,dx + \int\limits_a^{a\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2a^2-y^2}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} f(x, y)\,dx.$ **1.14.** $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{ax}} f \times$ $\times f(x, y)\,dy + \int\limits_a^{2a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y)\,dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_{y^2/a}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx.$

1.15. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_a^{2a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y)\,dy = \int\limits_0^{a/2} dy \times$

$\times \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{(a-\sqrt{a^2-4y^2})/2} f(x, y)\,dx + \int\limits_0^{a/2} dy \int\limits_{(a+\sqrt{a^2-4y^2})/2}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{a/2}^{a} \times$

$\times\, dy \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx$. **1.16.** Respecto a la variable x; la región de integración está limitada por las líneas $y = -\sqrt{x}$, $y = x^3$, $x = 1$, $x = 2$. **1.17.** $\int\limits_{-7}^{1} dy \int\limits_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x, y)\,dx$. **1.18.** $\int\limits_{-1}^{0} dx \times$

$\times \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x, y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x, y)\,dy$. **1.19.** $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{2-\sqrt{4-y^2}} \times$

$\times f(x, y)\,dx + \int\limits_0^2 dy \int\limits_{2+\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y)\,dx$.

1.20. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{3\sqrt{x}} f(x, y)\,dy$. **1.21.** $\int\limits_0^{8/3} dy \int\limits_{2y-2}^{\sqrt{4+y^2}} f(x, y)\,dx$. **1.22.** $\int\limits_0^a \times$

$\times\, dy \int\limits_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_0^{\sqrt{2ay-a^2}} f(x, y)\,dx$. **1.23.** $\int\limits_{-1}^{0} dx \times$

$\times \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x, y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{-\sqrt{2x}} f(x, y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{x+1}} f(x, y)\,dy$.

1.24. $\int\limits_1^3 dy \int\limits_{9/y}^{10-y} f(x, y)\,dx$. **1.26.** $\frac{4}{3} a^4$. **1.27.** 112/9. **1.28.** 1/4. **1.29.** 1/3. **1.30.** 9/20. **1.31.** 68/15. **1.32.** $\pi^2/32$. **1.33.** $\frac{4}{3} a^3$. **1.34.** e. **1.35.** $\frac{1}{15} a^2 b^2$. ● $\iint\limits_G x^2 y\,dx\,dy = \int\limits_0^a x^2\,dx \int\limits_0^{f(x)} y\,dy = \int\limits_{\pi/2}^{0} a^2 \cos^2 t\ (-a \times$

$\times \operatorname{sen} t)\, dt \int\limits_0^{b \operatorname{sen} t} y\, dy$, dondo la última integral se obtiene del anterior sustituyendo $x = a \cos t$. **1.36.** $3\pi^2 a^2$. **1.37.** $\frac{8}{105} a^3$. **1.38.** 1/4. ● Se llama valor medio de la función $f(x, y)$ en la región G el número $f_{\text{med}} = \frac{1}{S} \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy$, donde S es el área de la región G. **1.39.** $1{,}63 < I < 2$. ● Según el teorema acerca de la estimación de la integral doble $mS < \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy < MS$ donde m es el valor mínimo de la función en la región G y M es el valor máximo, S es el área de la región G. **1.40.** 5/3. **1.41.** $\int\limits_0^{\pi/6} \times$

$\times\, d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\operatorname{sen} \varphi}} f(r)\, r\, dr + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a \cos \varphi} f(r)\, r\, dr$. **1.42.** $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \times$

$\times \int\limits_{\frac{a \cos \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi}}^{2a \operatorname{sen} \varphi} f(r \cos \varphi, r \operatorname{sen} \varphi)\, r\, dr$. **1.43.** $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos^2 \varphi}} f(r \cos \varphi, r \operatorname{sen} \times$

$\times \varphi)\, r\, dr + \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\operatorname{sen} \varphi}} f(r \cos \varphi, \quad r \operatorname{sen} \varphi)\, r\, dr + \int\limits_{3\pi/4}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos^2 \varphi}} \times$

$\times f(r \cos \varphi, r \operatorname{sen} \varphi)\, r\, dr$. **1.44.** $\int\limits_0^{\pi/6} f(\operatorname{tg} \varphi)\, d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6} \cos \varphi} r\, dr + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} f \times$

$\times (\operatorname{tg} \varphi)\, d\varphi \int\limits_0^{3\sqrt{\cos 2\varphi}} r\, dr$. **1.45.** $\frac{\pi}{4} (e^{a^2} - 1)$. **1.46.** a. **1.47.** $\frac{128}{3} \pi$.

1.48. $\frac{\pi a}{2}$. **1.49.** $\frac{45}{64} \pi a^4$. **1.50.** $\frac{a}{2} (2 - \ln 2)$. **1.51.** $\frac{2\sqrt{2}}{15} a^4$. **1.52.**

$\frac{1}{a} \int\limits_0^a dv \int\limits_0^a f\left(\frac{u(a-v)}{a}, \quad \frac{uv}{a}\right) u\, du$. **1.53.** $\frac{1}{3} \int\limits_0^b du \int\limits_p^q f \times$

$\times (\sqrt[3]{u^2 v}, \sqrt[3]{uv^2})\, dv$. **1.54.** $\frac{1}{2} \int\limits_1^3 du \int\limits_{-u}^{6-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv$,

1.55. $\frac{1}{2}\int\limits_p^q du \int\limits_a^b f\left(\sqrt{\frac{u}{v}},\ \sqrt{uv}\right)\frac{dv}{v}$. **1.56.** $2\pi ab\,(c-\sqrt{c^2-1})$.

1.57. $(e-1)/2$. **1.58.** $\frac{5}{48}(a^{-6/5}-b^{-6/5})(q^{8/5}-p^{8/5})$. **1.59.** $\frac{64}{3}a^2$.

1.60. $\frac{1}{2}(15-16\ln 2)$. **1.61.** $a^2(\pi-1)$. **1.62.** $\frac{1}{4}(b^2-a^2)(\pi+2)$.

● **Pásese a las coordenadas polares. 1.63.** $\frac{1}{4}a^2(8-\pi)$. **1.64.** $(\pi-1)a^2$. ● **Pásese a las coordenadas polares. 1.65.** $a^2/210$. ● **Sustitúyanse las variables:** $x=r\cos^2\varphi$, $y=r\,\mathrm{sen}^2\,\varphi$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

1.66. $\frac{\pi a^3 b}{2c^2}$. ● **Pásese a las coordenadas polares generalizadas.**

1.67. $\frac{8}{15}(b^{5/4}-a^{5/4})(n^{3/4}-m^{3/4})$. ● **Realícese el cambio de las variables:** $y^2=ux$, $vy^2=x^3$. **1.68.** $\frac{(q^2-p^2)(b^3-a^3)}{6a^3b^3}$. ● **Realícese el cabmio de las variables:** $y^2=ux$, $y=vx$. **1.69.** $\frac{4}{\sqrt{3}}a^2$.

1.70. $8\sqrt{2}\,a^2$. **1.71.** $2\sqrt{2}\,\pi p^2$. **1.72.** $\frac{76}{3}a^2$. **1.73.** $\frac{8}{3}\sqrt{2}\,a^2$.

1.74. $16a^2$. **1.75.** $4\pi a^3\,(2-\sqrt{2})$. **1.76.** $\frac{\pi}{6}\,(27-5\sqrt{5})$.

1.77. $2a^2\,(\pi-2)$. **1.78.** $\pi a^3\,(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$. **1.79.** $\pi/6$.

1.80. $3\sqrt{2}\,\pi a^2$. **1.81.** $2a^2\,(\pi+4-4\sqrt{2})$. **1.82.** $\frac{16}{3}ab^2$. **1.83.** $\frac{4}{3}\times a^3(2-\sqrt{2})$. ● **Intégrese en el plano** Oyz. **1.84.** $16/15$. **1.85.** $a^3/2$.

1.86. $\frac{2}{3}\pi a^3\,(3-\sqrt{2})$. **1.87.** $\pi abc\left(1-\frac{1}{e}\right)$. **1.88.** $\frac{2}{3}\pi a^3\,(2-\sqrt{2})$.

1.89. $\frac{2}{3}\pi abc\,(2-\sqrt{2})$. **1.90.** $\frac{1}{2}\ln 3$. ● **Realícese el cambio de las variables** $u=xy$, $y^2=vx$. **1.91.** $9/8$. ● **Realícese el cambio de las variables** $u=xy$, $v=y/x$. **1.92.** $\frac{1}{2}\pi\delta R^2$. **1.93.** $M_x=\frac{4}{3}a^3$, $M_y=\frac{5}{8}\pi a^3$. **1.94.** $\bar{x}=\frac{2}{5}=a$, $\bar{y}=\frac{a}{2}$. **1.95.** $\frac{a^2b}{6}$. **1.96.** $M_x=\frac{\pi}{24}$, $M_y=1-\frac{\pi^2}{12}$. **1.97.** $\bar{x}=\frac{141a}{20(7-3\ln 2)}$, $\bar{y}=\frac{81a}{8(7-3\ln 2)}$. **1.98.** $I_x=1/12$, $I_y=7/12$. **1.99.** $\bar{x}=\bar{y}=\frac{128a}{105\pi}$. **1.100.** $I_x=\frac{21}{32}\pi a^4$, $I_y=$

$=\frac{49}{32}\pi a^4$, $I_0=\frac{35}{16}\pi a^4$. **1.101.** $I_x=\frac{\pi ab^3}{4}$, $I_y=\frac{\pi a^3b}{4}$, $I_0=\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$. **1.102.** a) $\frac{26}{105}a^4$; b) $\frac{61}{105}a^4$. ● $I_{x=-a}=\iint\limits_G (x+a)^2\,dx\,dy$. **1.103.** $I_x=\frac{ka^5}{5}$, $I_y=\frac{3}{20}ka^5$, $I_0=\frac{7}{20}ka^5$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad. **1.104.** $\pi a^4/8$. **1.105.** $I_x=\frac{2\alpha-\operatorname{sen}2\alpha}{16}a^4$, $I_y=\frac{2\alpha+\operatorname{sen}2\alpha}{16}a^4$. **1.106.** $\frac{1}{2}\gamma(t_2-t_1)(R_2^4-R_1^4)$. ● $Q=\gamma_1(t_2-t_1)\iint\limits_G |xy|\,dx\,dy$. **1.107.** $\frac{4ah^2}{5}$. ● $E=\iint\limits_G (2x+y)\,dx\,dy$. **2.1.** $\int\limits_0^6 dx\int\limits_0^{\frac{12-2x}{3}} dy\int\limits_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} f(x,\ y,\ z)\,dz$. **2.2.** $\int\limits_{-a}^{a} dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} f(x,\ y,\ z)\,dz$. **2.3.** $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \times dy\int\limits_{-\sqrt{(4x-y^2)/2}}^{\sqrt{(4x-y^2)/2}} f(x,\ y,\ z)\,dz$. **2.4.** 1/6. **2.5.** $a^4/8$. **2.6.** 81/4. **2.7.** 1/96. **2.8.** $a^4/10$. **2.9.** $2\pi a^3\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$. ● Tómese por el eje Oz el eje del sector. **2.10.** $\frac{4}{3}\pi ah$. **2.11.** $\frac{8}{5}\pi R^{5/2}$. **2.12.** $\frac{3}{35}$. **2.13.** $\sqrt[3]{\frac{32V}{3\pi}}$. ● Pásese a las coordenadas cilíndricas. **2.14.** $a^3/45$. ● Pásese a las coordenadas esféricas. **2.15.** $\pi^2abc/4$. ● Pásese a las coordenadas esféricas generalizadas según la fórmula: $x=ar\cos\varphi\cos\theta$, $y=br\times\operatorname{sen}\varphi\cos\theta$, $z=cr\operatorname{sen}\theta$. Además $I=abcr^2\cos\theta$ $\left(r\geqslant 0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. **2.16.** $\frac{19}{6}\pi a^3$. ● Pásese a las coordenadas cilíndricas. **2.17.** $\pi a^3/3$. ● Pásese a las coordenadas esféricas. **2.18.** $M=\frac{3}{4}\pi\gamma_0a^3$, $\gamma_{med}=\frac{9}{16}\gamma_0$. **2.19.** $M=\frac{1}{5}\pi\gamma_0R^2H$, $\gamma_{med}=\frac{3}{5}\gamma_0$. **2.20.** $M=\frac{1}{24}\pi\gamma_0a^3$, $\gamma_{med}=\frac{1}{12}\pi\gamma_0$. **2.21.** $M=\frac{31}{5}\pi\gamma_0a^3$, $\gamma_{med}=\frac{93}{140}\gamma_0$. **2.22.** $M=\frac{4}{3}\pi\gamma_0R^2H$, $\gamma_{med}=\frac{8}{3}\gamma_0$. **2.23.** $M=\pi^2\gamma_0R^3$,

$\gamma_{\text{med}} = \frac{3}{4}\pi\gamma_0$. **2.24**. $\left(0, \frac{4}{5}a, \frac{4}{15}h\right)$. **2.25.** $\left(0, \frac{3}{7}b, \frac{2}{7}h\right)$. **2.26.** $\left(0, 0, \frac{2}{3}H\right)$. **2.27.** $\left(0, 0, \frac{3}{4}H\right)$. **2.28.** $\left(0, 0, \frac{1}{3}R\right)$. **2.29.** $\frac{8}{21}\gamma abh\left(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{3}\right)$. **2.30.** $\frac{1}{6}\pi\gamma HR^4$. **2.31.** $\frac{2}{3}\pi\gamma_0 R^5$.

2.32. $\frac{2\pi\gamma a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)$. ◀ Se llama *potencial de Newton* del cuerdo T en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la integral $U = \iiint\limits_T \gamma(x, y, z)\frac{dx\,dy\,dz}{r}$ donde $\gamma(x, y, z)$ es la densidad del cuerpo $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. Tenemos $U=\gamma \iiint\limits_T \times$ $\times \frac{dx\,dy\,dz}{r} = \gamma\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Pasemos a las coordenadas cilíndricas: $U = \gamma\iiint\limits_{T^1}\frac{r\,dr\,d\varphi\,dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\gamma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^b dz\int\limits_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}} \times$ $\times\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{2\pi\gamma a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)$. ▶ **2.33.** $\frac{2\pi\gamma kH}{\sqrt{H^2+R^2}}\times$ $\times\left(\sqrt{H^2+R^2}-H\right)$, donde k es la constante del principio de gravitación universal. ◀ Tomando el vértice del cono por el origen de coordenadas y su eje por el eje Oz, obtenemos la ecuación del cono en forma de $x^2+y^2=\frac{R^2}{H^2}z^2$. A consecuencia de la simetría la fuerza resultante de gravitación será dirigida a lo largo del eje Oz y se expresará por la integral $F_z = k\gamma\iiint\limits_T \frac{z\,dx\,dy\,dz}{r^3} =$ $= k\gamma\iiint\limits_T\frac{z\,dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. Pasemos a las coordenadas cilíndricas:

$$F_z = k\gamma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r\,dr\int\limits_{\frac{H}{R}r}^{H}\frac{z\,dz}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\gamma kH}{\sqrt{H^2+R^2}}\left(\sqrt{H^2+R^2}-H\right).$$

▶ **2.34.** $\frac{8}{15}\gamma ha^4$. **2.35.** $\frac{1}{10}\gamma\pi HR^4$.

3.1. $1/4$. **3.2.** $\pi/2$. **3.3.** 4π. **3.4.** 1. **3.5.** Diverge. **3.6.** Converge para $\alpha > 1$. **3.7.** 4. **3.8.** $\frac{3}{2}\pi$. **3.9.** $\pi/2$. **3.10.** Converge para $\alpha < 1$.

● Sepárese la recta $y=x$ por una banda estrecha y póngase $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x-y)^{\alpha}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{(x-y)^{\alpha}}$. **3.11.** Converge para $\alpha < 3/2$.

4.1. 15/4. **4.2.** 3/7. **4.3.** $f(x_0)$. **4.4.** $\frac{2}{y}\ln(1+y^2)$. **4.5.** $\frac{2y+1}{y^2+y}\operatorname{sen} y \times$ $\times(1+y) - \frac{2y-1}{y^2-y}\operatorname{sen} y\,(y-1)$. **4.6.** $2ye^{-y^3} - e^{-y^2} - \int\limits_y^{y^2} x^2 e^{-yx^2}\,dx$.

4.7. $\int\limits_0^y (x(x-y)\cos xy - \operatorname{sen} xy)\,dx$. **4.8.** $x(2-3y^2)f(xy) +$ $+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right) + x^2y(1-y^2)f'(xy)$. **4.10.** $E' = \frac{1}{k}(E-F)$, $F' =$ $= \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{F}{k}$. ● Al calcular F' muéstrese que $\int\limits_0^{\pi/2}(1-k^2 \times$ $\times \operatorname{sen}^2\varphi)^{-3/2}\,d\varphi = \frac{1}{1-k^2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{1/2}\,d\varphi$, para lo cual utilícese la siguiente identidad: $(1-k^2\operatorname{sen}^2)^{-3/2} = \frac{1}{1-k^2}(1-k^2 \times$ $\times \operatorname{sen}^2\varphi)^{1/2} - \frac{k}{1-k^2}\frac{d}{d\varphi}(\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,(1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{-1/2})$. **4.11.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{9}$. **4.12.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **4.14.** $F(y)$ converge no uniformemente en $[y_1, y_2]$, si esta integral converge para cualquier $y \in [y_1, y^2]$, pero existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $B > a$ existe $y = y(B) \in [y_1, y_2[$ para el cual $\left|\int\limits_B^{+\infty} f(x, y)\,dx\right| \geqslant \varepsilon$. **4.15.** Converge uniformemente.

4.16. Converge no uniformemente. **4.17.** Converge uniformemente. **4.18.** Converge uniformemente. **4.19.** Converge no uniformemente. **4.20.** Converge uniformemente. **4.21.** Converge no uniformemente.

4.22. Converge uniformemente. **4.24.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$. **4.25.** $\operatorname{arctg} \times$ $\times \frac{\beta}{m}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$. **4.26.** $\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$. **4.27.** $\ln(1+\alpha)$. **4.28.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \times$ $\times e^{-\frac{\delta^2}{4\gamma}}$. ● Diferénciense las integrales por el parámetro γ y resuélvase la ecuación $\frac{\partial F}{\partial \delta} = -\frac{\delta}{2\gamma}F$. **4.29.** $\frac{\pi}{2}\ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2})$. **4.30.** $\pi(\sqrt{1-\alpha^2} - 1)$. **4.31.** $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$.

CAPÍTULO 9

ECUACIONES DIFERENCIALES

§ 1. Ecuaciones de primer orden

1. **Conceptos fundamentales.** La ecuación funcional

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

ó

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

que une entre sí la variable independiente, la función buscada $y(x)$ y su derivada $y'(x)$ se llama *ecuación diferencial de primer orden.*

Se llama *solución (solución particular)* de la ecuación (1) ó (2) en el intervalo (a, b) cualquier función $y = \varphi(x)$, la cual si se sustituye en esta ecuación junto con su derivada $\varphi'(x)$ la convierte en identidad respecto a $x \in (a, b)$. La ecuación $\Phi(x, y) = 0$ que determina esta solución como una función implícita recibe el nombre de *integral (integral particular)* de la ecuación diferencial. En el plano con un sistema de coordenadas rectangular cartesiano fijo la ecuación $\Phi(x, y) = 0$ determina cierta curva que se llama *curva integral* de la ecuación diferencial.

Se llama *solución general* de la ecuación diferencial (1) ó (2) la función $y = \varphi(x, C)$, que para cualquier valor del parámetro C es solución de esta ecuación diferencial. La ecuación $\Phi(x, y, C) = 0$ que determina la solución general como una función implícita se llama *integral general* de la ecuación diferencial.

Ejemplo 1. Verifíquese mediante la sustitución que la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es solución de la ecuación diferencial $xy' + y = \cos x$.

◀ Tenemos $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $y' = \frac{\cos x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$. Multiplicando y e y' respectivamente por 1 y x, y sumando las expresiones obtenidas tenemos $xy + y' \equiv \cos x$. ▶

Ejemplo 2. Muéstrese que la función $y = Cx^3$ es la solución general de la ecuación diferencial $xy' - 3y = 0$. Hállese la solución particular que satisface la condición $y(1) = 1$. (Hállese la curva integral que pasa por el punto $M_0(1, 1)$.)

◀ Al obtener $y' = 3Cx^2$ y sustituir las expresiones de y e y' en la ecuación diferencial, para cualquier valor de C obtenemos la identidad $3Cx^3 - 3Cx^3 \equiv 0$. Esto significa que la función $y = Cx^3$ es la solución general de la ecuación diferencial. Poniendo $x = 1$, $y = 1$, hallaremos el valor del parámetro $C = 1$ y de este modo obtendremos la solución particular buscada $y = x^3$. Con otras palabras, la curva integral que pasa por el punto M_0 (1, 1) es la parábola cúbica $y = x^3$. ▶

Sea dada la ecuación

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

que determina en el plano una familia de curvas que dependen del valor del parámetro C. Si formamos el sistema de dos ecuaciones

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \Phi'_x(x, y, C) = 0,$$

entonces eliminando de este sistema el parámetro C obtendremos, en general, la ecuación diferencial de la familia de curvas dada.

EJEMPLO 3. Hállese la ecuación diferencial de la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = 2ax$.

◀ Tenemos el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 2ax,$$
$$2x + 2yy' = 2a.$$

Eliminemos el parámetro a. A partir de la segunda ecuación hallamos $a = x + yy'$ y sustituyendo esta expresión en la primera ecuación obtenemos $x^2 + y^2 = 2x(x + yy')$, es decir, $y^2 - x^2 = 2xyy'$. Esta es la ecuación diferencial buscada. ▶

Muéstrese que las expresiones dadas determinan las soluciones generales o las integrales generales de las ecuaciones diferenciales correspondientes:

1.1. $y = x(C - \ln|x|)$, $\quad (x - y)\,dx + x\,dy = 0$.

1.2. $y = x\left(\int\limits_0^x \frac{1}{x} e^x\,dx + C\right)$, $xy' - y = xe^x$.

1.3. $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$, $(2x + y + 1)\,dx - (4x + 2y - 3)\,dy = 0$.

Determínese en la familia dada la ecuación de la curva que satisface la condición inicial citada

1.4. $y(\ln|x^2 - 1| + C) = 1$, $y(0) = 1$.

1.5. $y(1 - Cx) = 1$, $y(1) = 0{,}5$.

1.6. $y = 2 + C\cos x$, $y(0) = -1$.

1.7. Escríbase la ecuación a la cual satisfacen todos los puntos del extremo de las curvas integrales de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. ¿Cómo diferenciar los puntos del máximo de los puntos del mínimo?

1.8. Escríbase la ecuación a la cual satisfacen todos los puntos de inflexión de las curvas integrales de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, en particular de las ecuaciones diferenciales:

$$\text{a) } y' = y + x^3; \quad \text{b) } y' = e^y - x.$$

Fórmense las ecuaciones diferenciales de las familias de curvas siguientes:

1.9. De las parábolas $y = x^2 + 2ax$.

1.10. De las hipérbolas $y = a/x$.

1.11. De las catenarias $y = a \operatorname{ch} x$.

1.12. De las hipérbolas $x^2 - y^2 = 2ax$.

1.13. Fórmese la ecuación diferencial de la familia de curvas para las cuales el segmento de toda normal comprendido entre los ejes de coordenadas, se divide por la mitad en el punto de tangencia.

1.14. Fórmese la ecuación diferencial de la familia de curvas para las cuales el segmento de cualquier tangente comprendido entre los ejes de coordenadas, se divide por el punto de tangencia $M(x, y)$ en razón $|AM| : |MB| = 2 : 1$, donde A es el punto de intersección de la tangente con el eje Oy; B, con el eje Ox.

1.15. Fórmese la ecuación diferencial de la familia de curvas para las cuales el área comprendida entre los ejes de coordenadas, de esta curva y ordenada variable, es proporcional a la cuarta potencia de esta ordenada.

2. Método gráfico de construcción de curvas integrales (metodo de isoclinas). La ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ en el plano con el sistema de coordenadas rectangular cartesiano fijo Oxy determina el *campo de direcciones* por medio de la igualdad $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$.

Se llama *isoclina* de la ecuación (del campo de direcciones) cualquier curva determinada por la ecuación

$$f(x, y) = k$$

para un k fijo.

Para resolver aproximadamente (gráficamente) la ecuación $y' = f(x, y)$ construyamos en el plano las isoclinas para varios valores de k. Sea $M_0(x_0, y_0)$ un punto inicial. La isoclina L_0 que pasa por este punto corresponde al valor de k, igual a $k_0 = f(x_0, y_0)$. Tracemos el segmento M_0M_1 con el coeficiente angular k_0, hasta la intersección con la isoclina más próxima L_1 en el punto M_1 (de este modo sustituimos el arco de la curva integral por el segmento de su tangente). Luego, del punto $M_1(x_1, y_1)$ tracemos un nuevo segmento M_1M_2 con el coeficiente angular $k_1 = f(x_1, y_1)$, hasta la intersección con la isoclina siguiente L_2 en el punto M_2, etc.

Como resultado de tal construcción obtenemos una quebrada, que es la representación aproximada de la curva integral que pasa por el punto inicial M_0. Cuanto más densa se toma la rejilla de isoclinas, tanto más exacta resulta ser la curva integral.

Cambiando la posición del punto inicial M_0 se puede, de modo análogo, construir aproximadamente también otras curvas integrales.

EJEMPLO 4. Aplicando el método de isoclinas constrúyase la curva integral de la ecuación $y' = 2x$ que pasa por el origen de coordenadas.

◀ **Las isoclinas de la ecuación** dada son las rectas paralelas $2x = k$. Poniendo $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, obtenemos las isoclinas $x = 0, x = \pm 1/2, \quad x = \pm 1, x = \pm 3/2$, etc. Construyámoslas (fig. 91).

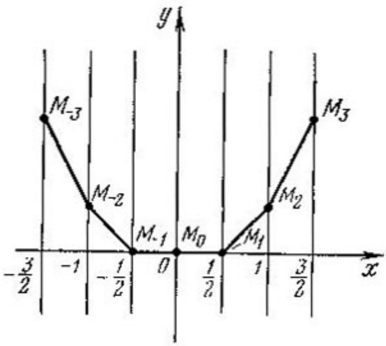


Fig. 91

Partiendo del origen de coordenadas a la izquierda y a la derecha construimos la quebrada $\ldots M_{-3}M_{-2}M_{-1}M_0M_1M_2M_3\ldots$ cuyos lados tienen coeficientes angulares ..., $-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, respectivamente. Esta quebrada es la representación aproximada de la curva integral.

Recomendamos al lector que construya la gráfica de la solución particular correspondiente $y = x^2$ y la compare con la quebrada construida. ▶

Aplicando el método de isoclinas constrúyase aproximadamente la familia de las curvas integrales de las ecuaciones diferenciales siguientes:

1.16. $y' = x + y$. **1.17.** $y' = 1 + y$.

1.18. $y' = -\frac{y}{x}$. **1.19.** $y' = y - x^2$.

1.20. $y' = \frac{y}{x+y}$. **1.21.** $y' = \frac{y-3x}{x+3y}$.

3. **Ecuaciones con variables separables.** Supongamos que en la ecuación

$$y' = f(x, y)$$

la función $f(x, y)$ se puede descomponer en factores $f_1(x)$ y $f_2(y)$, cada uno de los cuales depende sólo de una variable, o bien en la ecuación

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

los coeficientes de dx y dy se representan en forma de $M(x, y) = M_1(x) M_2(y)$, $N(x, y) = N_1(x) N_2(y)$. Al dividir por $f_2(y)$ y por $N_1(x) M_2(y)$, respectivamente, estas ecuaciones se reducen a la forma respectiva

$$f_1(x)\,dx = \frac{1}{f_2(y)}\,dy,$$

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx = -\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy.$$

Integrando los primeros miembros de estas ecuaciones respecto a x y los segundos respecto a y, obtenemos en cada una de éstas la integral general de la ecuación diferencial inicial.

EJEMPLO 5. Resuélvase la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+1}.$$

◀ Separemos las variables

$$(3y^2+1)\,dy=2x\,dx.$$

Integramos

$$\int (3y^2+1)\,dy=\int 2x\,dx+C$$

o bien

$$y^3+y-x^2=C$$

(integral general de la ecuación).

Si en la ecuación con variables separables $y'=f_1(x)\,f_2(y)$ la función $f_2(y)$ tiene una raíz real y_0, es decir, si $f_2(y_0)=0$, entonces la función $y(x)=y_0$ es la solución de la ecuación (es fácil cerciorarse de esto mediante la sustitución directa). Al dividir ambos miembros de esta ecuación por $f_2(y)$ (al separar las variables) la solución $y(x)=y_0$ puede perderse.

De modo análogo, al integrar la ecuación $M_1(x)\,M_2(y)\,dx+N_1(x)\,N_2(y)\,dy=0$ pueden perderse las curvas integrales $x(y)=x_0$ e $y(x)=y_0$, donde x_0 es la raíz real de la función $N_1(x)$, y_0 es la raíz de la función $M_2(y)$.

Por eso, al obtener la integral general de la ecuación aplicando el método de separación de las variables indicado más arriba, es necesario verificar si forman parte de ella (para los valores numéricos adecuados del parámetro C) las soluciones particulares mencionadas. Si forman parte, no hay pérdida de solución. Si no forman parte, entonces es necesario incluirlas como componentes de la integral.

EJEMPLO 6. Resuélvase la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=y\operatorname{tg}x.$$

◀ Separamos las variables

$$\frac{dy}{y}=\operatorname{tg}x\,dx.$$

Integramos

$$\ln|y|=-\ln|\cos x|+C_1$$

o bien

$$\ln|y\cos x|=C_1.$$

Para que sea más cómodo potenciar la igualdad obtenida representemos el parámetro C_1 en forma logarítmica, poniendo $C_1=\ln|C_2|$, $C_2\neq 0$ (en este caso C_1 toma todos los valores desde $-\infty$ hasta $+\infty$). Entonces

$$\ln|y\cos x|=\ln|C_2|$$

y potenciando obtenemos la integral general en forma de $y\cos x=C_2$, de donde

$$y=C_2\sec x. \tag{3}$$

Señalemos ahora que la ecuación diferencial inicial tiene, evidentemente, además la solución $y = 0$ que no figura en la notación (3), pues $C_2 \neq 0$. Introduzcamos un nuevo parámetro C, que a diferencia de C_2 toma también el valor nulo. Entonces la solución $y = 0$ formará parte de la solución general

$$y = C \sec x. \blacktriangleright$$

Aplicando la sustitución $u(x) = ax + by(x) + d$, también se reducen a las ecuaciones con variables separables, las ecuaciones diferenciales de tipo

$$y' = f(ax + by + d),\ b \neq 0.$$

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.22. $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$. **1.23.** $y' = e^{x+y}$.

1.24. $y' + \dfrac{x \operatorname{sen} x}{y \cos y} = 0$.

1.25. $(1 + y^2)\, x\, dx + (1 + x^2)\, dy = 0$.

1.26. $xy\, dx + \sqrt{1-x^2}\, dy = 0$.

1.27. $ye^{2x}\, dx - (1 + e^{2x})\, dy = 0$.

1.28. $2e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1 + e^x) \sec^2 y\, dy = 0$.

1.29. $(1 + y)(e^x\, dx - e^{2y}\, dy) - (1 + y^2)\, dy = 0$.

1.30. $y' = \cos(x + y)$. **1.31.** $y' = \dfrac{1}{2x + y}$.

1.32. $y' = (4x + y + 1)^2$.

Hállense las soluciones parciales de las ecuaciones que satisfacen las condiciones iniciales indicadas:

1.33. $(1 + y^2)\, dx - xy\, dy = 0$; $y(1) = 0$.

1.34. $(xy^2 + x)\, dy + (x^2y - y)\, dx = 0$; $y(1) = 1$.

1.35. $y' \operatorname{tg} x = y$; $y(\pi/2) = 1$.

4. Euaciones homogéneas. La ecuación diferencial de primer orden se llama *homogénea* si se puede reducir a la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

o a la forma

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{5}$$

donde $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son *funciones homogéneas* del mismo orden, es decir existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $M(tx, ty) = t^k M(x, y)$ y $N(tx, ty) = t^k N(x, y)$ son idénticos respecto a x, y y $t \neq 0$.

Con ayuda de la sustitución $y/x = u(x)$ las ecuaciones homogéneas (4) y (5) se transforman en ecuaciones con variables separables.

EJEMPLO 7. Resuélvase la ecuación

$$y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}.$$

◀ Pongamos $\frac{y}{x}=u$, o bien $y=ux$. Entonces $y'=u+x\frac{du}{dx}$, lo que da, después de la sustitución en la ecuación inicial, la ecuación con variables separables

$$x\frac{du}{dx}=\cos u.$$

Separemos las variables

$$\frac{du}{\cos u}=\frac{dx}{x}$$

e integremos

$$\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=Cx.$$

Obtenemos la solución general

$$u=2\operatorname{arctg} Cx-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Volviendo a la función y, hallamos

$$y=x\left(2\operatorname{arctg} Cx-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right), \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Al dividir entre $\cos u$ fueron perdidas las soluciones $y=x\left(\frac{\pi}{2}+\right.$ $\left.+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. Añadiéndolas a la familia de soluciones obtenida encontramos la integral general en forma de

$$y=x\left(2\operatorname{arctg} Cx+\frac{\pi}{2}+\pi(2n-1)\right),$$

$$y=x\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right);\ n,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Las ecuaciones diferenciales del tipo

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \tag{6}$$

cuando $\frac{a_2}{a_1}\neq\frac{b_2}{b_1}$ se reducen a las ecuaciones homogéneas con ayuda del cambio de variables

$$x=u+m, \quad y=v+n$$

donde m y n se obtienen del sistema de ecuaciones

$$a_1m+b_1n+c_1=0,$$
$$a_2m+b_1n+c_2=0.$$

Ya que aquí $dx = du$, $dy = dv$, la ecuación (6) se transforma en la ecuación del tipo (4) respecto a la función $v(u)$:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v + a_1m + b_1n + c_1}{a_2u + b_2v + a_2m + b_2n + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) =$$

$$= f\left(\frac{a_1 + b_1\dfrac{v}{u}}{a_1 + b_2\dfrac{v}{u}}\right) = \varphi\left(\frac{v}{u}\right).$$

Si en la ecuación (6) $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1} = \lambda$ y por consiguiente, $a_2x + b_2y = \lambda(a_1x + b_1y)$, entonces ella toma la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_2y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = \varphi(a_1x + b_1y).$$

Sustituyendo $u(x) = a_1x + b_1y(x)$ esta ecuación se reduce a la ecuación con variables separables.

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.36. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$. **1.37.** $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{sen}\dfrac{y}{x}$.

1.38. $y' = (x - y)/(x + y)$.

1.39. $(x^2 + xy)\,y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$.

1.40. $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$.

1.41. $(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0$.

1.42. $(y + 2)\,dx - (2x + y - 4)\,dy = 0$.

1.43. $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas:

1.44. $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$; $y(1) = 1$.

1.45. $(\sqrt{xy} - x)\,dy + y\,dx = 0$; $y(1) = 1$.

1.46. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx - x\,dy = 0$; $y(1) = 0$.

5. Ecuaciones lineales. La ecuación diferencial de primer orden se llama *lineal* si contiene y e y' de primer grado, es decir, tiene la forma

$$y' = P(x)\,y + Q(x). \tag{7}$$

Para $Q(x) \equiv 0$ la ecuación (7) toma la forma de

$$y' = P(x)\,y$$

y se llama *lineal homogénea*. Es la ecuación con variables separables y su solución general tiene la forma

$$y = Ce^{\int P(x)\,dx} \tag{8}$$

donde C es una constante arbitraria y $\int P(x)\,dx$ es una de las primitivas de la función $P(x)$.

Se puede integrar la ecuación *lineal no homogénea* (7) aplicando uno de los siguientes métodos.

a) MÉTODO DE VARIACIÓN DE LA CONSTANTE. Buscaremos la solución de la ecuación (7) en forma de

$$y=C(x)\,e^{\int P(x)dx} \tag{9}$$

que se obtiene de (8) si cambiamos la constante C por la función $C(x)$. Sustituyendo la expresión (9) en la ecuación (7) tenemos, para la función buscada $C(x)$, la ecuación con variables separables

$$C'(x)=Q(x)\,e^{-\int P(x)dx}.$$

Su solución general es

$$C(x)=\int Q(x)\,e^{-\int P(x)dx}\,dx+C,$$

donde C es una constante arbitraria y $\int Q(x)\,e^{-\int P(x)dx}\,dx$ es una de las primitivas. Sustituyendo la expresión obtenida para $C(x)$ en la fórmula (9) obtenemos la solución general (7):

$$y=e^{\int P(x)dx}\left(C+\int Q(x)\,e^{-\int P(x)dx}\,dx\right). \tag{10}$$

b) MÉTODO DE SUSTITUCIÓN. Pongamos $y(x)=u(x)\,v(x)$. Entonces la ecuación (7) se reduce a la forma

$$v\left(\frac{du}{dx}-P(x)\,u\right)+\left(\frac{dv}{dx}\,u-Q(x)\right)=0, \tag{11}$$

Escojamos la función $u(x)$ de tal modo que el primer paréntesis en el primer miembro de la ecuación (11) se anule. Para esto integramos la ecuación con variables separables

$$\frac{du}{dx}-P(x)\,u=0$$

y escogemos cualquier solución particular suya $u=u_1(x)$. Sustituyendo la función $u_1(x)$ en vez de u en el primer miembro de la ecuación (11), obtenemos la ecuación con variables separables respecto a la función $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx}\,u_1(x)-Q(x)=0.$$

Hallemos la solución general de esta ecuación:

$$v=v(x,\ C).$$

Multiplicando las funciones halladas $u_1(x)$ y $v(x, C)$, obtenemos la solución general de la ecuación (7):

$$y = u_1(x)\, v(x, C).$$

Ejemplo 8. Resuélvase mediante el método de variación de la constante la ecuación

$$y' = y \operatorname{ctg} x + \operatorname{sen} x.$$

◀ Analicemos primero la ecuación lineal homogénea correspondiente

$$y' = y \operatorname{ctg} x.$$

Su solución general es $y = C \operatorname{sen} x$. Por consiguiente, buscamos la solución general de la ecuación inicial en forma de $y = C(x) \operatorname{sen} x$. Sustituyendo y e $y' = C'(x) \operatorname{sen} x + C(x) \cos x$ en la ecuación dada:

$$C'(x) \operatorname{sen} x + C(x) \cos x = \operatorname{ctg} x \cdot C(x) \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x,$$

de donde $C'(x) = 1$, y entonces $C(x) = x + C$. Por consiguiente, la solución general de la ecuación es

$$y = (x + C) \operatorname{sen} x. \ ▶$$

Ejemplo 9. Resuélvase mediante el método de sustitución la ecuación, lineal respecto a x y $\frac{dx}{dy}$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x}{y} + \frac{3}{y^2}.$$

◀ Pongamos $x = uv$ y reduzcamos la ecuación a la forma de

$$v\left(\frac{du}{dy} - \frac{2u}{y}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\, u - \frac{3}{y^2}\right) = 0. \qquad (12)$$

Hallemos la función $u_1(y)$ resolviendo la ecuación

$$\frac{du}{dy} - \frac{2u}{y} = 0$$

y escogiendo de su solución general $u = y^2 + C$ una solución particular, por ejemplo, $u_1(y) = y^2$. Sustituyendo $u_1(y)$ en la ecuación (12) tenemos:

$$\frac{dv}{dy}\, y^2 - \frac{3}{y^2} = 0, \quad \text{ó} \quad \frac{dv}{dy} = \frac{3}{y^4}.$$

La solución general de esta ecuación:

$$v(y, C) = C - \frac{1}{y^3}.$$

Multiplicando entre sí $u_1(y)$ y $v(y, C)$, obtenemos la solución general de la ecuación dada:

$$x = Cy^2 - \frac{1}{y}. \ ▶$$

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.47. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

1.48. $(1+x^2)\,y' - 2xy + (1+x^2)^2$.

1.49. $y' + 2y = e^{3x}$. **1.50.** $y' + \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1$.

1.51. $y' = \dfrac{2y}{x+1} + e^x(x+1)^2$. **1.52*.** $y' = \dfrac{y}{x+y^3}$.

1.53. $(1+y^2)\,dx = (\operatorname{arctg} y - x)\,dy$.

1.54*. $y' + \operatorname{tg} y = \dfrac{x}{\cos y}$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas:

1.55. $y' + y \operatorname{tg} x = 1/\cos x$; $y(0) = 0$.

1.56. $y' = 2y + e^x - x$; $y(0) = 1/4$.

1.57. $y' = y/(2y \ln y + y - x)$; $y(1) = 1$.

6. Ecuación de Bernoulli. Se llama *ecuación de Bernoulli* la ecuación diferencial de primer orden del tipo.

$$y' = P(x)\,y + Q(x)\,y^m, \tag{13}$$

donde $m \neq 0$, $m \neq 1$ (si $m = 0$ la ecuación (13) es lineal y si $m = 1$, es la ecuación con variables separables).

Al igual que la ecuación lineal, la ecuación de Bernoulli puede ser integrada sustituyendo $y = uv$ o reducida a la ecuación lineal aplicando la sustitución $z = y^{1-m}$. Hay que tener en cuenta que si $m > 1$ puede perderse la solución $y = 0$.

EJEMPLO 10. Resuélvase la ecuación

$$y' = \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y}.$$

◀ Suponiendo $y = uv$ reducimos la ecuación a la forma

$$v\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right) + \left(\frac{dv}{dx}\,u - \frac{x^2}{uv}\right) = 0. \tag{14}$$

De la solución general $u = Cx$ de la ecuación

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0$$

escogemos en calidad de la función u una solución particular, por ejemplo,

$$u_1 = x.$$

Sustituyendo u_1 en la ecuación (14) obtenemos una nueva ecuación $\dfrac{dv}{dx}\,x - \dfrac{x^2}{xv} = 0$, ó $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{v}$. Su solución general es $v = \sqrt{2x + C}$.

Multiplicando entre sí u_1 y v, tenemos la solución general de la ecuación inicial $y = x\sqrt{2x + C}$. ▶

EJEMPLO 11. Resuélvase la ecuación de Bernoulli respecto a $x = x(y)$:

$$\frac{dx}{\partial y}=\frac{x}{2y}-\frac{1}{2x}.$$

◀ Pongamos $x = uv$ y reduzcamos la ecuación a la forma:

$$v\left(\frac{du}{dy}-\frac{u}{2y}\right)+\left(\frac{dv}{dy}u+\frac{1}{2uv}\right)=0.$$

Después de analizar la ecuación

$$\frac{du}{dy}-\frac{u}{2y}=0,$$

tomemos su solución particular $u_1 = \sqrt{y}$. Entonces llegamos a la ecuación

$$\frac{dv}{dy}\sqrt{y}+\frac{1}{2v\sqrt{y}}=0$$

cuya solución general es

$$v^2=\ln\frac{C}{y}.$$

Multiplicando entre sí $u_1^2 = y$ y v^2 obtendremos la integral general de la ecuación inicial

$$x^2=y\ln\frac{C}{y}. \blacktriangleright$$

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.58. $y'+4xy=2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

1.59. $y'=y\operatorname{ctg}x+\dfrac{y^2}{\operatorname{sen}x}$.

1.60.* $y'=\dfrac{2x}{x^2\cos y+\operatorname{sen}2y}$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfacen las condiciones iniciales:

1.61. $3dy=(1-3y^3)\,y\operatorname{sen}x\,dx;\qquad y(\pi/2)=1$.

1.62. $y\,dx+\left(x-\frac{1}{2}x^3y\right)dy=0;\ \ y(1/2)=1$.

7. Ecuaciones diferenciales exactas. La ecuación diferencial de primer orden del tipo

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0 \qquad (15)$$

se llama *ecuación diferencial exacta* (o en diferenciales totales), si su primer miembro es una diferencial total de cierta función $U(x, y)$,

es decir,

$$P(x, y)=\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q(x, y)=\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Para que la ecuación (15) sea una ecuación diferencial exacta, es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{16}$$

Si la ecuación (15) es una ecuación diferencial exacta, entonces se puede escribirla en forma

$$dU(x, y)=0.$$

La integral completa de esta ecuación es:

$$U(x, y)=C,$$

donde C es una constante arbitraria.

La función $U(x, y)$ puede ser hallada del modo siguiente. Integrando la igualdad $\frac{\partial U}{\partial x}=P(x, y)$ respecto a x para un y fijo y señalando que la constante arbitraria puede depender en este caso de y, tenemos

$$U(x, y)=\int P(x, y)\,dx+\varphi(y). \tag{17}$$

Luego, de la igualdad

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx+\varphi'(y)=Q(x, y)$$

hallamos la función $\varphi(y)$ y sustituyéndola en (17) obtenemos la función $U(x, y)$.

Es evidente que la función buscada $U(x, y)$ está definida con exactitud de hasta la constante aditiva arbitraria. Para escribir la integral general de la ecuación inicial es suficiente escoger una de las funciones de la familia que obtenemos.

OBSERVACIÓN. Un método más simple de determinación de la función $U(x, y)$ consiste en el cálculo de la así llamada integral curvilínea de segunda especie

$$U(x, y)=\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy,$$

donde los puntos $M_0(x_0, y_0)$ y $M(x, y)$ y el camino de integración están situados en la región de la continuidad de las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ y de sus derivadas parciales, además $M_0(x_0, y_0)$ es cierto punto fijo.

EJEMPLO 12. Resuélvase la ecuación

$$\frac{y}{x}\,dx+(y^3+\ln x)\,dy=0,$$

cerciorándose previamente de que ésta es la ecuación diferencial exacta.

◀ Verifiquemos la condición (16):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}\,; \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(y^3+\ln x)=\frac{1}{x}\,.$$

La condición (16) está cumplida, por consiguiente la ecuación dada es la ecuación diferencial exacta.

Hallemos la función $U(x, y)$. Integrando respecto de x, si y es constante, la igualdad

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x, y)=\frac{y}{x}$$

obtenemos

$$U(x, y)=\int \frac{y}{x}\,dx+\varphi(y)=y\ln x+\varphi(y). \tag{18}$$

Señalemos que al calcular la primitiva escribimos aquí $\ln x$ en vez de $\ln |x|$, pues la ecuación inicial contiene $\ln x$ y, por consiguiente, tiene sentido sólo para $x > 0$.

Sustituyendo (18) en la igualdad

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x, y)=y^3+\ln x$$

tenemos

$$\ln x+\varphi'(y)=y^3+\ln x,$$

de donde

$$\varphi(y)=\frac{1}{4}y^4+C_1. \tag{19}$$

Poniendo, por ejemplo, $C_1=0$ hallamos partiendo de (18) y (19)

$$U(x, y)=y\ln x+\frac{1}{4}y^4.$$

Por consiguiente, la integral general de la ecuación dada tiene la forma

$$y\ln x+\frac{1}{4}y^4=C. ▶$$

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales indicadas más abajo después de cerciorarse que son ecuaciones diferenciales exactas:

1.63. $(2x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0.$

1.64. $(10xy-8y+1)\,dx+(5x^2-8x+3)\,dy=0.$

1.65. $(2x+e^{x/y})\,dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{x/y}\,dy=0.$

1.66. $2x\cos^2 y\,dx+(2y-x^2\operatorname{sen} 2y)\,dy=0.$

8. **Teorema de existencia y unicidad de la solución. Soluciones singulares.** Se llama *problema de Cauchy* para la ecuación diferencial $y'=f(x, y)$, el problema acerca de la determinación de la solución

particular de esta ecuación que satisface la condición inicial dada $y(x_0) = y_0$.

TEOREMA DE CAUCHY. *Si en la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ la función $f(x, y)$ es continua en cierta región D del plano Oxy y tiene en esta región la derivada parcial acotada $f'_y(x, y)$, entonces para cualquier punto $(x_0, y_0) \in D$ en cierto intervalo $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$ existe una solución y además única $y(x)$ de esta ecuación, que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$.*

Geométricamente esto significa, que por cada punto M de la región D pasa una y sólo una curva integral de la ecuación $y' = f(x, y)$.

Los puntos de la región D en los cuales se altera la unicidad de la solución del problema de Cauchy se llaman *puntos singulares* de la ecuación diferencial.

La solución (curva integral) de la ecuación $y' = f(x, y)$, en cada punto de la cual se altera la unicidad de la solución del problema de Cauchy, se llama *solución singular* (*curva integral singular*) de esta ecuación. No se puede obtener la solución singular a partir de la general para ninguno de los valores de C (incluyendo también $C = \pm\infty$).

La envolvente de una familia de curvas determinadas por la solución general $y = \varphi(x, C)$ o por la integral general $\Phi(x, y, C) = 0$, es una curva integral singular. Se determina eliminando, si es posible, el parámetro C del sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C), \\ 0 = \varphi'_C(x, C) \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0. \end{cases}$$

La función determinada de este modo es conveniente sustituirla en la ecuación diferencial dada y es necesario cerciorarse que es su solución.

EJEMPLO 13. Hállese la región en la cual la ecuación

$$y' = x\sqrt{1 - y^2}$$

tiene una única solución.

◀ Aquí $f(x, y) = x\sqrt{1-y^2}$ es una función continua para $|y| \leqslant 1$; la derivada parcial $f'_y(x, y) = -\dfrac{xy}{\sqrt{1-y^2}}$ está acotada para $|y| \leqslant a < 1$. Por consiguiente, la ecuación dada tiene una única solución en cualquier franja $-a \leqslant y \leqslant a$ (para $0 < a < 1$). ▶

EJEMPLO 14. Hállense las soluciones singulares de la ecuación

$$y' = \sqrt{1 - y^2},$$

conociendo su solución general $y = \operatorname{sen}(x + C)$, $|x + C| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

◀ Compongamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{sen}(x + C), \\ 0 &= \cos(x + C), \end{aligned} \quad |x + C| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Eliminando C encontramos dos funciones $y = \pm 1$, que evidentemente son soluciones de la ecuación dada y no se obtienen a partir de la solución general para ninguno de los valores de C. Por consiguiente,

$y = \pm 1$ son soluciones singulares.

Hállense las regiones de existencia y unicidad de la solución para las ecuaciones diferenciales:

1.67. $y' = x^2 - y^2$. **1.68.** $y' = \dfrac{y}{y-x}$.

1.69. $y' = 1 + \operatorname{tg} y$. **1.70.** $y' = x^2 + \sqrt{x - y^2}$.

Hállense las soluciones singulares de las siguientes ecuaciones diferenciales, conociendo las soluciones generales (donde están indicadas).

1.71. $y' = \dfrac{2\sqrt{y}}{x}$.

1.72. $y' = 4x\sqrt{y-1}$; $y = (x^2 + C)^2 + 1$.

1.73. $xy'^2 + 2xy' - y = 0$; $(y - C)^2 = 4Cx$.

1.74. $y = y'^2 - xy' + \dfrac{x^2}{2}$; $y = \dfrac{x^2}{2} + Cx + C^2$.

9. Ecuaciones no resueltas respecto a la derivada. Sea la ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$ resoluble, bien respecto a la función buscada, es decir, tiene la forma

$$y = f(x, y'), \tag{20}$$

o bien respecto al argumento, es decir, se escribe en la forma

$$x = f(y, y'). \tag{21}$$

Entonces la ecuación se integra introduciendo el parámetro $p = y'$. Las ecuaciones (20) y (21) se transforman en ecuaciones algebraicas y si las diferenciamos respecto a x o a y, obtenemos los sistemas de ecuaciones

$$y = f(x, p) \qquad x = f(y, p),$$

$$p = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} \text{ ó } \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Partiendo de estos sistemas hallamos respectivamente la solución general de la ecuación (20) ó (21) en la forma explícita o paramétrica.

EJEMPLO 15. Resuélvase la ecuación

$$y = y'^2 + xy' - x.$$

◀ Introduzcamos el parámetro $p = y'$. Entonces

$$y = p^2 + x(p - 1). \tag{22}$$

Diferenciando esta igualdad respecto a x obtendremos

$$p = 2p\frac{dp}{dx} + p - 1 + x\frac{dp}{dx},$$

o bien

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{2p+x}.$$

Escribamos la última igualdad en la forma

$$\frac{dx}{dp}=x+2p.$$

Esta es la ecuación lineal; su solución general es:

$$x=Ce^{p}-2(p+1). \tag{23}$$

Al sustituir la expresión (23) en la fórmula (22) obtendremos

$$y=Ce^{p}(p-1)-p^2+2. \tag{24}$$

El sistema de relaciones (23) y (24) determina la solución general de la ecuación inicial en forma paramétrica:

$$x=Ce^{p}-2(p+1), \quad y=Ce^{p}(p-1)-p^2+2. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 16. Resuélvase la ecuación

$$x=y'^2+\frac{y}{y'}.$$

◀ Suponiendo $p=y'$ tenemos

$$x=p^2+\frac{y}{p}.$$

Diferenciamos esta igualtad respecto a y:

$$\frac{1}{p}=2p\frac{dp}{dy}+\frac{1}{p}-\frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy}$$

ó bien

$$\frac{dp}{dy}\left(2p-\frac{y}{p^2}\right)=0.$$

De aquí

$$p_1=C \quad \text{y} \quad p_2=\sqrt[3]{\frac{1}{2}y}.$$

Sustituyendo uno tras otro ambos resultados en la expresión para x encontramos la solución general

$$y=Cx-C^3$$

y la solución

$$y=\frac{2}{3\sqrt{3}}x^{3/2},$$

la cual, como es fácil cerciorarse, es singular. ▶

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.75. $y=y'^2+4y'^3$. **1.76.** $y=y'\sqrt{1+y'^2}$.

1.77. $y=(y'-1)e^{y'}$. **1.78.** $y=\frac{y'^2}{2}+2xy'+x^2$.

1.79. $x=y'^3-y'+2$. **1.80.** $x=y'\cos y'$.

1.81. $x=2y'-\ln y'$. **1.82.** $x=\frac{y}{y'}+\frac{1}{y'^2}$.

Un caso particular de la ecuación del tipo (20) es la así llamada *ecuación de Lagrange*

$$y=xf(y')+\varphi(y') \tag{25}$$

la cual para $f(y')=y'$ se llama *ecuación de Clairaut*. Introduciendo el parámetro $p=y'$ la ecuación (25) se reduce a la forma

$$y=xf(p)+\varphi(p)$$

en el caso de la ecuación general de Lagrange y a la forma

$$y=xp+\varphi(p)$$

en el caso de la ecuación de Clairaut.

Las soluciones singulares de la ecuación de Lagrange tienen la forma

$$y=xf(p_0)+\varphi(p_0),$$

donde p_0 es cualquiera de las raíces de la ecuación $f(p)=p$.

La solución general de la ecuación Clairaut tiene la forma

$$y=Cx+\varphi(C) \tag{26}$$

y la solución singular,

$$x=-\varphi'(p), \quad y=-\varphi'(p)\,p+\varphi(p) \tag{27}$$

que es la envolvente de una familia de curvas integrales (26).

De este modo se puede enunciar la siguiente *regla práctica*. Sustituyendo en la ecuación Clairaut el símbolo y' por el símbolo C obtendremos inmediatamente la solución general (26). Diferenciándola respecto a C y eliminando C del sistema de dos ecuaciones (de la solución general y del resultado de la diferenciación) obtenemos la solución singular (27).

EJEMPLO 17. Resuélvase la ecuación de Lagrange

$$y=xy'^2+y'.$$

◀ Poniendo $y'=p$ hallamos

$$y=xp^2+p.$$

Diferenciando esta igualdad respecto a x tenemos

$$p=p^2+2xp\frac{dp}{dx}+\frac{dp}{dx}$$

ó

$$\frac{dx}{dp}=x\frac{2p}{p-p^2}+\frac{1}{p-p^2}.$$

Esta ecuación lineal tiene la solución general

$$x=\frac{1}{(1-p)^2}\,(C+\ln|p|-p),$$

sustituyendo la cual en la fórmula para y obtenemos la solución general de la ecuación inicial en la forma paramétrica:

$$x=\frac{C+\ln|p|-p}{(1-p)^2}, \qquad y=\frac{(C+\ln|p|-p)\,p^2}{(1-p)^2}+p.$$

Además, la ecuación tiene las soluciones singulares $y=0$ e $y=$ $=x+1$ que corresponden a las raíces $p_1=0$ y $p_2=1$ de la ecuación $p^2=p$. ►

EJEMPLO 18. Resuélvase la ecuación

$$y=xy'-y'^4.$$

◄ La ecuación dada tiene la forma (25) para $f(y')=y'$, es decir, es la ecuación de Clairaut. Siguiendo la regla práctica obtenemos la solución general

$$y=Cx-C^4.$$

Eliminando luego el parámetro C del sistema de ecuaciones

$$y=Cx-C^4,$$
$$0=x-4C^3$$

obtendremos la solución singular

$$y=\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}\,x^{4/3}. \ ►$$

Resuélvanse las ecuacines diferenciales:

1.83. $y=x\,\dfrac{1+y'^2}{2y'}$. **1.84.** $y=2xy'+\dfrac{1}{y'^2}$.

1.85. $y=xy'^2+y'^3$. **1.86.** $y=\dfrac{1}{2}\,(xy'+y'\ln y')$.

1.87. $y=xy'-\dfrac{1}{y'}$. **1.88.** $y=xy'+y'+\sqrt{y'}$.

1.89. $y=xy'-e^{y'}$. **1.90.** $y=xy'+\cos y'$.

10. Problemas mixtos de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Defínanse los tipos de las ecuaciones diferenciales e indíquense de modo general los métodos de su resolución:

1.91. $\operatorname{sen} x^3=e^{\frac{y'-x^3}{y}}$. **1.92.** $\sqrt{x^2-y^2}=\dfrac{2x^2}{y-3x-xy'}$.

1.93. $1+x+(1+x^2)(e^x-e^{2y}y')=0$.

1.94. $2y'(1-x^2)-xy-2xy^2+2x^3y^2=0$.

1.95. $y\,dx+(2x-y^2)\,dy=0.$

1.96. $\left(\frac{x}{y}-x+y^2\right)dx+\left(2xy+y-\frac{x^2}{2y^2}\right)dy=0$

1.97. $y\,dx+(x-2\sqrt{xy})\,dy=0.$

1.98. $(x^2+y^2+1)\,dy+xy\,dx=0.$

1.99. $y'=\operatorname{sen}(y-x).$ **1.100.** $x=\arccos\frac{y'-a^x}{y}.$

1.101. $\sqrt{y}=\frac{y'-ye^{x^2\operatorname{sen}x}}{x^2+2x-1}.$

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.102. $y'+xy=x^3.$ **1.103.** $(x-y)\,dy-y\,dx=0.$

1.104. $(x\cos 2y+1)\,dx-x^2\operatorname{sen}2y\,dy=0.$

1.105. $y'=y\operatorname{tg}x-y^2\cos x.$

1.106. $y'=\frac{1-2x}{y^2}.$

1.107. $2y\,dx+(y^2-6x)\,dy=0.$

1.108. $(xye^{x/y}+y^2)\,dx=x^2e^{x/y}\,dy.$

1.109. $(xy^2+x)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0.$

1.110. $(2x^3-xy^2)\,dx+(2y^3-x^2y)\,dy=0.$

1.111. $xy'+y=y^2\ln x.$

1.112. $3x+y-2+y'(x-1)=0.$

1.113. $y'=\frac{x+y}{x-y}.$ **1.114.** $y'\cos x-y\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}2x.$

1.115. $(2x+\ln y)\,dx+\left(\frac{x}{y}+\operatorname{sen}y\right)dy=0.$

1.116. $y=xy'-\ln y'.$ **1.117.** $y'=\frac{1}{xy+x^2y^3}.$

1.118. $\left(x-y\operatorname{sen}\frac{x}{y}\right)dx+x\operatorname{sen}\frac{y}{x}\,dy=0.$

1.119*. $(1-y^2)\,dx=(\sqrt{1+y^2}\cos y-xy)\,dy.$

1.120. $\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx-\frac{x}{x^2+y^2}\,dy=0.$

1.121. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\operatorname{sen}^2x}.$ **1.122.** $y=y'^2+2xy'+\frac{x^2}{2}.$

1.123*. $(x-2y^3)\,dx+3y^2(2x-y^3)\,dy=0.$

11. Problemas geométricos y físicos que llevan a la resolución de las ecuaciones diferenciales de primer orden. En los problemas de geometría, en los cuales se exige hallar la ecuación de la curva basándose en la propiedad dada de su tangente, normal o área del trapecio curvilíneo, se emplea la interpretación geométrica de la derivada (pendiente de la tangente) y de la integral con límite variable (área del trapecio curvilíneo con ordenada limitadora móvil), así como las fórmulas generales siguientes para determinar las longitudes de los segmentos de la tangente t, de la normal n, de la subtangente s_t y de la subnormal s_n (fig. 92):

$$t=\left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|, \quad n=|y\sqrt{1+y'^2}|,$$

$$s_t=\left|\frac{y}{y'}\right|, \qquad s_n=|yy'|.$$

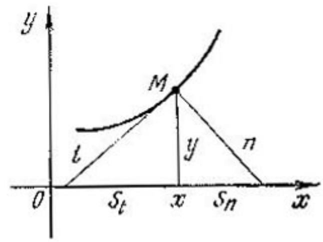


Fig. 92

EJEMPLO 19. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el origen de coordenadas, si en cada su punto $M(x, y)$ la subtangente s_t es k veces menor que la subnormal s_n.

◀ Sea $y = f(x)$ la ecuación de la curva buscada. Utilizando las expresiones para la subtangente s_t y la subnormal s_n obtenemos inmediatamente la ecuación diferencial

$$|yy'|=k\left|\frac{y}{y'}\right|$$

ó

$$(y')^2 = k.$$

Integrando esta ecuación y tomando en consideración la condición inicial $y(0) = 0$, obtenemos la ecuación buscada

$$y=\pm\sqrt{k}\cdot x$$

(dos rectas). ▶

EJEMPLO 20. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1, 1)$, si para cualquier segmento $[1, x]$ el área del trapecio curvilíneo limitado por el arco correspondiente de esta curva, es dos veces mayor que el producto de coordenadas del punto $M(x, y)$ de la curva $(x > 0,\ y > 0)$.

◀ Según la condición del problema tenemos

$$\int_1^x y(t)\,dt=2xy(x).$$

Diferenciando esta ecuación respecto a x tenemos la ecuación diferencial $y = 2(y + xy')$ o

$$y'=-\frac{y}{2x}.$$

Integrando esta ecuación y tomando en consideración la condición inicial $y(1) = 1$, hallamos la ecuación de la curva buscada:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}. \blacktriangleright$$

1.124. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(\sqrt{2}, 0)$, si la suma de las longitudes de su tangente y subtangente es igual al producto de corrdenadas del punto de tangencia.

1.125. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1, 2)$, si su subtangente es dos veces mayor que la abscisa del punto de tangencia.

1.126. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1/2, -1)$, si la longitud del segmento del semieje de las abscisas, que se corta por su tangente, es igual al cuadrado de la abscisa del punto de tangencia.

1.127. Hállense las ecuaciones de las curvas para las cuales la longitud del segmento de la normal es constante e igual a a.

1.128. Hállense las ecuaciones de las curvas cuya subnormal tiene una longitud constante igual a a.

1.129. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(0, 2)$, si el área del trapecio curvilíneo limitado por el arco de esta curva, es dos veces mayor que la longitud del arco correspondiente.

1.130. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1, 1/2)$, si para cualquier segmento $[1, x]$ el área del trapecio curvilíneo limitado por el arco correspondiente, es igual a la razón entre la abscisa x del punto extremo y la ordenada.

1.131. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(0, 3)$, si la subtangente en todo punto es igual a la suma de la abscisa del punto de tangencia y de la distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto de tangencia $\left(\text{limítese a analizar el caso de } \frac{y}{y'} > 0\right)$.

1.132. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1, 0)$ si la longitud del segmento del eje de abscisas que se corta por su normal es en 2 mayor que la abscisa del punto de tangencia.

1.133. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el origen de coordenadas, si para cualquier segmento $[a, x]$ el área del trapecio curvilíneo limitado por el arco correspondiente de esta curva, es igual al cubo de la ordenada del punto extremo del arco.

1.134. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto con coordenadas polares $r = 2$, $\varphi = 0$, si el ángulo α entre su tangente y el radio vector del punto de tangencia es una magnitud constante: $\operatorname{tg} \alpha = a$.

1.135. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 1), si a la longitud del segmento del eje de abscisas que se corta por cualquier tangente a ella, es igual a la longitud de esta tangente.

1.136. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (3, 1), si la longitud del segmento que se corta por cualquier tangente suya sobre el eje de ordenadas, es igual a su subnormal.

1.137. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el origen de coordenadas, si el punto medio del segmento de su normal desde un punto cualquiera de la curva hasta el eje Ox, está situado en la parábola $2y^2 = x$.

1.138. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 0), si el área del trapecio formado por la tangente, los ejes de coordenadas y la ordenada del punto de tangencia es constante e igual a 3/2.

1.139. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (0, 1), si el área del triángulo formado por el eje de abscisas, la tangente y el radio vector del punto de tangencia es constante e igual a 1.

1.140. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 2), si el producto de la abscisa del punto de tangencia por la abscisa del punto de intersección de la normal con el eje Ox, es igual al cuadrado duplicado de la distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto de tangencia.

1.141. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto con coordenadas polares $r = \pi$, $\varphi = \pi/2$, si el área del sector limitado por esta curva, el eje polar y el radio polar variable, es seis veces menor que el cubo del radio polar.

Llamamos *trayectorias ortogonales* para la familia uniparamétrica S_1 de líneas $y = \Phi(x, a)$, a otra familia S_2 de líneas que intersecan las líneas de la primera familia bajo el ángulo recto.

EJEMPLO 21. Hállense las trayectorias ortogonales de la familia de las parábolas cúbicas $y = ax^3$.

◀ Hallamos la ecuación diferencial de la familia dada, eliminando a del sistema de ecuaciones

$$y = ax^3,$$
$$y' = 3ax^2.$$

Obtendremos

$$y' = \frac{3y}{x}.$$

La ecuación diferencial de la familia de las trayectorias ortogonales es

$$y' = -\frac{x}{3y}.$$

Su integral general

$$x^2 + 3y^2 = C^2$$

es la ecuación de la familia de las trayectorias ortogonales (elipses).▶

Hállense las trayectorias ortogonales de las familias dadas de las curvas (a es un parámetro):

1.142. $ay^2 = x^3$. **1.143.** $y = ax^2$.

1.144. $x^2 - 2_y{}^2 = a^2$. **1.145.** $y = ae^{2x}$.

Al formar las ecuaciones diferenciales de primer orden en los problemas físicos a menudo se utiliza el *método de las diferenciales*, según el cual las relaciones aproximadas entre los incrementos pequeños de las magnitudes, se sustituyen por las relaciones entre sus diferenciales. Esta sustitución no se refleja en los resultados, pues todo se reduce a la eliminación de los infinitésimos de órdenes superiores. El otro método para formar las ecuaciones diferenciales consiste en la utilización del sentido físico de la derivada como velocidad de la duración del proceso.

EJEMPLO 22. En un recipiente inicialmente se contiene A kg de sustancia disuelto en B litros de agua. Luego, cada minuto en el recipiente entran M litros de agua y salen N litros de disolución ($M \geqslant N$), además la concentración se conserva homogénea mediante la agitación. Hállese la cantidad de sustancia en el recipiente dentro de T minutos, después del comienzo del proceso.

◀ Designemos por $x(t)$ la cantidad de sustancia en el recipiente dentro de t minutos después del comienzo del proceso y por $(x + \Delta x)$ en el tiempo $(t + \Delta t)$. Señalemos que $\Delta x < 0$ para $\Delta t > 0$ (es decir, la disolución «se debilita»).

Sea $V(t)$ el volumen de la mezcla en el momento t:

$$V(t) = B + Mt - Nt.$$

La concentración de la sustancia en el momento t es igual, evidentemente, a x/V. En un lapso de tiempo infinitamente pequeño $[t, t + \Delta t]$ la cantidad de sustancia se cambia en una magnitud infinitesimal Δx para la cual es válida la igualdad aproximada

$$\Delta x \approx -\frac{x}{V} N \Delta t = -\frac{Nx}{B+(M-N)\,t}\,\Delta t.$$

Sustituyendo los incrementos Δx y Δt por las diferenciales dx y dt obtenemos la ecuación diferencial:

$$dx = -\frac{Nx}{B+(M-N)\,t}\,dt.$$

Integrando esta ecuación con variables separables y considerando $M > N$ hallamos la solución general:

$$x(t) = \frac{C}{(B+(M-N)\,t)^{\frac{N}{M-N}}}.$$

Utilizando la condición inicial $x = A$ para $t = 0$ hallamos la solución particular

$$x(t) = A\left(\frac{B}{B+(M-N)\,t}\right)^{\frac{N}{M-N}}.$$

Poniendo $t = T$, obtendremos la respuesta:

$$x(T) = A\left(\frac{B}{B+(M-N)\,T}\right)^{\frac{N}{M-N}}.$$

El caso de $M = N$ exige un análisis particular (véase el problema 1.154). ▶

1.146. La velocidad de enfriamiento de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperaturas del cuerpo y el medio ambiente que lo rodea (ley de Newton). Hállese la temperatura T en función del tiempo t, si el cuerpo calentado hasta T_0 grados está introducido en un local donde la temperatura es constante e igual a a grados.

1.147. ¿Al cabo de cuánto tiempo la temperatura de un cuerpo calentado hasta 100 °C descenderá hasta 25 °C, si la temperatura en el local es igual a 20 °C y durante los primeros 10 minutos el cuerpo se enfrió hasta 60 °C?

1.148. La acción retardadora del rozamiento sobre un disco que gira dentro de un líquido es proporcional a la velocidad angular de rotación. Hállese esta velocidad angular en función del tiempo, conociendo, que el disco, que comenzó a girar con una velocidad de 5 r.p.s., al cabo de dos minutos gira con una velocidad de 3 r.p.s. ¿Dentro de qué tiempo tendrá una velocidad angular de 1 r.p.s.?

1.149. La velocidad de desintegración del radio es proporcional a la cantidad disponible del mismo. Durante un año se desintegra 0,44 mg de cada gramo de radio. ¿Cuántos años tardará en desintegrarse la mitad de la cantidad disponible de radio?

1.150*. La velocidad con que sale el agua de un recipiente a través de un orificio pequeño se determina por la fórmula $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$, donde h es la altura del nivel de agua por encima del orificio, g es la aceleración de la caída libre (póngase $g = 10$ m/s^2). ¿Al cabo de cuánto tiempo saldrá toda el agua del depósito cilíndrico que tiene un diámetro $2R = 1$ y una altura $H = 1{,}5$ m, a través de un orificio en el fondo de $2r = 0{,}05$ m de diámetro?

1.151*. La cantidad de luz absorbida al pasar a través de una capa delgada de agua, es proporcional a la cantidad de luz que cae sobre ella y al espesor de la capa. Sabiendo, que al atravesar una capa de agua de 2 m de espesor se absorbe 1/3 del flujo luminoso inicial, hállese qué parte de esta luz alcanzará la profundidad de 12 m.

1.152. Una barca disminuye su movimiento a consecuencia de la resistencia del agua que es proporcional a la velocidad de la barca. La velocidad inicial de ésta es de 1,5m/s, al cabo de 4 segundos se reduce a 1 m/s. ¿Qué tiempo se necesita para que la velocidad disminuya hasta 1 cm/s? ¿Qué trayecto recorrerá la barca hasta parar?

1.153*. Una bala a la velocidad $v_0 = 400$ m/s atraviesa una pared cuyo espesor es $h = 20$ cm y sale a la velocidad de 100 m/s. Suponiendo que la fuerza de resistencia de la pared es proporcional al cuadrado de la velocidad de movimiento de la bala, hállese el tiempo que tardó la bala en atravesar la pared.

1.154. En un depósito se encuentran 100 l de solución que contiene 10 kg de sal. En el depósito entra el agua a una velocidad de 5 l/min y la mezcla sale de él con la misma velocidad. La concentración se supone homogénea. ¿Qué cantidad de sal se quedará en el depósito al cabo de una hora?

1.155. Cierta sustancia se transforma en otra con una velocidad proporcional a la cantidad de sustancia no transformada. Si al cabo de una hora quedan 31,4 g de la primera sustancia y al transcurrir otras tres horas, 9,7 g hállese: a) ¿Cuánta sustancia había al inicio del proceso? b) ¿Cuánto tiempo, después del comienzo del proceso, transcurrirá hasta quedar sólo el 1% de la cantidad inicial?

1.156*. En el local de un taller de 10 800 m^3 de capacidad el aire contiene 0,12% de dióxido de carbono. Los ventiladores suministran aire fresco con un contenido de 0,04% de dióxido de carbono, en cantidad de 1500 m^3/min. Suponiendo que la concentración de dióxido de carbono en todos los lugares del taller y en cada momento de tiempo, es la misma, hállese el contenido de dióxido de carbono a los 10 min después que el ventilador inició su trabajo.

1.157. La intensidad de la corriente i en un circuito con resistencia R, autoinducción L y tensión u satisface la ecuación

$$L\frac{di}{dt}+Ri=u.$$

Hállese la intensidad de la corriente i en el momento t si $u=E$ sen ωt e $i=0$, para $t=0$, (L, R, E, ω son constantes).

§ 2. Ecuaciones diferenciales de órdenes superiores

1. Nociones fundamentales. Teorema de Cauchy. La ecuación diferencial de n-ésimo orden tiene la forma

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0 \tag{1}$$

o bien

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Se llama *solución general* de la ecuación (1) ó (2) una función tal $y=\varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$, que para cualesquiera valores de los parámetros $C_1, \ldots, C_n$ es la solución de esta ecuación diferencial.

La ecuación

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n)=0 \tag{3}$$

que determina la *solución general* como una función implícita, se llama *integral general* de la ecuación diferencial.

Se llama *problema de Cauchy* para la ecuación diferencial (2) el problema de determinación de la solución $y(x)$, que satisface las condiciones iniciales dadas

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y'_0, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{4}$$

Si es conocida la solución general $y=\varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ de la ecuación (2), entonces para resolver el problema de Cauchy las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se determinan a partir del sistema de ecuaciones (si es resoluble)

$$y_0=\varphi(x_0, C_1, \ldots, C_n),$$
$$y_0'=\varphi'(x_0, C_1, \ldots, C_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_0^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, \ldots, C_n).$$

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY. *Si la ecuación diferencial* (2) *es tal, que la función* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *en cierta región* D *de variación de sus argumentos es continua y tiene derivadas parciales continuas* $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, *entonces para todo punto* $(x_0, y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ *existe tal intervalo* $x_0 - h < x < x_0 + h$, *sobre el cual existe la solución de esta ecuación y además única, que satisface las condiciones iniciales* (4).

EJEMPLO 1. Muéstrese que la función $y = C_1e^{C_2x}$ es la solución general de la ecuación diferencial $yy'' = y'^2$.

◀ Tenemos: $y' = C_1C_2e^{C_2x}$, $y'' = C_1C_2^2e^{C_2x}$.

Sustituyendo las expresiones y, y' e y'' en la ecuación dada, obtendremos la identidad

$$C_1e^{C_2x}\cdot C_1C_2^2e^{C_2x}=(C_1C_2e^{C_2x})^2.$$

Por consiguiente, la función $y = C_1e^{C_2x}$ es la solución general de la ecuación dada. ▶

EJEMPLO 2. Hállese el campo de existencia y la unicidad de solución de la ecuación

$$y''=\frac{y\sqrt{y'}}{x}.$$

◀ La función $f(x, y, y')=\frac{y\sqrt{y'}}{x}$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\sqrt{y'}}{x}$ es continua para $x\neq 0$, $y'\geqslant 0$; la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y}{2x\sqrt{y'}}$ es continua para $x\neq 0$, $y'>0$.

Por consiguiente la ecuación dada tiene la única solución para $x\neq 0$, $y'>0$. ▶

Hállese el campo de existencia y la unicidad de solución de las ecuaciones:

2.1. $y''=x+\sqrt{x^2-y'}$. **2.2.** $y''=y'\ln y'$.

Muéstrese que las funciones dadas son soluciones generales de las ecuaciones diferenciales correspondientes:

2.3. $y=\ln\frac{1}{x+C_1}+C_2$; $y''=y'^2$.

2.4. $y = x^2 \ln x + C_1x^2 + C_2x + C_3$; $xy''' = 2$.

Muéstrese que las relaciones dadas son las integrales generales de las ecuaciones diferenciales correspondientes:

2.5. $e^y \operatorname{sen}^2 (C_1x + C_2) = 2C_1^2$; $y'' = e^y$.

2.6. $C_1y = \operatorname{sen} (C_1x + C_2)$; $yy'' + 1 = y'^2$.

Muéstrese que las funciones dadas son las soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales correspondientes:

2.7. $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$; $1 + y'^2 = 2yy''$.

2.8. $y = e^x$; $y^2 + y'^2 = 2yy''$.

Eliminando los parámetros dedúzcanse las ecuaciones diferenciales para las familias de las líneas siguientes:

2.9. Rectas sobre el plano no paralelas al eje Oy.

2.10. Circunferencias de radio constante R.

2.11. Sinusoides $y = A \operatorname{sen} (x + \alpha)$ donde A y α son parámetros.

2.12. Parábolas con el eje paralelo al eje Oy.

2. Ecuaciones que permiten la reducción del orden. Más abaje se dan algunos tipos de ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden que permiten la reducción del orden.

a) ECUACIONES DEL TIPO $y^{(n)} = f(x)$. La solución general se obtiene integrando n veces $y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)\,dx + P_{n-1}(x)$, donde $P_{n-1}(x) = C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$ o según la fórmula

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,dt + P_{n-1}(x).$$

EJEMPLO 3. Hállense la solución general de la ecuación $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$ y su solución particular, que satisface las condiciones iniciales $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

◀ Integrando por primera vez tenemos $y' = \operatorname{tg} x + C_1$. La integración reiterada nos da $y = -\ln|\cos x| + C_1x + C_2$. Esta es la solución general. Sustituyendo ahora en la solución general obtenida y en la expresión para la primera derivada $x = \frac{\pi}{2}$, y respectivamente $y = \frac{\ln 2}{2}$ y $y' = 1$, obtenemos el sistema de dos ecuaciones con las incógnitas C_1 y C_2. Resolviendo este sistema determinamos los valores de los parámetros $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$ que corresponden a la solución particular buscada que, por consiguiente, tiene la forma $y = -\ln|\cos x|$. ▶

b) ECUACIONES DEL TIPO $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, es decir, ecuaciones que no contienen implícitamente la función buscada y sus derivadas hasta el orden $k-1$ inclusive. Sustituyendo $y^{(k)} = p(x)$ el orden de la ecuación se reduce en k unidades: $F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0$. Supongamos que para la ecuación obtenida podemos hallar la solución general $p(x) = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$. Entonces la función buscada $y(x)$ se obtiene integrando k veces la función $\varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$.

EJEMPLO 4. Hállese la solución particular de la ecuación $x^4y''' + 2x^3y'' = 1$ que satisface las condiciones iniciales $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = \frac{1}{2}$, $y''(1) = -1$.

◀ La ecuación dada no contiene y e y'. Pongamos $y'' = p$, entonces $y''' = \frac{dp}{dx}$ y la ecuación toma la forma $x^4\frac{dp}{dx} + 2x^3p = 1$, ó $\frac{dp}{dx} + \frac{2}{x}p = \frac{1}{x^4}$. Esta es la ecuación de primer orden. Su solución general es $p = -\frac{1}{x^3} + \frac{C_1}{x^2}$. Utilizando la condición inicial $y''(1) = p(1) = -1$ obtenemos $C_1 = 0$. Por consiguiente, $y'' = -\frac{1}{x^3}$, de donde $y' = \frac{1}{2x^2} + C_2$. La condición inicial $y'(1) = 1/2$ permite determinar $C_2 = 0$. Integrando otra vez obtenemos $y = -\frac{1}{2x} + C_3$ y de la condición $y(1) = 1/2$ se deduce que $C_3 = 1$. Así pues, la solución particular buscada es $y = 1 - \frac{1}{2x}$ (hipérbola equilátera). ▶

c) ECUACIONES DEL TIPO $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ que no contienen implícitamente variable independiente. Sustituyendo $y' = p(y)$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$, $y''' = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}$, etc. el orden de la ecuación se reduce en una unidad.

EJEMPLO 5. Hállese la integral general de la ecuación $y'y''' - 3y''^2 = 0$.

◀ Pongamos $y' = p(y)$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$, $y''' = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}$.
Entonces la ecuación se transforma en

$$p\left(p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}\right) - 3p^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0.$$

Reduciendo los términos semejantes y simplificando en p^2 (en este caso es conveniente tomar en consideración la solución que se pierde $p = 0$ ó $y = c$), tenemos

$$p\frac{d^2p}{dy^2}-2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2=0.$$

Poniendo aquí $\frac{dp}{dy}=z$, $\frac{d^2p}{dy^2}=z\frac{dz}{dp}$, llegamos a la ecuación

$$pz\frac{dz}{dp}-2z^2=0.$$

Simplificando en z (en este caso es conveniente tomar en consideración una solución más $z=\frac{dp}{dy}=0$, es decir, $p=C_1$ o $y=C_1x+C_2$) obtendremos $\frac{dz}{z}-\frac{2\,dp}{p}=0$, de donde $\ln|z|-\ln p^2=\ln|C_1|$, ó $z=\frac{dp}{dy}=C_1p^2$. Integrando la última ecuación hallamos que

$$-\frac{1}{p}=C_1y+C_2, \text{ ó } -\frac{dx}{dy}=C_1y+C_2.$$

Definitivamente obtendremos $x=\overline{C}_1y^2+\overline{C}_2y+C_3$, donde $\overline{C}_1=-\frac{C_1}{2}$, $\overline{C}_2=-C_2$, es decir, la familia de parábolas. Señalemos que en la solución general figuran las soluciones particulares que fueron perdidas con anterioridad.

d) Ecuaciones del tipo $\frac{d}{dx}G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})=0$, es decir, tales ecuaciones en las cuales el primer miembro puede ser representado como derivada total con respecto a x de cierta función $G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Integrando por x obtendremos una nueva ecuación cuyo orden es en una unidad inferior al orden de la ecuación inicial.

Ejemplo 6. Hállese la solución general de la ecuación

$$(1+x^2)\,y''+2xy'=x^3.$$

◀ El primer miembro de la ecuación es una derivada total respecto a x de la función $(1+x^2)\,y'$ y el segundo, de la función $\frac{x^4}{4}$, es decir, podemos reescribir la ecuación así: $((1+x^2)\,y')'=\left(\frac{x^4}{4}\right)'$. De aquí, integrando obtenemos $(1+x^2)\,y'=\frac{x^4}{4}+\frac{C_1}{4}$, o

$$dy=\frac{x^4+C_1}{4(1+x^2)}\,dx.$$

Por consiguiente,

$$y=\int \frac{x^3+C_1}{4(1+x^2)}\,dx=\int\left(\frac{1}{4}(x^2-1)+\frac{C_1+1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

y definitivamente

$$y=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x+\overline{C}_1\operatorname{arctg} x+C_2$$

donde $\overline{C}_1=\dfrac{C_1+1}{4}$. Esta es la solución general. ▶

e) LA ECUACIÓN $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$, ES HOMOGÉNEA RESPECTO A LA FUNCIÓN Y SUS DERIVADAS, es decir, $F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)})=t^kF(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$, $t\neq 0$. Sustituyendo $y'=yz$, $y''=y(z^2+z')$, ... el orden de la ecuación se reduce en una unidad.

EJEMPLO 7. Hállese la solución general de la ecuación $xyy''-xy'^2=yy'=0$.

◀ Pongamos $y'=yz$, $y''=y(z^2+z')$. Entonces la ecuación toma la forma

$$xy^2(z^2+z')-xy^2z^2-y^2z=0.$$

Simplificando en y^2 (en este caso se obtiene la solución $y=0$) obtenemos $xz'-z=0$, o $\dfrac{dz}{z}-\dfrac{dx}{x}=0$, de donde $z=C_1x$. Ya que $z=\dfrac{y'}{y}$, entonces llegamos a la ecuación $y'=C_1xy$, o $\dfrac{dy}{y}=C_1x\,dx$, de donde $\ln y=\dfrac{C_1x^2}{2}+\ln|C_2|$ o $y=C_2e^{\overline{C}_1x^2}$, donde $\overline{C}_1=C_1/2$. Esta es la solución general que contiene precisamente la solución particular perdida $y=0$. ▶

En algunos casos es difícil hallar la solución en la forma de función explícita e implícita, sin embargo se consigue recibir la solución en forma paramétrica.

EJEMPLO 8. Hállese la solución general de la ecuación $y''(1+2\times\ln y')=1$.

◀ Pongamos $y'=p$, $y''=\dfrac{dp}{dx}$. Entonces la ecuación toma la forma $\dfrac{dp}{dx}(1+2\ln p)=1$ o $dx=(1+2\ln p)\,dp$ de donde $x=-p+2p\ln p+C_1$. Ya que $dy=p\,dx$, entonces hallamos, $dy=p(1+2\ln p)\,dp$ de donde $y=p^2\ln p+C_2$ y obtenemos la solución general en forma paramétrica:

$$x=p(-1+2\ln p)+C_1,\quad y=p^2\ln p+C_2. \blacktriangleright$$

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales aplicando métodos de reducción del orden:

2.13. $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$. **2.14.** $y''=x+\operatorname{sen} x$.

2.15. $y'' + 2xy'^2 = 0$. 2.16. $xy'' - y' - x \operatorname{sen} \frac{y'}{x} = 0$.

2.17. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$. 2.18. $x^3y'' + x^2y' - 1 = 0$.

2.19. $(1 - x^2) y'' + xy' - 2 = 0$. 2.20. $(1 + e^x) y'' + y' = 0$.

2.21. $y''' = 2 (y'' - 1) \operatorname{ctg} x$. 2.22. $x^2y''' = y''^2$.

2.23. $y''' = y''^2$. 2.24. $(2y + y') y'' = y'^2$.

2.25. $y'' = 1/\sqrt{y}$. 2.26. $y^3y'' + 1 = 0$.

2.27. $yy'' + y - y'^2 = 0$. 2.28. $yy'' - 2yy' \ln y - y'^2 = 0$.

2.29. $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$. 2.30. $(y - 1)y'' = 2y'^2$.

2.31. $xy''' + y'' - x - 1 = 0$. 2.32. $yy'' + y'^2 = x$.

2.33. $y'' = \frac{y - xy'}{x^2}$. 2.34. $\frac{y''^2 - y'y'''}{y'^2} = \frac{1}{x^2}$.

2.35*. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

2.36. $xy' (yy'' - y'^2) - yy'^2 = x^4y^3$.

2.37. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$. 2.38. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales que satisfacen las condiciones iniciales dadas:

2.39. $y'' = xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

2.40. $y''' = \frac{\ln x}{x^2}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 2$.

2.41. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$.

2.42. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$.

2.43. $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2.44. $y'' \cos y + y'^2 \operatorname{sen} y - y' = 0$, $y(-1) = \pi/6$, $y'(-1) = 2$.

2.45. $y''/y' = 2yy'/(1 + y^2)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2.46. $yy'' - y'^2 = y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

2.47. $yy'' = 2xy'^2$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 0.5$.

2.48. $2yy'' + y^2 - y'^2 = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$.

2.49. Hállese la curva integral de la ecuación $yy'y'' = y'^3 + y''^2$ que es tangente en el origen de coordenadas a la recta $x + y = 0$.

2.50. Hállese la curva integral de la ecuación $yy'' + y'^2 - 1 = 0$ que pasa por el punto $M_0 = (0, 1)$ y que es tangente en este punto a la recta $x + y = 1$.

Hállense las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales en la forma paramétrica:

2.51. $(x + 2y')\,y'' = 1$, **2.52.** $y''^2 - 2y'y'' + 3 = 0$.

2.53. $(2 + y')e^{y'}\,y'' = 1$. **2.54.** $(3y - 2y')y'' - y'^2 = 0$.

2.55. Hállense la ecuación de la curva que es tangente al eje de abscisas en el origen de coordenadas, si su curvatura en todo punto es igual a $\cos x\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

2.56. Hállense las ecuaciones de las curvas, cuyo radio de curvatura en cualquier punto es igual a la longitud del segmento de la normal, que está comprendido entre este punto y el eje de abscisas, si la curva es

a) cóncava hacia las y positivas, b) cóncava hacia las y negativas.

2.57*. Hállense las ecuaciones de las curvas cuyo radio de curvatura en cualquier punto es dos veces mayor que la longitud del segmento de la normal comprendido entre este punto y el eje de abscisas si es conocido que la curva es:

a) cóncava hacia las y positivas, b) cóncava hacia las y negativas.

2.58. Determínese la forma de un hilo no extensible, homogéneo, flexible, con extremos fijos, que se encuentra en el estado de equilibrio bajo la acción del propio peso, si el peso de una unidad de longitud del hilo es igual a q (la proyección horizontal de la fuerza de tensión del hilo es $H = \text{const}$). Colóquese el hilo de tal modo que el vértice de la curva coincida con el punto $(a, 0)$, donde $a = H/q$.

2.59. Un hilo no extensible, homogéneo, pesado, flexible, en estado de equilibrio se somete a una tensión, proporcional al área variable de su sección transversal. Determínese la forma del hilo, suponiendo que es plano, si el peso de una unidad de volumen del hilo se igual a q (la proyección horizontal de la fuerza de tensión del hilo es $H = \text{const}$). Colóquese el hilo de tal modo que la curva pase por el origen de coordenadas y tenga en este punto la tangente horizontal.

2.60. Un cuerpo de masa m se mueve rectilíneamente bajo la acción de una fuerza constante P. Hállense la velocidad de movimiento del cuerpo y el trayecto recorrido por el como funciones del tiempo, si en el momento inicial ambos son iguales a cero y la resistencia del ambiente es proporcional al cuadrado de velocidad.

2.61*. Una pelota de 400 g de masa cae desde una altura de 16,7 m sin velocidad inicial. La resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad de la pelota e igual a 0,0048 H, a la velocidad de 1 m/s. Calcúlense el tiempo de caída y la velocidad de la pelota en el final de la caída. Tómese $g = 10$ m/s^2.

2.62. Un cuerpo de masa m se eleva verticalmente con una velocidad inicial v_0. Suponiendo que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad del cuerpo (con un coeficiente de proporcionalidad igual a k^2), hállense la altura a la que se eleva el cuerpo y la velocidad con que vuelve a su situación inicial, así como el tiempo de subida y caída del cuerpo.

2.63*. Una pelota de 400 g de masa fue lanzada hacia arriba con una velocidad de 20 m/s. Calcúlense el tiempo que la pelota tardó en elevarse y la altura máxima de subida, si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad de la pelota (con un coeficiente de proporcionalidad igual a k^2) y además es igual a 0,0048 H, a la velocidad de 1 m/s. Tómese $g = 10$ m/s^2.

2.64. Determínese la ley del movimiento rectilíneo de un punto material de masa m bajo la acción de la fuerza de repulsión, que es inversamente proporcional al cubo de la distancia del punto al centro inmóvil. En el momento inicial el punto está en reposo y se encuentra del centro a la distancia x_0.

2.65. Un punto material de masa m se mueve rectilíneamente en dirección al centro inmóvil que lo atrae con una fuerza inversamente proporcional al cubo de la distancia desde el centro (el coeficiente de proporcionalidad es igual a mk^2). Determínese la ley de movimiento, si empieza cuando el punto se encuentra en estado de reposo y está del centro a una distancia de x_0. Determínese el tiempo al cabo del cual el punto alcanza el centro.

2.66. Un cohete se mueve verticalmente hacia arriba bajo la acción de la fuerza de repulsión debida a la salida de los gases. La masa del cohete varía en función del tiempo según la ley $m = m_0\,\varphi(t)$, donde $m_0 = \text{const}$ (principio de la combustión del combustible). La velocidad relativa de la salida de los gases es constante e igual a u_0. La velocidad inicial del cohete cerca de la superficie de la Tierra es nula. Hállese la altura a que se eleva el cohete como función del tiempo, si la resistencia del aire se desprecia. Analícese el caso particular cuando $m = m_0 (1 - \alpha t)$ y calcúlese para este caso a que altura se eleva el cohete pasando 10 s, 30 s y 50 s, cuando $u_0 = 2000$ m/s y $\alpha = 0,01$ s^{-1}. Tómese $g = 9,8$ m/s^2.

2.67. Determínese cuánto tiempo tarda en caer sobre la Tierra un cuerpo atraído por la Tierra según la ley de Newton (con una aceleración inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos), si en el momento inicial la velocidad del cuerpo es nula y la distancia entre él y el centro de la Tierra es igual a H. Despréciese la resistencia de la atmósfera. La aceleración de la caída libre sobre la superficie de la Tierra es constante e igual a g.

2.68*. Un cuerpo que se encuentra a la distancia $x_1 = 60,27 R_t$ del centro de la Tierra (lo que corresponde a la distancia entre la Tierra y la Luna), cae sobre la Tierra del estado de reposo bajo la acción de la fuerza de la gravedad, con una aceleración inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la Tierra. Despreciando la resistencia de la atmósfera determínese, cuánto tiempo tardará en caer sobre la Tierra. Tómese $R_t = 6,377 \cdot 10^6$ m, $g = 9,8$ m/s^2.

2.69. Determínese la velocidad a la que el meteoro choca contra la Tierra, si cae desde una altura infinitamente grande a partir del estado de reposo y si, moviéndose hacia la Tierra, la aceleración se toma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre él y el centro de la Tierra. Tómese el radio de la Tierra igual a $R_t = 6377$ km, la aceleración de la caída libre igual a $g = 9,8$ m/s^2.

2.70. Por el eje Oy en dirección positiva se mueve el punto A (objetivo) con una velocidad constante v. Sobre el plano Oxy se mueve el punto M (perseguidor) con una velocidad constante u $(u > v)$ de tal modo, que el vector de velocidad siempre está dirigido hacia el punto A. Determínese el trayecto del punto M (curva de persecución), si en el momento inicial de tiempo $t = 0$ el punto A se encuentra en el origen de coordenadas y el punto M sobre el eje Ox a la distancia $a > 0$ del objetivo.

2.71*. Una viga de largo l, cuyos extremos reposan sobre dos apoyos, está bajo la acción de una carga uniformemente distribuida, de intensidad q. Hállense la ecuación del eje encorvado de la viga y su flexión máxima, escogiendo el origen de coordenadas en la mitad de la viga no cargada.

2.72*. Una viga de largo l, cuyo extremo derecho está empotrado en la pared, se encorva por la fuerza P aplicada al extremo izquierdo y por la carga uniformemente distribuida, de intensidad q. Hállense la ecuación del eje encorvado de la viga y su flexión máxima.

2.73*. Una viga de largo l, con el extremo izquierdo empotrado, se encorva bajo la acción de una carga uniformemente distribuida, de intensidad q. ¿Qué fuerza P, accionando hacia arriba, debe ser aplicada al extremo derecho de la viga, para que la flexión en el extremo derecho de la viga sea nula?

3. Ecuaciones homogéneas lineales. La ecuación de la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x)\, y = 0 \qquad (5)$$

se llama ecuación diferencial *homogénea lineal* de n-ésimo orden. Si se conoce cualquier solución particular $y_1(x)$ de la ecuación (5), entonces la sustitución $y(x) = y_1(x)\, z(x)$ reduce esta ecuación a la ecuación lineal respecto a la función $z(x)$, que no contiene explícitamente esta función. Por esto, haciendo $z'(x) = u(x)$, obtenemos la ecuación homogénea lineal de orden $n - 1$ respecto a la función $u(x)$.

EJEMPLO 9. Hállese la solución general de la ecuación

$$(x^2 + 1)\, y'' - 2xy' + 2y = 0$$

cerciorándose de que la función $y_1(x) = x$ es una de sus soluciones particulares.

◀ Ya que $y_1'(x) = 1$ e $y_1''(x) = 0$, entonces sustituyendo la expresión $y_1(x)$, $y_1'(x)$, $y_1''(x)$ en la ecuación dada nos cercioramos de que la función $y_1(x) = x$ es realmente su solución particular. Pongamos $y = xz$, hallemos $y' = xz' + z$, $y'' = xz'' + 2z'$ y sustituyamos las expresiones y, y' e y'' en la ecuación. Obtenemos

$$(x^2 + 1)(xz'' + 2z') - 2x(xz' + z) + 2xz = 0$$

ó

$$x(x^2 + 1)\, z'' + 2z' = 0.$$

Ahora, haciendo $z' = u$, $z'' = u'$ llegamos a la ecuación de primer orden respecto a u:

$$x(x^2 + 1)\, u' + 2u = 0.$$

Esta es la ecuación con variables separables. Su solución general tiene la forma

$$u = C_1 \frac{x^2 + 1}{x^2},$$

de donde, considerando $u = z'$, obtenemos la ecuación de primer orden respecto a z:

$$dz = C_1 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

Integrando la última ecuación hallamos $z = C_1 \left(x - \frac{1}{x}\right) + C_2$ y por cuanto $y = xz$, entonces obtenemos definitivamente la solución general de la ecuación inicial

$$y = C_1 (x^2 - 1) + C_2 x. \blacktriangleright$$

El método expuesto más arriba se generaliza en el caso, cuando son conocidas k soluciones linealmente independientes particulares de la ecuación (5). En este caso, empleando sustituciones adecuadas, el orden de la ecuación puede ser reducido en k unidades.

2.74. Demuéstrese el teorema: si $y_1(x)$ es una solución particular de la ecuación homogénea lineal $y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$, entonces la función $y_2(x) = y_1(x) \int e^{-\int p(x)\,dx} \times \frac{dx}{y_1^2(x)}$ es también una solución de esta ecuación y la función $y = y_1(x) \left(C_1 + C_2 \int e^{-\int p(x)\,dx} \frac{dx}{y_1^2(x)} \right)$ es su solución general.

2.75. Hállese la solución general de la ecuación $y'' - 6y' + 5y = 0$, si la función e^x es su solución particular.

2.76. Hállese la solución general de la ecuación $y'' - 2y' - 3y = 0$, si la función e^{-x} es su solución particular.

2.77. Hállese la solución general de la ecuación $xy'' + 2y' + xy = 0$ si la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es su solución particular.

2.78. Hállese la solución general de la ecuación $(1 - x^2) y'' - 2xy' + 2y = 0$, si la función x es su solución particular.

2.79. Hállese la solución general de la ecuación $x^3 y''' + 5x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$, si se conocen sus soluciones particulares $y_1 = x$ e $y_2 = 1/x$.

Se llama *determinante de Wronksi* (*wronskiano*) del sistema de funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ el determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Si el sistema de funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ es linealmente dependiente en el intervalo (a, b), entonces su wronskiano es nulo en todos los puntos de este intervalo. Si por lo menos en un punto $x_0 \in (a, b)$ tenemos $W(x_0) \neq 0$, entonces el sistema de funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ es linealmente independiente en el intervalo (a, b).

Cualquier sistema de n soluciones linealmente independientes $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ de la ecuación (5) se llama *sistema funda-*

mental de soluciones de esta ecuación. El wronskiano del sistema fundamental de soluciones es diferente de cero en todo el intervalo, donde estas soluciones están determinadas (véase el problema 2.98). Si se conoce el sistema fundamental de soluciones de la ecuación (5), entonces la solución general de esta ecuación tiene la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

donde $C_1, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias.

EJEMPLO 10. Está dado el sistema de funciones x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$. Hállese el wronskiano del sistema $W(x)$ y cerciórese de que sobre cierto intervalo el sistema es linealmente independiente. Compóngase la ecuación diferencial homogénea lineal, para la cual este sistema de funciones es un sistema fundamental de soluciones y escríbase la solución general de la ecuación.

◀ Compongamos el wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 1 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}$$

Ya que $W(x) = x$, entonces el sistema es linealmente independiente en todo el eje Ox y, por consiguiente, forma el sistema fundamental de soluciones de cierta ecuación homogénea lineal de tercer orden, cuya solución general es la función $y = C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$. Para componer la ecuación diferencial hallemos las derivadas y', y'', y''' y eliminemos las constantes arbitrarias de las expresiones para y, y', y'', y'''. Tenemos

$$\begin{aligned} y &= C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x, \\ y' &= C_1 - C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos x, \\ y'' &= -C_2 \cos x - C_3 \operatorname{sen} x, \\ y''' &= C_2 \operatorname{sen} x - C_3 \cos x. \end{aligned}$$

Es fácil ver que multiplicando las igualdades primera y tercera por -1 y la segunda y la cuarta por x y sumando estas cuatro igualdades, obtendremos

$$xy''' - y'' + xy' - y = 0. \qquad (6)$$

Esta es la ecuación diferencial buscada.

Se puede obtener de otro modo si se tiene en cuenta que la solución y de la ecuación buscada, junto con las funciones x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, forma el sistema linealmente dependiente y por eso el wronskiano del sistema de las funciones y, x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} y & x & \cos x & \operatorname{sen} x \\ y' & 1 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ y'' & 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \\ y''' & 0 & \operatorname{sen} x & -\cos x \end{vmatrix} = 0.$$

Abriendo el determinante obtendremos la misma ecuación (6) (¡verifíquese!).

Señalemos que en este ejemplo el wronskiano $W(x) = x$ se anula para $x = 0$, lo que, al parecer, contradice a la afirmación indicada más arriba acerca de que el wronskiano del sistema fundamental de soluciones nunca es igual a cero. Sin embargo, se trata de que esta afirmación es válida sólo para las ecuaciones del tipo (5) con coeficientes continuos $a_1(x), \ldots, a_n(x)$. La ecuación (6) escrita en la forma de (5) tiene el aspecto

$$y''' - \frac{1}{x} y'' + y' - \frac{1}{x} y = 0, \tag{7}$$

es decir, tiene sentido sólo para $x \neq 0$. El sistema de funciones x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ es el sistema fundamental de soluciones de la ecuación (7) en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, donde el wronskiano $W(x) = x$ es diferente de cero en todos los puntos; ¡en completa correspondencia con la afirmación general mencionada más arriba! ▶

Investíguense respecto a la dependencia lineal los siguientes sistemas de funciones:

2.80. x, $\ln x$. **2.81.** $\operatorname{sen} 2x$, $\operatorname{sen} x \cos x$.

2.82. e^{-x}, xe^{-x}. **2.83.** x, $2x$, x^2.

2.84. e^x, xe^x, x^2e^x. **2.85.** $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{sen} 2x$.

2.86. $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$. **2.87.** e^x, e^{x+1}.

2.88. x, 0, e^x. **2.89.** 1, $\operatorname{sen} x$, $\cos 2x$.

Conociendo el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea lineal fórmese esta ecuación.

2.90. 1, e^{-x}. **2.91.** $e^{2x} \cos x$, $e^{2x} \operatorname{sen} x$.

2.92. x^3, x^4. **2.93.** 1, x, e^x.

2.94. 1, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$. **2.95.** $2x$, $x - 2$, $e^x + 1$.

2.96. e^{3x}, e^{5x}. **2.97.** e^{2x}, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$.

2.98.** Demuéstrese que si $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial homogénea lineal de n-ésimo orden con coeficientes continuos en cierto intervalo (a, b) y si el wronskiano $W(x)$ de este sistema es nulo para $x_0 \in (a, b)$, entonces $W(x) \equiv 0$ para $a < x < b$.

2.99*. Está dado el sistema de funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... $\ldots$, $y_n(x)$ y además en cierto intervalo el wronskiano $W(x)$ de este sistema es diferente de cero. Fórmese la ecuación diferencial homogénea lineal para la cual este sistema, es un sistema fundamental de soluciones.

2.100. Conociendo el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea lineal e^x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, hállese su solución particular que satisfaga las condiciones iniciales: $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = -1$.

2.101. Conociendo el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea lineal e^x, e^{2x}, e^{3x}, hállese su solución particular que satisfaga las condiciones iniciales: $y(0) = 6$, $y'(0) = 14$, $y''(0) = 36$.

4. Ecuaciones no homogéneas lineales. La ecuación de la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x), \qquad (8)$$

en la cual $f(x) \not\equiv 0$ se llama ecuación diferencial *no homogénea lineal* de n-ésimo orden.

La solución general de la ecuación (8) se determina por la fórmula

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) \qquad (9)$$

donde $y_0(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente (5) e $\tilde{y}(x)$ es cierta solución particular de la ecuación no homogénea (8).

EJEMPLO 11. Está dada la ecuación diferencial no homogénea lineal $xy''' - y'' + xy' - y = 2x^3$.

Es conocido que la función x^3 es su solución particular. Se exige hallar la solución general de esta ecuación.

◀ Según la fórmula (9) la solución general de la ecuación no homogénea se forma como la suma de la solución general $y_0(x)$ de la ecuación homogénea correspondiente y de la solución particular $\tilde{y}(x)$ de la ecuación no homogénea. En nuestro caso $y_0(x) = C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$ (véase el ejemplo 10) e $\tilde{y}(x) = x^3$. Por consiguiente, la solución general buscada es $y = C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x + x^3$. ▶

Si es conocida la solución general $y_0(x) = C_1 y_1(x) + \ldots$ $\ldots + C_n y_n(x)$ de la ecuación homogénea (5) correspondiente a la ecuación (8), entonces para determinar la solución particular $\tilde{y}(x)$ de la ecuación (8) se puede emplear el método de Lagrange de variación de las constantes arbitrarias.

Precisamente buscaremos la solución particular de la ecuación no homogénea (8) en forma $\tilde{y}(x) = C_1(x)\, y_1(x) + \ldots + C_n(x)\, y_n(x)$, donde exigiremos complementariamente que las funciones $C_1(x), \ldots$ $\ldots, C_n(x)$ satisfagan las condiciones $\sum\limits_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(k)} \dfrac{dC_\nu(x)}{dx} = 0$ para todos los $k = 0, 1, \ldots, n-2$ (donde $y_\nu^{(0)} = y_\nu$). Entonces para las funciones $C_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ obtendremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
&y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0,\\
&y_1' \frac{dC_1}{dx} + y_2' \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n' \frac{dC_n}{dx} = 0, \qquad (10)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx} = f(x).
\end{aligned}$$

El determinante de este sistema es el wronskiano diferente de cero del sistema fundamental de soluciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, por eso el sistema tiene una única solución respecto a $\frac{dC_\nu}{dx}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 12. Conociendo que las funciones $y_1(x)=\frac{\cos x}{x}$ e $y_2(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación $xy''+2y'+xy=0$ (véase el problema 2.77), hállese la solución general de la ecuación

$$xy'' + 2y' + xy = x. \tag{11}$$

◀ La solución general de la ecuación homogénea correspondiente se escribe en la forma $y_0(x)=C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Considerando C_1 y C_2 como funciones de x, para determinar la solución particular de la ecuación (11) formemos el sistema del tipo (10):

$$C_1'(x)\frac{\cos x}{x}+C_2'(x)\frac{\operatorname{sen} x}{x}=0,$$

$$C_1'(x)\left(\frac{\cos x}{x}\right)'+C_2'(x)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)'=1$$

(la ecuación (11) debe ser reducida a la forma (8), es decir, todos sus términos deben ser divididos por x). Sustituyendo los valores $C_2'(x) = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}C_1'(x)$ en la segunda ecuación obtendremos

$$C_1'(x)\left(\frac{-x\operatorname{sen} x-\cos x}{x^2}-\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{x^2}\right)=1.$$

De aquí tenemos $C_1' = -x \operatorname{sen} x$, $C_2' = x \cos x$.

Después de la integración obtendremos

$$C_1(x) = x\cos x - \operatorname{sen} x + \overline{C}_1,$$

$$C_2(x) = x\operatorname{sen} x + \cos x + \overline{C}_2$$

y la solución particular buscada

$$\tilde{y}(x)=(x\cos x-\operatorname{sen} x)\frac{\cos x}{x}+(x\operatorname{sen} x+\cos x)\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1.$$

Por consiguiente, la solución general de la ecuación (11) tiene la forma

$$y(x)=y_0(x)+\tilde{y}(x)=C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\operatorname{sen} x}{x}+1. \blacktriangleright$$

Si el segundo miembro de la ecuación no homogénea lineal (8) es la suma de varias funciones

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_r(x)$$

e $\tilde{y}_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ son ciertas soluciones particulares de las ecuaciones

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f_i(x)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r)$$

respectivamente, entonces la suma

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) + \ldots + \tilde{y}_r(x)$$

es una solución particular de la ecuación (8) (*principio de superposición de soluciones*).

EJEMPLO 13. Verificando que la función $\tilde{y}_1 = -\frac{1}{4}e^x$ es la solución particular de la ecuación $y'' - 2y' - 3y = e^x$ y la función $\tilde{y}_2 = -\frac{1}{3}e^{2x}$ es la solución particular de la ecuación $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$, hállese la solución general de la ecuación

$$y'' - 2y' - 3y = e^x + e^{2x}.$$

◀ De acuerdo con el principio de superposición la función $\tilde{y} = -\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}$ es la solución particular de la última ecuación. La solución general de la ecuación homogénea lineal correspondiente es la función $y_0 = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$ (véase el problema 2.76). Según la fórmula (9) la solución general de la ecuación dada tiene la forma

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}. \ ▶$$

2.102. Empleando la solución del problema 2.92 escríbase la solución general de la ecuación $x^2y'' - 6xy' + 12y = 3x$, cerciorándose previamente de que la función $x/2$ es una de las soluciones de esta ecuación.

2.103. Empleando la solución del problema 2.97 escríbase la solución general de la ecuación $y''' - 2y'' + y' - 2y = 10\,e^{3x}$, cerciorándose previamente de que la función e^{3x} es una de las soluciones de esta ecuación.

2.104. Comprobando que las funciones $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = x$ forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación $(x-1)\,y'' - xy' + y = 0$, hállese la solución general de la ecuación $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$.

2.105. Comprobando que las funciones $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) = x\cos x$ forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación $\operatorname{ctg} x \cdot y'' + 2y' + (2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\,y = 0$, hállese la solución general de la ecuación $\operatorname{ctg} x \cdot y'' + 2y' + (2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\, y = \cos^2 x$.

2.106. Comprobando que la función $\widehat{y}_1(x) = 5x + 6$ es la solución particular de la ecuación $y'' - 6y' + 5y = 25x$ y la función $\widetilde{y}_2(x) = -e^{2x}$ es solución particular de la ecuación $y'' - 6y' + 5y = 3e^{2x}$, hállese la solución general de la ecuación $y'' - 6y' + 5y = 25x + 3e^{2x}$ (véase el problema 2.75).

2.107. Comprobando que la función $\widetilde{y}_1(x) = \frac{1}{2}e^x$ es la solución particular de la ecuación $y''' + y' = e^x$ y la función $\widetilde{y}_2(x) = -\operatorname{sen} 2x$ es la solución particular de la ecuación $y''' + y' = 6 \cos 2x$, hállese a solución general de la ecuación $y''' + y' = e^x + 6 \cos 2x$ (véase el problema 2.94).

5. Ecuaciones homogéneas lineales con coeficientes constantes. La forma general de la ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden con coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{12}$$

donde a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) son constantes reales.

La ecuación

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{13}$$

obtenida sustituyendo las derivadas $y^{(k)}$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) de la función buscada por las potencias λ^k, se llama *ecuación característica* para la ecuación (12). A cada raíz real λ de la ecuación (13) de multiplicidad r corresponden r soluciones linealmente independientes de la ecuación (12):

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{r-1}e^{\lambda x}$$

y a cada par de raíces complejas $\lambda = \alpha \pm i\beta$ de multiplicidad s corresponden s pares de soluciones linealmente independientes:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x,\ xe^{\alpha x} \cos \beta x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,\ xe^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

De este modo si la ecuación característica tiene k raíces reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de multiplicidades $r_1, \ldots, r_k$ y l pares de raíces complejas conjugadas $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \ldots, \alpha_l + i\beta_l, \alpha_l - i\beta_l$ de multiplicidades $s_1, \ldots, s_l$ ($r_1 + \ldots + r_k + 2s_1 + \ldots + 2s_l = n$), entonces la solución general de la ecuación (12) se escribirá en forma

$$y(x) = P_1(x)\, e^{\lambda_1 x} + \ldots + P_k(x)\, e^{\lambda_k x} + (Q_1(x) \times$$
$$\times \cos \beta_1 x + R_1(x) \operatorname{sen} \beta_1 x)\, e^{\alpha_1 x} + \ldots + (Q_l(x) \cos \beta_l x +$$
$$+ R_l(x) \operatorname{sen} \beta_l x)\, e^{\alpha_l x}, \tag{14}$$

donde $P_\nu(x)$ es un polinomio arbitrario de grado $r_\nu - 1$, $\nu = 1, \ldots, k$ y $Q_\mu(x)$ y $R_\mu(x)$ son polinomios arbitrarios de grado $s_\mu - 1$, $\mu = 1, \ldots, l$.

EJEMPLO 14. Hállese la solución general de la ecuación

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

◀ La ecuación característica $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ tiene las raíces $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$. Escribamos el sistema fundamental de soluciones $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{-3x}$. Por consiguiente, la solución general tiene la forma $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$. ▶

EJEMPLO 15. Hállese la solución general de la ecuación

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

◀ La ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ tiene las raíces $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. Por consiguiente, las funciones $y_1 = e^{-x}\cos 2x$, $y_2 = e^{-x}\operatorname{sen} 2x$ forman el sistema fundamental de soluciones y la solución general tiene la forma

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x).$$

EJEMPLO 16. Hállese la solución particular de la ecuación

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.

◀ La ecuación característica $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ tiene una raíz única $\lambda = 1$ de multiplicidad $r = 3$. Por eso el sistema fundamental de soluciones tiene la forma $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2e^x$. Por consiguiente

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\, e^x$$

es la solución general de la ecuación.

Para determinar las constantes arbitrarias hallemos las derivadas

$$y' = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\, e^x + (C_2 + 2C_3x)\, e^x,$$

$$y'' = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\, e^x + 2\,(C_2 + 2C_3x)\, e^x + 2C_3e^x$$

empleemos las condiciones iniciales. Obtenemos: $C_1 = 1$, $C_1 + C_2 = 2$, $C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 3$, de donde $C_2 = 1$, $C_3 = 0$. Por consiguiente, la solución particular buscada tiene la forma

$$y = (1 + x)\, e^x. ▶$$

EJEMPLO 17. Hállese la solución general de la ecuación

$$4y^{IV} + 4y'' + y = 0.$$

◀ La ecuasión característica $4\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1 = 0$ o $(2\lambda^2 + 1)^2 = 0$ tiene dos raíces complejas conjugadas $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\, i$ de multiplicidad 2. Por lo tanto, el sistema fundamental de soluciones tiene la forma $\cos \frac{x}{\sqrt{2}}$, $x \cos \frac{x}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}$, $x \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}$. De aquí obtenemos la solución general:

$$y = (C_1 + C_2x)\cos \frac{x}{\sqrt{2}} + (C_3 + C_4x)\operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}. ▶$$

2.108. Se conoce la solución particular $y_1 = e^{kx}$ de la ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden con coeficientes constantes. La ecuación característica correspondiente tiene un discriminante igual a cero. Hállese la solución particular de esta ecuación que satisface las condiciones iniciales: $y(0) = y'(0) = 1$.

A partir de las raíces dadas de la ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea lineal con coeficientes constantes fórmese la ecuación diferencial y escríbase su solución general.

2.109. $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2$. **2.110.** $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

2.111. $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$. **2.112.** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

2.113. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 4$.

2.114. Muéstrese que la solución general de la ecuación

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \alpha^2 x = 0$$

puede ser representada en forma de $x = A \operatorname{sen}(\alpha t + \varphi)$ o $x = A\cos(\alpha t + \varphi)$, donde A y φ son constantes arbitrarias

Hállense las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales:

2.115. $y'' - 2y' - 2y = 0$. **2.116.** $y''+6y'+13y=0$.

2.117. $y'' - 6y' + 9y = 0$. **2.118.** $3y''-2y'-8y=0$.

2.119. $4y'' - 8y' + 5y = 0$. **2.120.** $4y''+4y'+y=0$.

2.121. $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$.

2.122. $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$.

2.123. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.

2.124. $y^{IV} - y'' = 0$.

2.125. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$, **2.126.** $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$.

2.127. $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$.

2.128. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.

2.129. $y^{VI} - 2y^{V} + 3y^{IV} - 4y''' + 3y'' - 2y' + y = 0$.

2.130. $y^{VI} - 2y^{V} + y^{IV} = 0$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones a base de las condiciones iniciales dadas:

2.131. $y'' - 5y' + 4y = 0;\ y(0) = y'(0) = 1$.

2.132. $y'' - 2y' + y = 0;\ y(2) = 1,\ y'(2) = -2$.

2.133. $y''' - y' = 0;\ y(0) = 3;\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1$.

2.134*. Hállese la curva integral de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.

2.135. Hállese la curva integral de la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 3y = 0$ que es tangente a la recta $2x - 2y + 9 = 0$ en el punto $M_0(0, 2)$.

6. Ecuaciones no homogéneas lineales con coeficientes constantes. Analicemos la ecuación diferencial no homogénea lineal con coeficientes constantes, es decir, la ecuación del tipo

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (15)$$

donde a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son constantes reales y $f(x) \not\equiv 0$.

Según la fórmula (9) la solución general de la ecuación (15) se escribe en la forma $y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x)$, donde $y_0(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente e $\tilde{y}(x)$ es cualquier solución particular de la ecuación (15). La solución general $y_0(x)$ se da por la fórmula (14). Para determinar $\tilde{y}(x)$ en el caso general se puede aplicar el método de Lagrange de variación de las constantes arbitrarias (véase el p. 4).

En el caso particular cuando la función $f(x)$ en la ecuación (15) tiene la forma $f_1(x) = (d_0 x^m + \ldots + d_m) e^{\lambda x}$ o $f_2(x) = ((b_0 x^{m_1} + \ldots + b_{m_1}) \cos \beta x + (c_0 x^{m_2} + \ldots + c_{m_2}) \operatorname{sen} \beta x) e^{\alpha x}$ la solución particular $\tilde{y}(x)$ se puede hallar por el método de coeficientes indeterminados. Precisamente, si λ o $\alpha \pm i\beta$ no coinciden con ninguna de las raíces reales o complejas de la ecuación característica (13), respectivamente, entonces $\tilde{y}(x)$ se busca en forma de

$$\tilde{y}(x) = (D_0 x^m + D_1 x^{m-1} + \ldots + D_m) e^{\lambda x} \quad (16)$$

para $f(x) = f_1(x)$ o en forma de

$$\tilde{y}(x) = ((B_0 x^{\tilde{m}} + \ldots + B_{\tilde{m}}) \cos \beta x + (C_0 x^{\tilde{m}} + \ldots + C_{\tilde{m}}) \operatorname{sen} \beta x) e^{\alpha x} \quad (17)$$

para $f(x) = f_2(x)$. Aquí D_ν, B_ν y C_ν son coeficientes indeterminados, $\tilde{m} = \max(m_1, m_2)$.

Si λ o $\alpha \pm i\beta$ coinciden con cierta raíz de la ecuación (13) de multiplicidad r, entonces la expresión en el segundo miembro (16) o (17) es conveniente multiplicarla complementariamente por x^r, es decir, buscar la solución respectivamente en forma de

$$\tilde{y}(x) = x^r (D_0 x^m + \ldots + D_m) e^{\lambda x} \quad (18)$$

para $f(x) = f_1(x)$ o

$$\tilde{y}(x) = x^r ((B_0 x^{\tilde{m}} + \ldots + B_{\tilde{m}}) \cos \beta x + (C_0 x^{\tilde{m}} + \ldots + C_{\tilde{m}}) \operatorname{sen} \beta x) e^{\alpha x} \quad (19)$$

para $f(x) = f_2(x)$.

EJEMPLO 18. Hállese la solución general de la ecuación

$$y''' + y' = \operatorname{tg} x.$$

◀ La solución general de la ecuación homogénea correspondiente $y_0 = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$, puesto que $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \operatorname{sen} x$. Para hallar la solución particular de la ecuación no homogénea utilicemos el método de variación de constantes. El sistema (10) en este caso toma la forma

$$\begin{aligned} C_1' + C_2' \cos x + C_3' \operatorname{sen} x &= 0, \\ -C_2' \operatorname{sen} x + C_3' \cos x &= 0, \\ -C_2' \cos x - C_3' \operatorname{sen} x &= \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos miembros de la segunda ecuación por $\operatorname{sen} x$, de la tercera por $\cos x$ y sumándolos, obtendremos $C_2' = -\operatorname{sen} x$. Entonces de la segunda ecuación se sigue que $C_3' = -\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$. Sumando ambos miembros de la primera y tercera ecuaciones hallaremos que $C_1' = \operatorname{tg} x$. La integración nos da:

$$C_1 = -\ln|\cos x|, \quad C_2 = \cos x, \quad C_3 = \operatorname{sen} x - \ln \operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right|.$$

Por consiguiente, la solución general buscada de la ecuación no homogénea tiene la forma

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x - \ln|\cos x| - \operatorname{sen} x \cdot \ln \operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right|. \ ▶$$

EJEMPLO 19. Hállese la solución general de la ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)\, e^{3x}.$$

◀ La ecuación característica de la ecuación homogénea correspondiente $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ tiene la raíz $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Por consiguiente, el sistema fundamental de soluciones tiene la forma $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ y la solución general de la ecuación homogénea es $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Para hallar la solución particular de la ecuación no homogénea empleemos el método de coeficientes indeterminados. Ya que $\lambda = 3$ no es raíz de la ecuación característica, entonces la solución particular la buscaremos en la forma de $\tilde{y} = (D_0 x^2 + D_1 x + D_2)\, e^{3x}$. Determinando las derivadas $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ y sustituyendo $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ e $\tilde{y}''$ en la ecuación inicial obtendremos (al simplificar por e^{3x})

$$2D_0 x^2 + (6D_0 + 2D_1)\, x + (2D_0 + 3D_1 + 2D_2) = x^2 + x.$$

Comparando los coeficientes de ambos miembros de esta identidad obtendremos el sistema de ecuaciones para determinar las incógnitas D_0, D_1, D_2:

$$\begin{aligned} 2D_0 &= 1, \\ 6D_0 + 2D_1 &= 1, \\ 2D_0 + 3D_1 + 2D_2 &= 0, \end{aligned}$$

de donde $D_0 = 1/2$, $D_1 = -1$, $D_2 = 1$.

Así pues, $\tilde{y}=\left(\frac{1}{2}x^2-x+1\right)e^{3x}=\frac{1}{2}(x^2-2x+2)e^{3x}$, y, por consiguiente, la solución general de la ecuación tiene la forma

$$y=y_0+\tilde{y}=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}(x^2-2x+2)e^{3x}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 20. Hállese la solución particular de la ecuación

$$y''+4y=4(\operatorname{sen}2x+\cos 2x)$$

que satisface las condiciones iniciales $y(\pi)=y'(\pi)=2\pi$.

◀ La ecuación característica $\lambda^2+4=0$ tiene las raíces $\lambda_{1,2}=0\pm\pm 2i$. La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es $y_0=C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen}2x$.

La solución particular de la ecuación no homogénea la buscaremos en forma de $\tilde{y}=x(B\cos 2x+C\operatorname{sen}2x)$, ya que $0\pm 2i$ son raíces de la ecuación característica de multiplicidad uno. Hallando $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ y sustituyendo $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ en la ecuación inicial obtendremos

$$-4B\operatorname{sen}2x+4C\cos 2x\equiv 4\operatorname{sen}2x+4\cos 2x,$$

de donde $B=-1$, $C=1$ y, por consiguiente

$$\tilde{y}=x(\operatorname{sen}2x-\cos 2x).$$

La solución general será $y=y_0+\tilde{y}=C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen}2x+x(\operatorname{sen}2x-\cos 2x)$.

Para determinar C_1 y C_2 utilicemos las condiciones iniciales diferenciando previamente la solución general:

$$y'=-2C_1\operatorname{sen}2x+2C_2\cos 2x+x(2\cos 2x+2\operatorname{sen}2x)+(\operatorname{sen}2x-\cos 2x).$$

Tenemos: $2\pi=C_1-\pi\Rightarrow C_1=3\pi$, $2\pi=2C_2+2\pi-1\Rightarrow C_2=1/2$. La solución particular buscada es la función

$$y=3\pi\cos 2x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x+x(\operatorname{sen}2x-\cos 2x). \blacktriangleright$$

EJEMPLO 21. Hállese la solución general de la ecuación

$$y''-4y'+4y=xe^{2x}.$$

◀ La ecuación característica $\lambda^2-4\lambda+4=0$ tiene la raíz de segundo orden de multiplicidad $\lambda=2$. La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es $y_0=(C_1+C_2x)e^{2x}$.

La solución particular de la ecuación dada la buscaremos en forma de $\tilde{y}=x^2(D_0x+D_1)e^{2x}$, ya que el indicador del exponente en el segundo miembro de la ecuación coincide con la raíz de segundo orden de multiplicidad de la ecuación característica.

Aplicando el método de coeficientes indeterminados (es decir, hallando $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$, sustituyendo $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ e $\tilde{y}''$ en la ecuación inicial, simplificando en e^{2x} y comparando los coeficientes para potencias iguales de x) determinamos $D_0=1/6$, $D_1=0$. Por consiguiente, $\tilde{y}=\frac{1}{6}x^3e^{2x}$ y la solución general toma la forma

$$y = y_0 + \tilde{y} = (C_1 + C_2x)\, e^{2x} + \frac{1}{6}\, x^3e^{2x} =$$

$$= \left(C_1 + C_2x + \frac{1}{6}\, x^3\right) e^{2x}. \blacktriangleright$$

Empleando el método de variación de constantes arbitrarias resuélvanse las ecuaciones siguientes:

2.136. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x+1}$.

2.137. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.

2.138. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$.

2.139. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

Para cada una de las ecuaciones diferenciales no homogéneas dadas escríbase la forma de su solución particular con coeficientes indeterminados (no deben hallarse los valores numéricos de los coeficientes):

2.140. $y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x}$.

2.141. $y'' + 16y = \operatorname{sen}(4x + \alpha)$ $(\alpha = \text{const})$.

2.142. $y'' - 4y' = 2 \cos^2 4x$.

2.143. $y^{\text{IV}} + 4y'' + 4y = x \operatorname{sen} 2x$.

2.144. $y'' - 4y' = xe^{4x}$.

2.145. $y'' - 7y' = (x - 1)^2$.

2.146. $y'' + 2y' + 5y = e^x ((x + 1) \cos 2x + 3 \operatorname{sen} 2x)$.

2.147. $y'' - 4y' + 13y = e^{2x} (x^2 \cos 3x - x \operatorname{sen} 3x)$.

Hállense las soluciones generales de las ecuaciones siguientes:

2.148. $y'' - y = e^{-x}$.

2.149. $y'' - y = \operatorname{ch} x$.

2.150. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.

2.151. $y'' - 5y' + 6y = 13 \operatorname{sen} 3x$.

2.152. $y'' - 2my' + m^2y = \operatorname{sen} nx$ $(m \neq n)$.

2.153. $y'' - 2my' + m^2y = \operatorname{sen} mx$.

2.154. $y'' + y = 4x \cos x$.

2.155. $y'' + 4y = \cos^2 x$.

2.156. $4y'' - y = x^3 - 24x$.

2.157. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$.

2.158. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$

2.159. $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$.

2.160. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{x}$.

2.161. $y^{IV} + y'' = x^2 + x$.

2.162. $y^{IV} - y = xe^{x} + \cos x$.

2.163. $y^{V} - y^{IV} = xe^{x} - 1$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfacen las condiciones iniciales:

2.164. $y'' - 2y' = 2e^{x}$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.

2.165. $y''' - y' = -2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$.

2.166. $y'' + 4y = x$; $y(0) = 1$, $y(\pi/4) = \pi/2$.

2.167. $y'' + y = 4e^{x}$; $y = (0) = 4$, $y'(0) = -3$.

2.168. $y^{IV} - y = 8e^{x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = 6$.

2.169. $y^{IV} - y = 8e^{x}$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y'' = (0) = 1$, $y'''(0) = 0$.

2.170. $y'' - 2y' + 2y = 4e^{x}\cos x$; $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e^{\pi}$.

7. Ecuaciones diferenciales de Euler. La ecuación del tipo

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \qquad x \neq 0,$$

donde a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son constantes, es un caso particular de la ecuación diferencial lineal con coeficientes variables y se llama *ecuación de Euler*. Introduzcamos una nueva variable independiente t con ayuda de la sustitución de $x = e^t$ (si $x > 0$) o de la sustitución de $x = -e^t$ (si $x < 0$). Para más precisión sea $x > 0$. Entonces $y'_x = e^{-t} y'_t$, $y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$, $y'''_{xxx} = e^{-3t}(y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t)$, etc., y la ecuación de Euler se transforma en ecuación lineal con coeficientes constantes.

La ecuación del tipo

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(ax+b) y' + a_n y = f(x),$$

donde a, b, a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son constantes, se reduce a la ecuación lineal con coeficientes constantes sustituyendo $ax + b = e^t$ (en la región $ax + b > 0$).

La solución de la ecuación homogénea de Euler

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

se puede buscar (para $x > 0$) en forma de $y = x^{\lambda}$.

Sustituyendo la expresión para y', y'', ..., $y^{(n)}$ en la ecuación homogénea de Euler, hallamos la ecuación característica para determinar el exponente de la potencia λ. Además, si λ es la raíz real de la ecuación característica de multiplicidad r, entonces le corresponde r

soluciones linealmente independientes

$$x^{\lambda},\ x^{\lambda}\ln x,\ x^{\lambda}(\ln x)^2,\ \ldots,\ x^{\lambda}(\ln x)^{r-1},$$

y si $\alpha \pm i\beta$ es un par de raíces complejas de multiplicidad s, entonces le corresponde s pares de soluciones linealmente indepenqdientes

$$x^{\alpha}\cos(\beta\ln x),\ x^{\alpha}\ln x\cos(\beta\ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha}(\ln x)^{s-1}\cos(\beta\ln x),$$

$$x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta\ln x),\ x^{\alpha}\ln x\operatorname{sen}(\beta\ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha}(\ln x)^{s-1}\operatorname{sen}(\beta\ln x).$$

EJEMPLO 22. Hállese la solución general de la ecuación no homogénea de Euler $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.

◀ Pongamos $x = e^t$ considerando $x > 0$. Entonces $y'_x = e^{-t}y'_t$, $y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$ y nuestra ecuación tomará la forma de

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t) - 3e^t e^{-t}y'_t + 5y = 3e^{2t}$$

ó

$$y''_{tt} - 4y'_t + 5y = 3e^{2t}.$$

La solución general y_0 de la ecuación homogénea correspondiente es $y_0 = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t)$ y la solución particular $\widetilde{y}$ de la ecuación no homogénea la buscaremos en forma de $\widetilde{y} = Ae^{2t}$. Entonces $\widetilde{y}' = 2Ae^{2t}$, $\widetilde{y}'' = 4Ae^{2t}$ y, sustituyendo $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}'$, $\widetilde{y}''$ en la ecuación no homogénea, llegamos a la identidad $Ae^{2t} = 3e^{2t}$, de donde $A = 3$. Por consiguiente, $\widetilde{y} = 3e^{2t}$ y la solución general de la ecuación no homogénea es $y = y_0 + \widetilde{y} = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t + 3)$. Volviendo a la variable independiente inicial x obtendremos definitivamente

$$y = x^2(C_1\cos\ln x + C_2\operatorname{sen}\ln x + 3).$$

Si se considera el caso $x < 0$, entonces la solución general se puede escribir en la forma que abarca ambos casos:

$$y = x^2(C_1\cos\ln|x| + C_2\operatorname{sen}\ln|x| + 3). \ \blacktriangleright$$

EJEMPLO 23. Hállese la solución general de la ecuación homogénea de Euler

$$(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0.$$

◀ Pongamos $y = (x+2)^{\lambda}$. Entonces tenemos $y' = \lambda(x+2)^{\lambda-1}$, $y'' = \lambda(\lambda-1)(x+2)^{\lambda-2}$. Sustituyendo las expresiones y, y', y'' en la ecuación dada obtendremos la ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. Por consiguiente la solución general es la función

$$y = C_1(x+2) + \frac{C_2}{(x+2)^3}. \ \blacktriangleright$$

Hállense las soluciones generales de las ecuaciones de Euler:

2.171. $x^2y'' + xy' + y = 0$.

2.172. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$.

2.173. $x^2y'' - 6y = 12 \ln x$.

2.174. $x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$.

2.175. $x^2y''' - 2y' = 0$.

2.176. $(2x+1)^2y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0$.

8. Problemas de contorno en el caso de las ecuaciones diferenciales lineales. En muchos problemas de física se tiene que buscar solución de las ecuaciones diferenciales no a base de las condiciones iniciales dadas, sino por sus valores en los extremos del intervalo. Tales problemas se llaman problemas *de contorno* (*frontera*). El aspecto general de las condiciones de contorno para el intervalo (a, b), en el caso de la ecuación de segundo orden, es el siguiente:

$$\alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = A, \ \alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \qquad (20)$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ son constantes dadas, simultáneamente diferentes de cero. Las condiciones de contorno se llaman homogéneas, si del hecho de que las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ satisfacen estas condiciones se deduce, que sus combinaciones lineales $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ también satisfacen estas condiciones. Las condiciones de contorno (20) para $A = B = 0$, evidentemente, son homogéneas.

Los problemas de contorno no siempre son resolubles. Cuando se resuelve el problema de contorno, primeramente se determina la solución general de la ecuación diferencial dada y a partir de las condiciones de frontera se obtiene el sistema con ayuda del cual se determinan los valores de las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, con las cuales de la solución general se obtiene la solución del problema de contorno dado.

Ejemplo 24. Hállese la solución de la ecuación $y'' + y = 1$ que satisface las condiciones $y'(0) = y'(\pi) = 0$.

▶ La ecuación inicial tiene la solución general de la forma

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + 1.$$

A partir de las condiciones de frontera obtenemos: $y'(0) = C_2 = 0$ e $y'(\pi) = -C_2 = 0$, así pues la función $y(x) = C_1 \cos x + 1$ satisface las condiciones de frontera para cualesquiera C_1. ◀

Ejemplo 25. Hállese la solución particular de la ecuación

$$y'' - 2y' + 2y = e^x$$

que satisface las condiciones de contorno

$$y(0) + y(\pi/2) = e^{\pi/2}, \quad y'(0) + y'(\pi/2) = 1.$$

◀ La ecuación característica $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ tiene las raíces $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es $y_0 = e^x(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$.

Buscaremos la solución particular de la ecuación no homogénea en forma de $\tilde{y} = Ae^x$. Sustituyendo $\tilde{y}' = Ae^x$ e $\tilde{y}'' = Ae^x$ en la ecuación dada obtendremos $Ae^x = e^x$, de donde $A = 1$. Así, $\tilde{y} = e^x$ y la solución general de la ecuación de partida tiene la forma

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + 1).$$

Hallando

$$y' = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + 1) + e^x (-C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x),$$

utilizamos las condiciones de contorno. Obtendremos el sistema de ecuaciones para determinar C_1 y C_2:

$$(C_1 + 1) + e^{\pi 2} (C_2 + 1) = e^{\pi/2},$$
$$(C_1 + C_2 + 1) + e^{\pi/2} (-C_1 + C_2 + 1) = 1.$$

Resolviendo este sistema hallamos

$$C_1 = \frac{e^{\pi} - 1 - e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}}, \qquad C_2 = \frac{1 - 2a^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}},$$

es decir, la solución particular buscada es la función

$$y = e^x \left(\frac{e^{\pi} - 1 - e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}} \cos x + \frac{1 - 2e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}} \operatorname{sen} x + 1 \right). \blacktriangleright$$

Hállense las soluciones de las ecuaciones diferenciales que satisfacen las condiciones de contorno dadas:

2.177. $y'' - y = 0;\ y(0) = 0,\ y(2\pi) = 1.$

2.178. $y'' - y = 0;\ y(0) = 0,\ y(1) = 1.$

2.179. $y'' + y = 0;\ y'(0) = 0,\ y'(1) = 1.$

2.180. $y'' + y = 0;\ y'(0) = 0,\ y'(\pi) = 1.$

2.181. $yy'' + y'^2 + 1 = 0;\ y(0) = 1,\ y(1) = 2.$

2.182. $y'' + y = 1;\ y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 0.$

2.183. $yy' + y'^2 + yy'' = 0,\ y(0) = 1,\ y(-1) = 0.$

2.184. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2,\ y(0) + 2y'(0) = 1,$ $y(1) - y'(1) = 0.$

9. Problemas de carácter físico

2.185*. Un punto material de masa m se mueve rectilíneamente bajo la acción de la fuerza de atracción hacia el centro inmóvil, siendo esta fuerza proporcional a la distancia desde el punto hasta el centro (el coeficiente de proporcionalidad es mk^2). La fuerza de resistencia del medio ambiente es proporcional a la velocidad (el coeficiente de proporcionalidad es $2mh > 0$). En el momento inicial la distancia entre el punto y el centro es igual a a y la velocidad está dirigida por la recta que une el punto con el centro y es igual a v_0. Determínese la ley del movimiento del punto, si tenemos que $h < k$.

2.186*. Un punto material de masa m se mueve rectilíneamente bajo la acción de la fuerza de repulsión a partir de un centro inmóvil, siendo esta fuerza proporcional a la distancia desde el punto hasta el centro (el coeficiente de proporcionalidad es $k > 0$). La fuerza de resistencia del medio ambiente es proporcional a la velocidad (el coeficiente de proporcionalidad $\lambda > 0$). En el momento inicial el punto se encuentra a la distancia a del centro, la velocidad es igual a v_0 y está dirigida por la recta que une el punto con el centro. Determínese la ley del movimiento del punto.

2.187*. Un tubo estrecho y largo gira con una velocidad angular constante ω cerca del eje vertical, perpendicular a él. Una bola que se encuentra dentro del tubo se desliza por el mismo sin rozamiento. Hállese la ley del movimiento de la bola respecto al tubo, si:

a) en el momento inicial la bola se encuentra a la distancia a del eje de rotación y la velocidad inicial de la bola es nula;

b) en el momento inicial la bola se encuentra en el eje de rotación y tiene une velocidad inicial de v_0.

2.188. Un tubo estrecho y largo gira con una velocidad angular constante ω cerca del eje vertical, perpendicular a él. Una bola que se encuentra dentro del tubo se desliza por él con un rozamiento, cuya magnitud es $R = 2m\mu\omega \frac{dr}{dt}$, donde μ es el coeficiente de rozamiento del deslizamiento. Hállese la ley del movimiento de la bola, si en el momento inicial la bola se encuentra a la distancia a del eje de rotación y su velocidad inicial es nula.

2.189*. Una cadena homogénea pesada está echada sobre un clavo liso de tal modo, que por un lado cuelga una parte de la cadena, de 8 m de largo y por el otro, otra parte de 10 m de largo. ¿Cuánto tiempo T tardará la cadena en caer, deslizándose del clavo?

2.190*. Una carga de una masa de 4 kg está colgada de un resorte y lo alarga en 1 cm. Hállese la ley del movimiento de la carga, si el extremo superior del resorte realiza una oscilación armónica vertical $y = 2$ sen $30t$ (cm) y en el momento inicial la carga está en reposo (despréciese la resistencia del medio ambiente).

2.191.* Un circuito eléctrico consta de una fuente de corriente eléctrica con una f.e.m. $e(t) = E$ sen ωt, una inductancia L, una resistencia R y una capacidad C conectadas en serie; además, $R^2C-4L<0$, $\omega \neq \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$. Hállese la corriente i en el circuito como función del tiempo t, si $i\Big|_{t=0}=\frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=0$.

2.192.** Un circuito eléctrico consta de una fuente de corriente eléctrica con una f.e.m. $e(t)=E$ sen ωt, una inductancia L y una capacidad C conectadas en serie; además, $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ (el caso de resonancia). Hállese la corriente i como función del tiempo t, si $i\Big|_{t=0}=\frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=0$.

2.193. Un circuito eléctrico consta de una fuente de corriente eléctrica con una f.e.m. $e(t)=E\cos(\omega t+\psi)$, una inductancia L y una capacidad C conectadas en serie; además, $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Hállese la corriente i en el circuito como función del tiempo t, si $i\Big|_{t=0}=\frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=0$.

§ 3. Sistemas de ecuaciones diferenciales

1. Conceptos principales. Relación con las ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden. Si el sistema de k ecuaciones diferenciales que une la variable independiente x y las k funciones $y_1(x), \ldots$ $\ldots, y_k(x)$, está resuelto con respecto a las derivadas de mayor grado de estas funciones $y_1^{(p_1)}(x), \ldots, y_k^{(p_k)}(x)$, es decir, tiene la forma

$$\begin{aligned}
y_1^{(p_1)}(x)&=f_1(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_1^{(p_1-1)},\ \ldots,y_k,\ \ldots,\ y_k^{(p_k-1)}),\\
y_2^{(p_2)}(x)&=f_2(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_1^{(p_1-1)},\ \ldots,y_k,\ \ldots,\ y_k^{(p_k-1)}),\qquad (1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_k^{(p_k)}(x)&=f_k(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_1^{(p_1-1)},\ \ldots,y_k,\ \ldots,\ y_k^{(p_k-1)}),
\end{aligned}$$

entonces se llama *canónico*; además, el número $n=p_1+p_2+\ldots$ $\ldots+p_k$ se llama orden del sistema. El sistema canónico (1) para $p_1=p_2=\ldots=p_k=1$, es decir, el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$
\begin{aligned}
y_1'(x) &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n),\\
y_2'(x) &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n'(x) &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

se llama sistema *normal*.

Se llama ***solución del sistema*** (2) en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ la colección de funciones $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$ que son continuamente diferenciables en (a, b) y convierten las ecuaciones del sistema (2) en identidades respecto a $x \in (a, b)$.

Se llama ***integral*** del sistema normal (2) la función $\Psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ determinada y continua, junto con las derivadas parciales $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial y_n}$ en cierto dominio D de variación de las variables y que para cualesquier $x \in (a, b)$ toma un valor constante cuando se sustituye en ella la solución arbitraria del sistema.

La igualdad

$$\Psi(x, y_1, \ldots, y_n) = C,$$

donde $\Psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ es una integral del sistema normal y C es una constante arbitraria, se llama ***primera integral*** del sistema (2).

La ecuación diferencial de n-ésimo orden

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

puede ser reducida al sistema normal (2). Recíprocamente, los sistemas (1) ó (2), en la mayoría de los casos, se reducen a la ecuación de n-ésimo orden, resolviendo la cual se puede hallar la solución del sistema inicial.

Ejemplo 1. Redúzcase el sistema canónico de ecuaciones diferenciales

$$y_1'' = 2y_1 - 3y_2, \quad y_2'' = y_1 - 2y_2$$

a la forma normal.

◀ Pongamos $\frac{dy_1}{dx} = y_3$ y $\frac{dy_2}{dx} = y_4$. Entonces se puede escribir el sistema dado en forma de

$$y_1' = y_3, \; y_2' = y_4, \; y_3' = 2y_1 - 3y_2, \; y_4' = y_1 - 2y_2,$$

que es un sistema normal de cuarto orden. ▶

Ejemplo 2. Redúzcase al sistema normal la ecuación diferencial $y_{xx}'' + k^2y = 0$.

◀ Pongamos $y_x' = z$, entonces $y_{xx}'' = z_x'$ y la ecuación se reduce al sistema normal de ecuaciones

$$y_x' = z, \; z_x' = -k^2y. \; ▶$$

Ejemplo 3. Redúzcase el sistema de ecuaciones

$$y_x' = y - z, \quad z_x' = -4y + z \tag{3}$$

a la ecuación de segundo orden y hállese la solución del sistema.

◀ Hallemos $z(x)$ a partir de la primera ecuación $z = y - y'_x$. De aquí tenemos $z'_x = y'_x - y''_{xx}$. Sustituyendo los valores de z y z' en la segunda ecuación del sistema, obtendremos la ecuación $y'' - 2y' - 3y = 0$ cuya solución general es la función

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}.$$

De aquí, empleando la igualdad $z = y - y'_x$, hallamos

$$z(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + C_1e^{-x} - 3C_2e^{3x} = 2C_1e^{-x} - 2C_2e^{3x}.$$

De este modo, para cualesquiera constantes C_1 y C_2 el sistema de las funciones

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}, \qquad z = 2C_1e^{-x} - 2C_2e^{3x} \tag{4}$$

es la solución del sistema inicial (3). ▶

El problema de Cauchy para el sistema (2) se plantea del modo siguiente: hállese la solución $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ del sistema (2), que satisface las condiciones iniciales

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0,\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_n^0, \tag{5}$$

donde $y_1^0, \ldots, y_n^0$ son números dados.

Teorema de Cauchy. *Sean determinadas las partes derechas $f_1, f_2, \ldots, f_n$ del sistema normal (2) en el D dominio $(n+1)$-dimensional, de variación de las variables $x, y_1, \ldots, y_n$. Si en algún entorno Λ del punto $M_0(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in D$ las funciones f_ν son continuas y tienen las derivadas parciales continuas $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_j}$ respecto a las variables $y_1, \ldots, y_n$, entonces existe el intervalo $x_0 - h < x < x_0 + h$ de variación de la variable x en el que existe, además, la única solución del sistema* (2) *que satisface las condiciones iniciales* (5).

Se llama *solución general* del sistema (2) el conjunto de las funciones

$$y_\nu(x, C_1, \ldots, C_n),\ \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

dependientes de n constantes arbitrarias que para cualesquiera valores admisibles de las constantes $C_1, \ldots, C_n$ convierten las ecuaciones del sistema (2) en identidades, y en el dominio, en el cual se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy, a partir del conjunto de las funciones (6) se puede obtener la solución de cualquier problema de Cauchy.

Ejemplo 4. Muéstrese que el sistema de funciones determinado por las igualdades (4) es la solucion general del sistema (3) (véase el ejemplo 3).

◀ En calidad de dominio D para (3) podemos tomar la región $-\infty < x,\ y,\ z < +\infty$; además, para cualesquiera x_0, y_0 y z_0 de esta región se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy. Sustituyendo los valores x_0, y_0, z_0 en el sistema (4) obtendremos el sistema para determinar C_1 y C_2:

$$y_0 = C_1e^{-x_0} + C_2e^{3x_0}, \qquad z_0 = 2C_1e^{-x_0} - 2C_2e^{3x_0}.$$

El determinante de este sistema $\Delta = 2e^{2x_0}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4e^{2x_0}$ es diferente de cero para todo x_0. Por consiguiente, para cualesquiera y_0 y z_0 los números C_1 y C_2 se determinan unívocamente, es decir, del sistema de funciones (4) se puede obtener cualquier solución del problema de Cauchy para el sistema de ecuaciones diferenciales (3).▶

Eliminando los parámetros a y b hállese el sistema de ecuaciones diferenciales que determinan las familias de rectas en el espacio:

3.1. $\begin{cases} y = ax + b, \\ x^2 + y^2 = z^2 - 2bz. \end{cases}$ **3.2.** $\begin{cases} ax + z = b, \\ y^2 + z^2 = b^2. \end{cases}$

Sustitúyanse las ecuaciones diferenciales o los sistemas por los sistemas normales de ecuaciones diferenciales (x es una variable independiente):

3.3. $y''' - xyy' + y'^3 = 0$.

3.4. $y^{\mathrm{IV}} - y^2 = 0$.

3.5. $y'' = y' + z'$, $z'' = z' + u'$, $u'' = u' + y'$.

3.6. $z'' + z - 2y = 0$, $y''' + z - y = x$.

3.7. $y'' - z - u = 0$, $z' + uz = x^2$, $u''' = -xy$.

Compruébese que las funciones $y(x)$ y $z(x)$ son soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales:

3.8. $y' = -1/z$,
$z' = 1/y$; $y = e^{-x/2}$, $z = 2e^{-x/2}$.

3.9. $y' = 1 - 2\dfrac{y}{x}$,
$z' = y + z + \dfrac{2y}{x} - 1$; $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{x^2}$, $z = e^x - \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{x^2}$.

Verifíquese que las funciones son integrales de los sistemas normales dados:

3.10. $\Psi(x, y, z) = x + y - z$; $y' = \dfrac{z}{y-z}$,
$z' = \dfrac{y}{z-y}$.

3.11 $\Psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $y' = \dfrac{3x-4z}{2z-3y}$,
$z' = \dfrac{4y-2x}{2z-3y}$.

3.12. $\Psi(x, y, z) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z}$; $y' = y/z$, $z' = z/y$.

2. Métodos de integración de los sistemas normales. Uno de los métodos utilizados para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales es el método de eliminación de incógnitas, el cual reduce el sistema de ecuaciones a una o varias ecuaciones diferenciales con una función incógnita en cada una. Aclarémoslo con ejemplos (véase también el ejemplo 3).

Ejemplo 5. Hállese la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$y'_x = -z, \quad z'_x = \frac{z^2}{y}$$

y la solución particular que satisface las condiciones iniciales $y(1) = 1$, $z(1) = -\frac{1}{2}$.

◀ Diferenciando ambos miembros de la primera ecuación respecto a x, obtenemos $y''_{xx} = -z'_x$. Puesto que de la segunda ecuación se deduce que $z'_x = \frac{z^2}{y}$, entonces $y''_{xx} = -\frac{z^2}{y}$, pero de la primera ecuación $z^2 = (y'_x)^2$; por eso, el sistema de dos ecuaciones de primer orden se redujo a una ecuación de segundo orden $y''_{xx} = -\frac{(y'_x)^2}{y}$, es decir, a la ecuación $yy''_{xx} + (y'_x)^2 = 0$.

El primer miembro de la ecuación obtenida es $(yy'_x)'_x$, por eso $yy'_x = \frac{1}{2}C_1$, de donde $y\,dy = \frac{1}{2}C_1\,dx$ y $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}C_1x + \frac{1}{2}C_2$, es decir, $y = \pm\sqrt{C_1x + C_2}$. De la primera ecuación del sistema tenemos: $z = -y'_x$, es decir, $z = \mp\frac{C_1}{2\sqrt{C_1x + C_2}}$. El sistema de funciones $y = \pm\sqrt{C_1x + C_2}$, $z = \mp\frac{C_1}{2\sqrt{C_1x + C_2}}$ forma la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales dado.

Para hallar la solución particular empleemos las condiciones iniciales $y(1) = 1$, $z(1) = -\frac{1}{2}$. Tenemos: $1 = \sqrt{C_1 + C_2}$, $-\frac{1}{2} = -\frac{C_1}{2\sqrt{C_1 + C_2}}$, de donde $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Así pues, el par de funciones $y = \sqrt{x}$, $z = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ es, precisamente, la solución particular buscada del sistema. ▶

No todo sistema de ecuaciones diferenciales puede ser reducido a una ecuación.

Ejemplo 6. Muéstrese que el sistema de ecuaciones

$$y' = xy, \qquad z' + y' = z + xy$$

no puede reducirse a una ecuación.

◀ Efectivamente, sustituyendo en la segunda ecuación en vez de y' su valor xy, obtendremos dos ecuaciones diferenciales no relacionadas entre sí, cada una de las cuales contiene sólo una función

$$y' + xy, \qquad z' = z;$$

a partir de estas ecuaciones hallamos $y = C_1 e^{x^2/2}$ y $z = C_2 e^x$. ▶

Otro método de integración de los sistemas de ecuaciones diferenciales es el *método de separación de las combinaciones integrables*, es decir, de obtención a partir del sistema (2) de una ecuación tal, que se puede integrar y obtener la primera integral del sistema. Si están determinadas n primeras integrales del sistema independientes (2), entonces su conjunto da la integral general de este sistema.

Ejemplo 7. Hállese la integral general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$y'_x = \frac{z + e^y}{z + e^x}, \qquad z'_x = \frac{z^2 - e^{x+y}}{z + e^x}.$$

◀ Multiplicando ambos miembros de la segunda ecuación del sistema por e^{-x} y sumándolos con los miembros correspondientes de la primera ecuación y con la identidad $-e^{-x}z \equiv -e^{-x}z$, obtendremos $(e^{-x}z)'_x + y'_x = 0$, de donde

$$e^{-x}z + y = C_1 = \Psi_1(x, y, z).$$

Esta es la primera integral del sistema.

Ahora multiplicando ambos miembros de la segunda ecuación por e^{-y} y sumándolos con las igualdades $-e^{-y}zy' = -e^{-y}z\,\dfrac{z + e^y}{z + e^x}$ y $(x)'_x = 1$ obtendremos $(e^{-y}z)'_x + x'_x = 0$ de donde

$$e^{-y}z + x = C_2 = \Psi_2(x, y, z).$$

Esta es también la primera integral del sistema. Ya que el jakobiano del sistema Ψ_1, Ψ_2 es diferente de cero (¡compruébese!), entonces ambas primeras integrales son independientes entre sí, por eso su conjunto determina implícitamente la solución general del sistema de ecuaciones dado.

Para separar las combinaciones integrables del sistema (2), es más cómodo escribir este último en la así llamada forma simétrica:

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dx}{1} \tag{7}$$

y emplear las propiedades siguientes de fracciones iguales: si $\dfrac{u_1}{v_1} = \dfrac{u_2}{v_2} = \ldots = \dfrac{u_n}{v_n} = \gamma$, entonces para cualesquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tiene lugar la relación

$$\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n} = \gamma. \tag{8}$$

Los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se escogen habitualmente de tal modo, que el numerador en (8) sea el diferencial total del denominador o que el denominador sea nulo.

En la relación (7) la variable independiente y las funciones buscadas son equitativas.

EJEMPLO 8. Hállese la solución general del sistema de ecuaciones

$$y' = \frac{mz - lx}{ly - nz}, \qquad z' = \frac{nx - my}{ly - nz}.$$

Escribamos el sistema en la forma simétrica:

$$\frac{dx}{ly - nz} = \frac{dy}{mz - lx} = \frac{dz}{nx - my} = \gamma$$

y empleemos la relación (8). Escojemos $\alpha_1 = m$, $\alpha_2 = n$ y $\alpha_3 = l$, entonces tenemos

$$\frac{d(mx + ny + lz)}{0} = \gamma,$$

es decir, $d(mx + ny + lz) = 0$ de donde

$$mx + ny + lz = C_1. \tag{9}$$

De modo análogo, escojiendo $\alpha_1 = 2x$, $\alpha_2 = 2y$ y $\alpha_3 = 2z$, llegamos a la igualdad $d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$, de donde

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2^2. \tag{10}$$

Las relaciones (9) y (10) forman las dos primeras integrales del sistema que implícitamente determinan la solución general. ▶

Hállense las soluciones generales de los sistemas de ecuaciones diferenciales:

3.13. $x'_t = \frac{1}{y}$, $y'_t = \frac{1}{x}$. 3.14. $\frac{dt}{xy} = \frac{dx}{ty} = \frac{dy}{tx}$.

3.15. $y'_x = \frac{z}{(z-y)^2}$, $z'_x = \frac{y}{(z-y)^2}$.

3.16. $x'_t = \frac{x-y}{z-t}$, $y'_t = \frac{x-y}{z-t}$, $z'_t = x - y + 1$.

3.17. $y'_x = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - z^2}$, $z'_x = \frac{2xz}{x^2 - y^2 - z^2}$.

3.18. $\frac{dt}{xt} = \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{txy - 2t^2}$.

3.19. $\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$.

3.20. $x'_t = \frac{y^2}{x}$, $y'_t = \frac{x^2}{y}$.

Hállense la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales, así como la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales dadas:

3.21. $y'_x = \frac{z-1}{z}$, $z'_x = \frac{1}{y-x}$; $y(0) = -1$, $z(0) = 1$.

3.22. $y'_x = \frac{x}{yz}$, $z'_x = \frac{x}{y^2}$; $y(0) = z(0) = 1$.

3.23*. Para el sistema de ecuaciones diferenciales $x'_t = \frac{x^2-t}{y}$, $y'_t = -x$ y las funciones

$$\text{a) } \varphi_1 = t^2 + 2xy; \quad \text{b) } \varphi_2 = x^2 - ty,$$

verifíquese si las relaciones $\varphi_i = C$ $(i = 1, 2)$ son las primeras integrales de este sistema.

3. Sentido físico del sistema normal. Para simplificar limitémonos a examinar el sistema de dos ecuaciones diferenciales, además a título de variable independiente consideraremos el tiempo t:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(t, x, y), \\ \dot{y} &= f_2(t, x, y). \end{aligned} \tag{11}$$

La solución $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ de este sistema es cierta curva en el plano Oxy con un sistema de coordenadas rectangular cartesiano fijo. El plano Oxy se llama *plano de fases* y la curva $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, *trayectoria de fases* del sistema (11). El mismo sistema (11) se llama *sistema dinámico*. El sistema dinámico se llama *autónomo* (*estacionario*) si en el segundo miembro de la ecuación de este sistema el tiempo t no figura explícitamente.

El sistema dinámico determina el campo de velocidades de un punto, que se mueve en el plano, en cualquier momento de tiempo t. La solución del sistema dinámico $x = x(t)$, $y = y(t)$ se halla en las ecuaciones del movimiento del punto: ellas determinan la situación del punto en movimiento, en cualquier momento de tiempo t. Las condiciones iniciales prefijan la situación del punto en el momento inicial: $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Las ecuaciones de movimiento determinan también la trayectoria del movimiento, siendo ecuaciones de esta curva en la forma paramétrica.

EJEMPLO 9. Hállese la trayectoria del sistema dinámico autónomo

$$\dot{x} = \frac{x^2}{y}, \qquad \dot{y} = x,$$

que pasa por el punto $M_0(2, 3)$.

◀ Diferenciemos la segunda ecuación respecto a t y sustituyamos la expresión $x'_t = y''_{tt}$ y $x = y'_t$ en la primera ecuación. Obtendremos $y''_{tt} = \frac{(y'_t)^2}{y}$ ó $yy''_{tt} - y'^2_t = 0$, es decir, una ecuación de segundo orden con una función incógnita y.

Dividamos ambos miembros de la última ecuación por y^2 y reescribámosla así: $\left(\frac{y'_t}{y}\right)'=0$. De aquí se deduce que $\frac{y'_t}{y} = C_1$, ó $\frac{dy}{y} = C_1\,dt$ de donde $y = C_2e^{C_1t}$.

Hallemos $y'_t = C_1C_2e^{C_1t}$ y sustituyámoslo en la segunda ecuación del sistema: obtendremos $x = C_1C_2e^{C_1t}$. Así pues, el sistema de funciones $x = C_1C_2e^{C_1t}$, $y = C_2e^{C_1t}$ es la solución general de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales.

Eliminando de la solución general el tiempo t $(C_2e^{C_1t} = y)$ tenemos que las trayectorias de fases del sistema son las rectas $x = C_1\,y$, además, por el punto dado $M_0\,(2, 3)$ pasa la recta $y = \frac{3}{2}\,x$. ▶

Para los sistemas dados hállense las trayectorias de fases que pasan por los puntos dados M_0:

3.24. $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2,\ \dot{y} = 2x;\ M_0\,(1,\ 2)$.

3.25. $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2,\ \dot{y} = 2xy;\ M_0\,(2,\ 1)$.

3.26. $\dot{x} = 2x,\ \dot{y} = x + 2y;\ M_0\,(1,\ 1)$.

3.27. $\dot{x} = y - x,\ \dot{y} = y - 2x;\ M_0\,(1,\ 1)$.

4. Sistemas homogéneos lineales. El sistema homogéneo lineal normal de n-ésimo orden tiene la forma

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n,\\
\dot{x}_2 &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \ldots + a_{2n}(t)\,x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{x}_n &+ a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n
\end{aligned} \tag{12}$$

o en la forma matricial

$$\dot{X}\,(t) = A\,(t)\,X\,(t), \tag{13}$$

donde

$$A\,(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t)\end{pmatrix}, \qquad X\,(t) = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}$$

En la región de continuidad de los coeficientes $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$, el sistema (12) satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy.

Se llama *sistema fundamental de soluciones* del sistema (12) al conjunto de arbitrarias n soluciones linealmente independientes $X_h(t) = (x_1^{(h)}(t), x_2^{(h)}(t), \ldots, x_n^{(h)}(t))^{\top}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Si $X_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, es el sistema fundamental de soluciones del sistema (12), entonces la solución general tiene la forma $X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k X_k(t)$, donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias.

La integración del sistema (12) suele realizarse por el *método de eliminación* (véase el ejemplo 3).

Resuélvanse los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales:

3.28. $y'_x = -\dfrac{y}{x} + xz,\ z'_x = -\dfrac{2y}{x^3} + \dfrac{z}{x}$.

3.29. $xy'_x = -y + zx,\ x^2 z'_x = -2y + zx$.

3.30. $\dot{x} = -\dfrac{y}{t},\ \dot{y} = -\dfrac{x}{t}$.

3.31. $\dot{x} = -\dfrac{2}{t}x,\ \dot{y} = y + \dfrac{t+2}{t}x$.

En el caso particular de los *sistemas con coeficientes constantes*, cuando la matriz $A(t)$ en la parte derecha de (13) no depende de t, para hallar el sistema fundamental de soluciones $X_h(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, pueden ser aplicados los métodos de álgebra lineal.

De la ecuación característica

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{14}$$

se hallan las diferentes raíces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ y para toda raíz λ (teniendo en cuenta su multiplicidad) se determina la solución particular $X^{(\lambda)}(t)$ que le corresponde. La solución general del sistema tiene la forma

$$X(t) = \sum_{k=1}^{s} C_h X^{(\lambda_k)}(t). \tag{15}$$

Con esto son posibles los siguientes casos:

a) λ es la raíz real de multiplicidad 1. Entonces

$$X^{(\lambda)}(t) = Y^{(\lambda)} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} y_1^{(\lambda)} \\ \vdots \\ y_n^{(\lambda)} \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

donde $Y^{(\lambda)}$ es el vector propio de la matriz A que corresponde al valor propio λ (es decir, $AY^{(\lambda)} = \lambda Y^{(\lambda)}$, $Y^{(\lambda)} \neq 0$).

EJEMPLO 10. Hállese la solución particular del sistema homogéneo

$$\dot{x}_1 = 4x_1 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2,$$
$$\dot{x}_3 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,$$

que satisface las condiciones $x_1(0) = 6$, $x_2(0) = -6$, $x_3(0) = 24$.

◀ La ecuación característica (14) para este sistema tiene la forma

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Sus raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$. Los vectores propios, por ejemplo, son así

$$Y^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad Y^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y^{(\lambda_3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Por eso

$$X^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^{t}, \quad X^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad X^{(\lambda_3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

De aquí la solución general del sistema tiene la forma

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Para hallar la solución particular las constantes C_1, C_2, C_3 se determinan a partir del sistema siguiente:

$$X(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3C_1 + C_3 \\ -9C_1 + C_3 \\ 7C_1 + C_2 + 5C_3 \end{pmatrix},$$

de donde $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3$. Definitivamente para la solución particular buscada obtenemos

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} e^{5t}. \ ▶$$

b) λ es la raíz compleja de multiplicidad 1. Entonces la raíz de la ecuación característica (14) es el número $\bar{\lambda}$ conjugado de λ. En vez de las soluciones particulares complejas $X^{(\lambda)}(t)$ y $X^{(\bar\lambda)}(t)$ de la forma (15), es conveniente tomar las soluciones particulares reales $X_1^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Re} X^{(\lambda)}(t)$ y $X_2^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Im} X^{(\lambda)}(t)$.

EJEMPLO 11. Hállese la solución general del sistema

$$\dot{x}_1(t) = x_1 + x_2,$$
$$\dot{x}_2(t) = -2x_1 + 3x_2.$$

◀ La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

tiene las raíces complejas conjugadas $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Para encontrar el vector propio que corresponda a la raíz $\lambda = 2 + i$ obtenemos el sistema

$$(-1-i)\, y_1^{(\lambda)} + y_2^{(\lambda)} = 0,$$
$$-2y_1^{(\lambda)} + (1-i)\, y_2^{(\lambda)} = 0.$$

Poniendo $y_1^{(\lambda)} = 1$ hallamos $y_2^{(\lambda)} = 1 + i$, es decir,

$$Y^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \text{ y } X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}.$$

De aquí el par de soluciones particulares reales tiene la forma siguiente:

$$X_1^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}\right) = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}(\cos t - \operatorname{sen} t) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{2t},$$
$$X_2^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Im}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}\right) = \begin{pmatrix} e^{2t}\operatorname{sen} t \\ e^{2t}(\cos t + \operatorname{sen} t) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Definitivamente obtenemos la solución general

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{2t} =$$
$$= \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t \\ (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{2t}. \blacktriangleright$$

c) λ es la raíz de multiplicidad $r \geqslant 2$. La solución del sistema (13) que corresponde a esta raíz se busca en forma del vector

$$X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}t + \ldots + \alpha_1^{(r)}t^{r-1} \\ \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}t + \ldots + \alpha_2^{(r)}t^{r-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}t + \ldots + \alpha_n^{(r)}t^{r-1} \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \qquad (16)$$

cuyos coeficientes $\alpha_i^{(j)}$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, r$, se determinan del sistema de ecuaciones lineales, obtenido igualando los coeficientes para las potencias iguales de t como resultado de la sustitución del vector (16) en el sistema inicial (13).

Ejemplo 12. Hállese la solución general del sistema

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1 - x_2,$$

$$\dot{x}_2(t) = 4x_1 + 6x_2.$$

◀ La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 2+\lambda & -1 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)^2 = 0$$

tiene la raíz $\lambda = 4$ de multiplicidad $r = 2$. Por eso buscamos la solución del sistema en forma de

$$X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 t \\ \alpha_2 + \beta_2 t \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Sustituimos esta expresión en el sistema inicial y simplificamos en e^{4t}:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta_1 - 4\beta_2 \\ 4\beta_1 + 6\beta_2 \end{pmatrix} t.$$

Igualando los coeficientes para las potencias iguales de t obtenemos:

$$\begin{aligned} \beta_1 + 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ \beta_2 - 4\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0, \\ 2\beta_1 + \beta_2 \qquad &= 0, \\ -2\beta_2 + 4\beta_1 \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Poniendo $\alpha_1 = C_1$ y $\beta_1 = C_2$ tenemos $\beta_2 = -2C_2$ y $\alpha_2 = -2C_1 - C_2$. De este modo la solución general del sistema tiene la forma

$$X(t) = X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ -(2C_1 + C_2) - 2C_2 t \end{pmatrix} e^{4t}. \ ▶$$

Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. En los casos, cuando se dan las condiciones iniciales, además de la solución general, hállese la solución particular:

3.32. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -2x + 3y$.

3.33. $\dot{x} = x + 3y$, $\dot{y} = -x + 5y$, $x(0) = 3$, $y(0) = 1$.

3.34. $\dot{x} = 3x - 2y$, $\dot{y} = 4x + 7y$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

3.35. $\dot{x} = 2x - 5y$, $\dot{y} = 5x - 6y$.

3.36. $\dot{x} = x - 4y$, $\dot{y} = x - 3y$.

3.37. $\dot{x} = -x + 2y$, $\dot{y} = -2x - 5y$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

3.38. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = z$, $\dot{z} = x$, $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

3.39. $\dot{x} = y + z$, $\dot{y} = z + x$, $\dot{z} = x + y$, $x(0) = y(0) = 2$, $z(0) = -1$.

3.40. $\dot{x} = x - 2y - z$, $\dot{y} = -x + y + z$, $\dot{z} = x - z$.

3.41. $\dot{x} = 5x + 2y - 3z$, $\dot{y} = 4x + 5y - 4z$, $\dot{z} = 6x + 4y - 4z$.

5. Sistemas no homogéneos lineales. El sistema no homogéneo lineal normal de ecuaciones diferenciales tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n + f_1(t),\\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \ldots + a_{2n}(t)\,x_n + f_2(t),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n + f_n(t), \end{aligned} \tag{17}$$

donde, por lo menos, una de las funciones $f_h(t)$ no es igual idénticamente a cero. En la forma matricial el sistema (17) tiene la forma

$$\dot{X}(t) = A(t)\,X(t) + F(t) \tag{18}$$

donde $F(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))^{\top}$. Se puede integrar el sistema (17) por el método de eliminación (véase el ejemplo 3), sin embargo, a veces es preferible hallar la solución previa $X_0(t)$ del sistema homogéneo correspondiente

$$\dot{X}(t) = A(t)\,X(t) \tag{19}$$

y una solución particular cualquiera $\widetilde{X}(t)$ del sistema (18). Entonces la solución general del sistema (18) tiene la forma

$$X(t) = X_0(t) + \widetilde{X}(t). \tag{20}$$

Si es conocido el sistema fundamental $X_h(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, de soluciones del sistema homogéneo (19), entonces la solución general $X(t)$ se puede hallar por el método de variación de constantes arbitrarias. Precisamente, poniendo

$$X(t) = \sum_{h=1}^{n} C_h(t)\,X_h(t) \tag{21}$$

determinamos las funciones $C_k(t)$ sustituyendo (21) en el sistema (18). Teniendo en cuenta en este caso las igualdades

$$\dot{X}_k(t) - A(t) X_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

llegamos al sistema de ecuaciones respecto a $\dot{C}_k(t)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k(t) X_k(t) = F(t). \tag{22}$$

A partir de este sistema hallamos $\dot{C}_k(t) = \varphi_k(t)$ e integrando obtenemos las funciones $C_k(t)$ con una exactitud de hasta las constantes arbitrarias. Sustituyéndolas en (21) obtenemos la solución general buscada del sistema no homogéneo (18).

Ejemplo 13. Conociendo el sistema fundamental de soluciones

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}, \qquad X_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t}$$

del sistema homogéneo

$$\dot{x}_1 = 6x_1 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_2,$$

hállese la solución general del sistema no homogéneo

$$\dot{x}_1 = 6x_1 + x_2 + t,$$
$$\dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_2 + 1.$$

◀ Apliquemos el método de variación de las constantes arbitrarias. Para las magnitudes $\dot{C}_1(t)$ y $\dot{C}_2(t)$ formemos el sistema de la forma (22)

$$\dot{C}_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + \dot{C}_2(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hallando

$$\dot{C}_1(t) = \frac{5t+1}{6} e^{-7t}, \quad \dot{C}_2(t) = \frac{1-t}{6} e^{-t}$$

e integrando, obtenemos

$$C_1(t) = -\left(\frac{5}{42} t + \frac{2}{49}\right) e^{-7t} + C_1, \qquad C_2(t) = \frac{1}{6} te^{-t} + C_2.$$

De este modo, la solución general del sistema se escribirá en la forma

$$X(t) = \left(-\left(\frac{5}{42} t + \frac{2}{49}\right) e^{-7t} + C_1\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} +$$
$$+ \left(\frac{1}{6} te^{-t} + C_2\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t} +$$
$$+ \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} t - \frac{2}{49} \\ \frac{5}{7} t - \frac{2}{49} \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Si los coeficientes $a_{ij}(t)$ del sistema (17) son constantes, es decir, $a_{ij}(t) = a_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, y las funciones $f_i(t)$ tienen la forma de productos

$$(P(t)\cos\beta t + Q(t)\operatorname{sen}\beta t)\,e^{\alpha t}, \tag{23}$$

donde $P(t)$ y $Q(t)$ son polinomios, entonces la solución particular $\overline{X}(t)$ se puede hallar por el método de coeficientes indeterminados, escribiendo $\widetilde{X}(t)$ en la forma análoga a (23), considerando la coincidencia o no coincidencia de los números $\alpha \pm i\beta$ con las raíces de la ecuación característica.

Debe tenerse en cuenta que si k es el grado mayor de los polinomios $P(t)$ y $Q(t)$ en (23) y $\lambda = \alpha + i\beta$ es la raíz de multiplicidad r de la ecuación característica, entonces la solución particular $\widetilde{X}(t)$ se busca en forma de

$$\widetilde{X}(t) = \operatorname{Re} t^{r-1}\begin{pmatrix} \gamma_{10}t^{k+1} + \gamma_{11}t^{k} + \ldots + \gamma_{1,\ k+1} \\ \gamma_{20}t^{k+1} + \gamma_{21}t^{k} + \ldots + \gamma_{2,\ k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{n0}t^{k+1} + \gamma_{n1}t^{k} + \ldots + \gamma_{n,\ k+1} \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

EJEMPLO 14. Hállese la solución particular del sistema

$$\dot{x}_1 = -x_2 + t^2,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + e^t.$$

◀ Ya que la ecuación característica $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ tiene las raíces $\lambda_{1,2} = \pm i$, buscamos la solución particular del sistema en la forma de la suma de un polinomio de segundo grado y la función del tipo De^t:

$$x_1 = A_1t^2 + B_1t + C_1 + D_1e^t, \quad x_2 = A_2t^2 + B_2t + C_2 + D_2e^t.$$

Sustituyendo estas funciones en el sistema dado obtenemos las igualdades

$$2A_1t + B_1 + D_1e^t = -A_2t^2 - B_2t - C_2 - D_2e^t + t^2,$$
$$2A_2t + B_2 + D_2e^t = A_1t^2 + B_1t + C_1 + D_1e^t + e^t.$$

Igualando los coeficientes para las potencias iguales de t y para e^t obtendremos el sistema

$$2A_1 = -B_2, \quad B_1 = -C_2, \quad D_1 = -D_2, \quad 1 - A_2 = 0,$$
$$2A_2 = B_1, \quad B_2 = C_1, \quad D_2 = D_1 + 1, \quad A_1 = 0.$$

De aquí $A_1 = B_2 = C_1 = 0$, $A_2 = 1$, $B_1 = 2$, $C_2 = -2$, $D_2 = 1/2$, $D_1 = -1/2$, y la solución particular buscada tiene la forma

$$x_1 = 2t - \frac{1}{2}e^t,$$

$$x_2 = t^2 - 2 + \frac{1}{2}e^t. \ ▶$$

EJEMPLO 15. Hállese la solución general del sistema

$$\dot{X}(t) = AX(t) + F(t),$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 + 1 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

tiene la raíz $\lambda = 3$ de multiplicidad 2. La solución general del sistema homogéneo la buscamos en la forma de $X_0(t) = \begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \gamma t + \delta \end{pmatrix} e^{3t}$, si sustituimos la expresión obtenida en el sistema homogéneo y simplificamos en e^{3t} tenemos

$$3\begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \gamma t + \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \gamma t + \delta \end{pmatrix}.$$

Obtenemos el sistema

$$3(\alpha t + \beta) + \beta = 2(\alpha t + \beta) - (\gamma t + \delta),$$
$$3(\gamma t + \delta) + \delta = \alpha t + \beta + 4(\gamma t + \delta),$$

del cual se deducen dos relaciones independientes $\alpha = -\gamma$ y $\beta + \alpha = -\delta$. Poniendo $\alpha = C_1$ y $\beta = C_2$ tenemos $\gamma = -C_1$ y $\delta = -C_1 - C_2$, es decir,

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} C_1 t + C_2 \\ -C_1 t - (C_1 + C_2) \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Puesto que $F(t)$ contiene el factor e^{3t} y en este caso $\lambda = 3$ es la raíz de la ecuación característica de multiplicidad 2, hallamos la solución particular en la forma de

$$\tilde{X}(t) = t\begin{pmatrix} A_1 t^2 + B_1 t + D_1 \\ A_2 t^2 + B_2 t + D_2 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} A_1 t^3 + B_1 t^2 + D_1 t \\ A_2 t^3 + B_2 t^2 + D_2 t \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\left(\text{y no en la forma de } t^2 \begin{pmatrix} A_1 t + B_1 \\ A_2 t + B_2 \end{pmatrix} e^{3t} \right).$$

Sustituyendo $\tilde{X}(t)$ en el sistema dado y simplificando en e^{3t} obtenemos la igualdad matricial

$$3\begin{pmatrix} A_1 t^3 + B_1 t^2 + D_1 t \\ A_2 t^3 + B_2 t^2 + D_2 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3A_1 t^2 + 2B_1 t + D_1 \\ 3A_2 t^2 + 2B_2 t + D_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 t^3 + B_1 t^2 + D_1 t \\ A_2 t^3 + B_2 t^2 + D_2 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \end{pmatrix},$$

a cual puede escribirse en la forma de las igualdades

$$A_1t^3 + B_1t^2 + D_1t + 3A_1t^2 + 2B_1t + D_1 =$$
$$= -A_2t^3 - B_2t^2 - D_2t + t + 1,$$
$$-A_2t^3 - B_2t^2 - D_2t + 3A_2t^2 + 2B_2t + D_2 =$$
$$= A_1t^3 + B_1t^2 + D_1t + 2t.$$

Comparando los coeficientes para las potencias iguales de t, obtendremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0, & A_1 + A_2 &= 0,\\ B_1 + 3A_1 + B_2 &= 0, & B_1 + B_2 - 3A_2 &= 0,\\ D_1 + 2B_1 + D_2 &= 1, & D_1 + D_2 - 2B_2 &= -2,\\ D_1 &= 1, & D_2 &= 0. \end{aligned}$$

Encontramos $D_1 = 1$, $D_2 = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = 3/2$, $A_1 = -1/2$, $A_2 = 1/2$. Por consiguiente,

$$\widetilde{X}(t) = t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2+1 \\ \frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t \end{pmatrix} e^{3t},$$

y la solución general buscada se escribe en la forma

$$X(t) = X_0(t) + \widetilde{X}(t) = \begin{pmatrix} C_1t + C_2 - \frac{1}{2}t^3 + t \\ -C_1t - (C_1 + C_2) + \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix} e^{3t}. \blacktriangleright$$

Hállense las soluciones de los sistemas de ecuaciones siguientes:

3.42. $\dot{x} = 3x - 2y + t$, $\dot{y} = 3x - 4y$.

3.43. $\dot{x} = x - y$, $\dot{y} = x + y + e^t$.

3.44. $\dot{x} = 5x - 3y + te^{2t}$, $\dot{y} = 3x - y + e^{3t}$.

3.45. $\dot{x} = x + y - \cos t$, $\dot{y} = -2x - y + \operatorname{sen} t + \cos t$.

3.46. $\dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1$, $\dot{y} = -x + \operatorname{tg} t$.

3.47*. $\ddot{x} = 2x + 3y$, $\ddot{y} = 4x - 2y$.

3.48*. La sustancia A se descompone en dos sustancias P y Q. La velocidad de formación de cada una de ellas es proporcional a la cantidad de sustancia no descompuesta A. Hállense las leyes según las cuales varían las cantidades x e y de las sustancias P y Q en función del tiempo t, si al cabo de una hora después de iniciarse el proceso de descomposición $x = \frac{a}{8}$, $y = \frac{3a}{8}$, donde a es la cantidad inicial de la sustancia A.

3.49*. Un punto material de masa m se atrae por el centro O con una fuerza proporcional a la distancia. El movimiento comienza del punto A a la distancia a del centro con una velocidad inicial v_0 perpendicular al segmento OA. Hállese la trayectoria del movimiento.

§ 4. Elementos de la teoría de estabilidad

1. Conceptos fundamentales. Sea dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

con las condiciones iniciales en el punto t_0. La solución $X_0(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))^\top$ del sistema (1) se llama *estable según Liapunov*, si para cualquier $\varepsilon > 0$ se halla $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para toda solución $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top$ del mismo sistema, cuyos valores en el punto t_0 satisfacen las desigualdades

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon), \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

para todo $t > t_0$, son válidas las desigualdades

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Si tenemos que $\delta > 0$ es tan pequeño como se quiera y que, aunque sea para una solución $X(t)$, las desigualdades (3) no se cumplen, entonces la solución $X_0(t)$ se llama *inestable*.

Si la solución $X_0(t)$ es no sólo estable sino que, además, para la condición (2) satisface la relación

$$\lim_{t\to\infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

entonces esta solución se llama *asintóticamente estable*.

EJEMPLO 1. Investíguese si es estable la solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = ax$ ($a \in \mathbb{R}$) determinada por la condición inicial $x_0(t_0) = C_0$.

◀ Si $a \neq 0$, la solución tiene la forma

$$x_0(t) = C_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Sea $x(t) = Ce^{a(t-t_0)}$ una solución arbitraria de esta ecuación que satisface la condición $|C - C_0| < \delta = \varepsilon$. Entonces para $a < 0$

tenemos

$$|x(t)-x_0(t)| = |Ce^{-|a|(t-t_0)} - C_0e^{-|a|(t-t_0)}| =$$
$$= e^{-|a|(t-t_0)}|C-C_0| < \varepsilon,$$

de donde

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)-x_0(t)| = |C-C_0| \lim_{t\to\infty} e^{-|a|(t-t_0)} = 0,$$

es decir, la solución es asintóticamente estable.

Para $a > 0$

$$|x(t)-x_0(t)| = e^{|a|(t-t_0)}|C-C_0|$$

puede ser un número tan grande como se quiere para t suficientemente grandes. Esto significa, que para $a > 0$ la solución es inestable.

Si $a = 0$ la solución tiene la forma $x_0(t) = C_0$.

Para toda solución $x(t) = C$ con la condición $|C - C_0| < \delta = \varepsilon$ tenemos

$$|x(t) - x_0(t)| = |C - C_0| < \varepsilon.$$

Pero

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)-x_0(t)| = |C-C_0| \neq 0,$$

y por eso la solución es estable, pero no es asintóticamente estable.▶

La investigación de la solución $X_0(t)$ del sistema (1) a la estabilidad, puede ser reducida a la investigación de la estabilidad de la solución trivial (nula), o sea, del *punto de reposo* de cierto sistema análogo al sistema (1).

Investíguense a la estabilidad las soluciones de las ecuaciones y de los sistemas de ecuaciones siguientes:

4.1. $\dot{x} = t(x-1)$, $x(0) = 1$.

4.2. $\dot{x} = t - 1$, $x(0) = -1$.

4.3. $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = x - y$; $x(0) = y(0) = 0$.

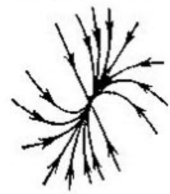
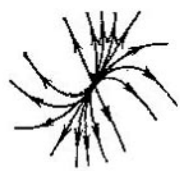
4.4. $\dot{x} = -2x - 3y$, $\dot{y} = x + y$; $x(0) = y(0) = 0$.

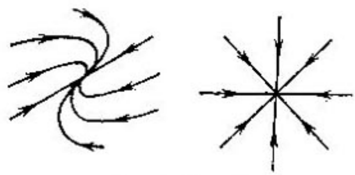
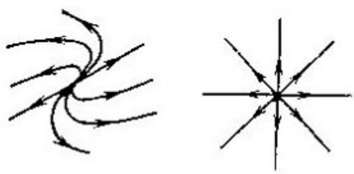
4.5. $\dot{x} = \alpha x - y$, $\dot{y} = \alpha y - z$, $\dot{z} = \alpha z - x$; $x = (0) = y(0) = z(0) = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.6*. Escríbase el sistema de ecuaciones diferenciales, si la investigación del punto de reposo de éste a la estabilidad es equivalente a la investigación a la estabilidad de la solución $X_0(t)$ del sistema.

4.7. Formúlense las definiciones de la estabilidad, de la estabilidad asintótica y de la inestabilidad para el punto pe reposo del sistema de ecuaciones diferenciales.

Tabla 4.1

Raíces λ_1, λ_2		Carácter del punto de reposo	Estabilidad del punto de reposo
Reales: $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$	***Nudo estable*** 	**Asintóticamente estable**
	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$	***Nudo inestable*** 	**Inestable**
	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	***Ensilladura*** 	**Inestable**
Complejas $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$\alpha < 0$, $\beta \neq 0$	***Foco estable*** 	**Asintóticamente estable**
	$\alpha > 0$, $\beta \neq 0$	***Foco inestable*** 	**Inestable**
	$\alpha = 0$, $\beta \neq 0$	***Centro*** 	**Estable**

Raíces λ_1, λ_2		Carácter del punto de reposo	Estabilidad del punto de reposo
Real, de multiplicidad 2: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$	$\lambda<0$	***Nudo estable*** 	Asintóticamente estable
	$\lambda>0$	***Nudo inestable*** 	Inestable

4.8. Demuéstrese que si una solución cualquiera del sistema lineal de ecuaciones diferenciales es estable según Liapunov entonces son estables todas las soluciones de este sistema.

2. Tipos elementales de los puntos de reposo. Para investigar a la estabilidad el punto de reposo del sistema de dos ecuaciones diferenciales homogéneas lineales con coeficientes constantes

$$\begin{aligned}\dot x &= a_{11}x + a_{12}y,\\ \dot y &= a_{21}x + a_{22}y,\end{aligned}\qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{4}$$

es necesario componer la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+\Delta=0$$

y hallar sur raíces λ_1 y λ_2. En la tabla 4.1 se da la clasificación de puntos de reposo del sistema (4) en dependencia de las raíces λ_1, λ_2 de la ecuación característica.

EJEMPLO 2. Determínese el carácter e investíguese a la estabilidad el punto de reposo del sistema

$$\begin{aligned}\dot x &= -2x+\alpha y,\\ \dot y &= x+y\end{aligned}$$

en dependencia del parámetro α.

◀ La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & \alpha \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda-(\alpha+2)=0$$

tiene las raíces $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{9+4\alpha}$.

Investigando el comportamiento de las raíces λ_1, λ_2 en dependencia del parámetro α y empleando los datos de la tabla 4.1, obtenemos:

un foco estable, si $\alpha < -9/4$ (las raíces son complejas, $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$);

un nudo estable, si $\alpha = -9/4$ (las raíces son reales e iguales);

un nudo estable, si $-9/4 < \alpha < -2$ (las raíces son reales y negativas);

una ensilladura y el punto de reposo es inestable, si $-2 < \alpha$ (las raíces son reales y de signos diferentes). ▶

Determínese el carácter de los puntos de reposo de los sistemas siguientes:

4.9. $\dot{x} = x + 2y$, $\dot{y} = -3x + y$.

4.10. $\dot{x} = -2x + \frac{1}{3}y$, $\dot{y} = -2x + \frac{1}{2}y$.

4.11. $\dot{x} = -x + 3y$, $\dot{y} = -x + 2y$.

4.12. $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x - 2y$.

4.13. $\dot{x} = -6x - 5y$, $\dot{y} = -2x - 5y$.

4.14. $\dot{x} = -x + 2y$, $\dot{y} = -2x - 5y$.

Determínese para qué valores del parámetro α el punto de reposo del sistema es estable.

4.15. $\dot{x} = \alpha x - y$, $\dot{y} = x + 2y$.

4.16. $\dot{x} = -3x + \alpha y$, $\dot{y} = -\alpha x + y$.

4.17. Investíguese a la estabilidad la ecuación de oscilaciones elásticas

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta^2 x = 0$$

tomando en consideración el rozamiento y la resistencia del medio (para $\alpha > 0$).

4.18*. Sea dado el sistema de n ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Demuéstrese que si todas las raíces de la ecuación característica de este sistema tienen parte real negativa, entonces el punto de reposo del sistema es asintóticamente estable. Si por lo menos una de las raíces de la ecuación característica tiene una parte real positiva, entonces el punto de reposo es inestable.

Empleando el resultado del problema 4.18 investíguese a la estabilidad el punto de reposo de cada uno de los sistemas siguientes:

4.19. $\dot{x} = 2x,\ \dot{y} = 3x + 2y,\ \dot{z} = -x - y - z.$

4.20. $\dot{x} = -2x - y,\ \dot{y} = x - 2y,\ \dot{z} = x + 3y - z.$

3. Método de funciones de Liapunov. Este método aplicado al sistema autónomo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{5}$$

donde $f_i(0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, consiste en la investigación directa de la estabilidad de su punto de reposo con ayuda de *la función de Liapunov* $V(x_1, \ldots, x_n)$ escogida de modo adecuado.

Son válidos los siguientes teoremas de Liapunov:

TEOREMA 1 (sobre la estabilidad). *Si existe una función diferenciable $V(x_1, \ldots, x_n)$ que satisface en el entorno del origen de coordenadas las siguientes condiciones:*

a) $V(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, ademas $V = 0$ *sólo para* $x_1 = \ldots$ $\ldots = x_n = 0$;

b) $$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0,$$

entonces el punto de reposo del sistema (5) *es estable.*

TEOREMA 2 (sobre la estabilidad asintótica). *Si existe una función diferenciable $V(x_1, \ldots, x_n)$ que satisface en el entorno del origen de coordenadas las siguientes condiciones:*

a) $V(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, *además* $V = 0$ *sólo cuando* $x_1 = \ldots$ $\ldots = x_n = 0$,

b) $$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0, \text{ además } \frac{dV}{dt} = 0 \textit{ sólo para}$$

$x_1 = \ldots = x_n = 0$, *entonces el punto de reposo del sistema* (5) *es asintóticamente estable.*

TEOREMA 3. (Sobre la inestabilidad). *Si existe una función diferenciable $V(x_1, \ldots, x_n)$ que satisface en el entorno del origen de coordenadas las condiciones:*

a) $V(0, \ldots, 0) = 0$ *y tan cerca del origen de coordenadas como se quiera, hay puntos en los cuales* $V(x_1, \ldots, x_n) > 0$;

b) $\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, *además* $\frac{dV}{dt} = 0$ *sólo para* $x_1 = \ldots = x_n = 0$,

entonces el punto de reposo del sistema (5) *es inestable.*

EJEMPLO 3. Con ayuda de la función de Liapunov investíguese a la estabilidad el punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = -x + y,$$
$$\dot{y} = -2y^3 - x.$$

◀ En calidad de función de Liapunov tomemos $V = x^2 + y^2$. Entonces

$$\frac{dV}{dt} = 2x(-x + y) + 2y(-2y^3 - x) = -2(x^2 + 2y^4),$$

y la función V junto con $\frac{dV}{dt}$ satisfacen las condiciones del teorema 2. Lo que quiere decir que el punto de reposo del sistema es asintóticamente estable. ▶

EJEMPLO 4. Investíguese a la estabilidad el punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = x(2 + \cos x),$$
$$\dot{y} = -y.$$

◀ Tomenos la función $V(x, y) = x^2 - y^2$. En este caso $\frac{dV}{dt} = 2x^2(2 + \cos x) + 2y^2 = 2(2x^2 + y^2 + x^2 \cos x) = 2\left(x^2 + 2x^2 \cos^2 \frac{x}{2} + y^2\right) > 0$ en todos los puntos, excepto en el origen de coordenadas. Además, tan cerca del origen de coordenadas como se quiera existen tales puntos, en los cuales $V > 0$ (por ejemplo, a lo largo de la recta $y = 0$ $V = x^2 > 0$). Por consiguiente, quedan cumplidas las condiciones del teorema 3 y el punto de reposo es inestable. ▶

No existe el método general de construcción de la función de Liapunov. En los casos elementales es conveniente buscarla en la forma: $V = ax^2 + by^2$, $V = ax^4 + by^4$, $V = ax^2 + by^4$, escogiendo de modo adecuado las constantes $a > 0$ y $b > 0$.

EJEMPLO 5. Investíguese a la estabilidad el punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = -x + \frac{3}{2}y + 3xy^3,$$
$$\dot{y} = -x - \frac{1}{2}y - 2x^2y^2.$$

◀ Buscaremos la función de Liapunov en la forma de $V = ax^2 + by^2$, $a > 0$, $b > 0$. Entonces tenemos:

$$\frac{dV}{dt} = 2ax\left(-x + \frac{3}{2}y + 3xy^3\right) + 2by\left(-x - \frac{y}{3} - 2x^2y^2\right) =$$

$$= -\left(2ax^2 + \frac{2}{3}by^2\right) + (xy + 2x^2y^3)(3 - 2b).$$

Poniendo $b = \frac{3}{2}a$ obtendremos que $\frac{dV}{dt} = -a(2x^2 + y^2) \leqslant 0$ para cualquier $a > 0$. Del teorema 2 se deduce que el punto de reposo del sistema es asintóticamente estable. ▶

Investíguense a la estabilidad los puntos de reposo de los sistemas siguientes:

4.21. $\dot{x} = -x - y - x^3 - y^2$, $\dot{y} = x - y + xy$.

4.22. $\dot{x} = y + x^3$, $\dot{y} = -x + y^3$.

4.23. $\dot{x} = xy^4$, $\dot{y} = -x^4y$.

4.24. $\dot{x} = -y + x^5$, $\dot{y} = x + y^5$.

4.25. $\dot{x} = y + x^2y^2 - \frac{1}{4}x^5$, $\dot{y} = -2x - 2x^3y - \frac{1}{2}y^3$.

4.26. $\dot{x} = -2x + 4xy^2$, $\dot{y} = y + 2x^2y$.

4. Estabilidad según la primera aproximación. Supongamos que las partes derechas del sistema (5), es decir las funciones $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, son diferenciables suficiente número de veces en el origen de coordenadas. Desarrollémoslas según la fórmula de Taylor en el entorno del origen de coordenadas:

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j + F_i(x_1, \ldots, x_n),$$

donde $a_{ij} = \frac{\partial f_i(0, \ldots, 0)}{\partial x_j}$ y F_i son términos de segundo orden de infinitud respecto de $x_1, \ldots, x_n$. Entonces el sistema inicial (5) puede ser escrito en la forma

$$\dot{x}_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + F_1(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{x}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j + F_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Analicemos el sistema

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ x_n, \tag{6}$$

llamado sistema de ecuaciones de *primera aproximación* para el sistema (5).

Es justa la siguiente afirmación: si todas las raíces de la ecuación característica del sistema (6) tienen partes reales negativas, entonces el punto de reposo del sistema (6), así como del sistema inicial (5) es asintóticamente estable; si por lo menos una de las raíces de la ecuación característica del sistema (6) tiene parte real positiva, entonces el punto de reposo del sistema (6) (y del sistema (5)) es inestable.

Se dice que en este caso es posible investigar el sistema (5) a la *estabilidad según la primera aproximación*. En los demás casos es imposible realizar, hablando en general, tal investigación ya que empiezan a influir los términos de segundo orden de infinitud.

EJEMPLO 6. Investíguese a la estabilidad el punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = 2x + 8 \operatorname{sen} y,$$
$$\dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y.$$

◀ Desarrollando las funciones sen y, cos y, e^x según la fórmula de Taylor y separando los términos de primer orden de infinitud podemos reescribir el sistema inicial en la forma de

$$\dot{x} = 2x + 8y + F_1(x,\ y),$$
$$\dot{y} = -x - 3y + F_2(x,\ y),$$

donde F_1, F_2 son términos de segundo orden de infinitud respecto de x e y. El sistema correspondiente de ecuaciones de primera aproximación de la forma (6) se escribe del modo siguiente:

$$\dot{x} = 2x + 8y,$$
$$\dot{y} = -x - 3y.$$

Las raíces de su ecuación característica $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ tienen partes reales negativas. Por consiguiente, el punto de reposo de este sistema, así como del inicial, es estable. ▶

Investíguense a la estabilidad según la primera aproximación los puntos de reposo de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

4.27. $\dot{x} = \frac{1}{4}(e^x - 1) - 9y,\ \dot{y} = \frac{1}{5}x - \operatorname{sen} y.$

4.28. $\dot{x} = 5x + y\cos y,\ \dot{y} = 3x + 2y - y^3 e^y.$

4.29. $\dot{x} = 7x + 2 \operatorname{sen} y, \ \dot{y} = e^x - 3y - 1.$

4.30. $\dot{x} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2y, \ \dot{y} = -y - 2x.$

4.31. $\dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}.$

4.32. $\dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \ \dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y.$

4.33. Demuéstrese que es imposible investigar la estabilidad según la primera aproximación del punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = -4y - x^3, \quad \dot{y} = 3x - y^3.$$

Realícese la investigación aplicando el método de funciones de Liapunov.

§ 5. Integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Problema de Cauchy. El problema de hallar la solución particular $y = y(x)$ $(y(x_0) = y_0)$ de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, llamado problema de Cauchy, puede ser resuelto aproximadamente valiéndose de los métodos numéricos.

MÉTODO DE EULER. Los valores de la función buscada $y = y(x)$ en el segmento $[x_0, X]$ se determinan por la fórmula

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \tag{1}$$

donde $y_k = y(x_k)$, $x_{k+1} = x_k + h$ $(x_n = X)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, y $h = \frac{X - x_0}{n}$ (paso). Basándose en el error absoluto límite dado ε se establece el paso inicial de cálculos de h, con ayuda de la desigualdad $h^2 < \varepsilon$.

MÉTODO DE EULER CON ITERACIONES. Para calcular los valores de la función $y = y(x)$ se emplea la fórmula

$$y_{k+1}^{(m)} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_k, y_{k+1}^{(m-1)})\right). \tag{2}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1, \ m = 1, 2, \ldots, M,$$

donde $y_{k+1}^{(0)} = y_{k+1}$ se calcula por la fórmula (1). Para cada valor de k los cálculos se continúan hasta cumplir la desigualdad

$$|y_{k+1}^{(m)} - y_{k+1}^{(m-1)}| < \varepsilon \tag{3}$$

donde ε es el error absoluto límite dado. Luego, poniendo $y_{k+1} = y_{k+1}^{(m)}$ se pasa a la determinación del valor siguiente y_{k+2} de la función buscada. Si la desigualdad (3) no se obtiene, disminuyen el paso h y realizan todos los cálculos de nuevo. Basándose en el error absoluto límite dado ε se establece el paso inicial de cálculos de h, con ayuda de la desigualdad $h^3 < \varepsilon$. La estimación a posteriori de exactitud se hace con ayuda de la regla de Runge—Romberg (véase más abajo).

EJEMPLO 1. Aplicando el método de Euler con iteraciones, resuélvase el problema de Cauchy en el segmento $[0, 1]$ para la ecuación $y' = 2x - y$, con la condición inicial $y = -1$ para $x = 0$. Hay que escoger el paso de tal modo que se satisfaga la desigualdad $h^3 < 0{,}01$.

◀ Partiendo de la desigualdad $h^3 < 0{,}01$ escojamos el paso de cálculos de $h = 0{,}2$. Entonces $n = \dfrac{1-0}{0{,}2} = 5$. Calculando con un solo signo de reserva hallamos por la fórmula (1) el valor de

$$y_1^{(0)} = -1 + 0{,}2\,(2\cdot 0 - (-1)) = -0{,}800.$$

Introduzcamos la elaboración iterativa de y_1 según la fórmula (2):

$$y_1^{(1)} = -1 + \frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0 - (-1) + 2\cdot 0{,}2 - (-0{,}800)) = -0{,}780,$$

$$y_1^{(2)} = -1 + \frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0 - (-1) + 2\cdot 0{,}2 - (-0{,}780)) = -0{,}782,$$

$$y_1^{(3)} = -1 + \frac{0{,}2}{1}\,(2\cdot 0 - (-1) + 2\cdot 0{,}2 - (-0{,}782)) = -0{,}782.$$

Obtenemos $y_1 = -0{,}782$.

Calculamos por la fórmula (1) el valor de $y_2^{(0)}$:

$$y_2^{(0)} = -0{,}782 + 0{,}2\,(2\cdot 0{,}2 - (-0{,}782)) = -0{,}546.$$

Efectuamos la elaboración iterativa:

$$y_2^{(1)} = -0{,}782 + \frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0{,}2 - (-0{,}782) + 2\cdot 0{,}4 - (-0{,}546)) = -0{,}529,$$

$$y_2^{(2)} = -0{,}782 + \frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0{,}2 = (-0{,}782) + 2\cdot 0{,}4 - (-0{,}529)) = -0{,}531.$$

$$y_2^{(3)} = -0{,}782 + \frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0{,}2 - (-0{,}782) + 2\cdot 0{,}4 - (-0{,}531)) = -0{,}531.$$

Obtenemos $y_2 = -0{,}531$.

Calculando de modo análogo hallamos $y_3 = -0{,}253$, $y_4 = 0{,}047$, $y_5 = 0{,}366$. Redondeando hasta centésimas obtenemos $y_0 = -1{,}00$, $y_1 = -0{,}78$, $y_2 = -0{,}53$, $y_3 = -0{,}25$, $y_4 = 0{,}05$, $y_5 = 0{,}37$. Los valores hallados de y_k coinciden con una exactitud de hasta 0,01 con los valores de la solución particular $y = e^{-x} + 2x - 2$ en los puntos correspondientes del segmento $[0, 1]$. ▶

MÉTODO DE RUNGE — KUTTA. Los valores de la función buscada $y = y(x)$ en el segmento $[x_0, X]$ se determinan sucesivamente según las fórmulas

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{4}$$

donde

$$\Delta y_k = \frac{1}{6}\left(q_1^{(k)} + 2q_2^{(k)} + 2q_3^{(k)} + q_4^{(k)}\right),$$

$$q_1^{(k)} = h\cdot f(x_k, y_k),\ q_2^{(k)} = h\cdot f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{q_1^{(k)}}{2}\right),$$

$$q_3^{(k)} = h\cdot f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{q_2^{(k)}}{2}\right),\ q_4^{(k)} = h\cdot f(x_{k+1},$$

$$y_k + q_3^{(k)}),$$

$$x_{k+1} = x_k + h\ (x_n = X),\ h = \frac{X - x_0}{n}.$$

A partir del error absoluto límite dado ε se determina el paso inicial de cálculos de h, con ayuda de la desigualdad $h^4 < \varepsilon$. La estimación a posteriori de exactitud se realiza según la regla de Runge—Romberg.

REGLA DE RUNGE—ROMBERG. Sean $y_k^{(h)}$ e $y_k^{(2h)}$ los valores de la función buscada obtenidos por uno de los métodos anteriormente mencionados para los pasos de cálculos h y $2h$, respectivamente, y sea ε el error absoluto límite dado. Entonces se considera que está alcanzada la exactitud dada de cálculos, si se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{2^s - 1}\cdot\left|y_{2k}^{(h)} - y_k^{(2h)}\right| < \varepsilon \tag{5}$$

para todos los k y cuando $s = 2,\ 3,\ 4$, respectivamente, para los métodos de Euler, de Euler con iteraciones y de Runge—Kutta. La solución del problema es la función $\{y_k^{(h)}\}$.

Aplicando la regla indicada se calculan sucesivamente los valores de la función buscada con el paso $2h$ y con el paso h y se comparan los resultados obtenidos por la fórmula (5). Los cálculos terminan cuando la desigualdad (5) se cumple para todos los k.

EJEMPLO 2. Aplicando el método Runge—Kutta resuélvase con una exactitud de hasta 0,001 el problema de Cauchy en el segmento $[0,\ 0{,}6]$ para la ecuación $y' = x + y$ con la condición inicial $y = 1$ para $x = 0$.

◀ Partiendo de la desigualdad $H^4 < 0{,}001$ escogemos el paso inicial de cálculos $H = 0{,}15$. Entonces $n = 4$. Calculando con un solo dígito de reserva encontramos y_1 según la fórmula (4):

$$y_1 = 1 + \Delta y_0 = 1 + \frac{1}{6}\left(q_1^{(0)} + 2q_2^{(0)} + 2q_3^{(0)} + q_4^{(0)}\right),$$

donde $q_1^{(0)} = 0{,}1500$, $q_2^{(0)} = 0{,}1725$, $q_3^{(0)} = 0{,}1742$, $q_4^{(0)} = 0{,}1986$. Tenemos:

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(0{,}1500 + 2\cdot 0{,}1725 + 2\cdot 0{,}1742 + 0{,}1986) = 1{,}1737.$$

Luego,

$$y_2 = 1{,}1737 + \frac{1}{6}\left(q_1^{(1)} + 2q_2^{(1)} + 2q_3^{(1)} + q_4^{(1)}\right),$$

donde $q_1^{(1)}=0{,}1986$, $q_2^{(1)}=0{,}2247$ $q_3^{(1)}=0{,}2267$, $q_4^{(1)}=0{,}2551$. Por consiguiente,

$$y_2=1{,}1737+\frac{1}{6}(0{,}1986+2\cdot 0{,}2247+2\cdot 0{,}2267+0{,}2551)=1{,}3998.$$

De modo análogo calculamos $y_3=1{,}6867$ e $y_4=2{,}0443$.

Disminuimos el paso en dos veces, es decir, escogemos $h=0{,}075$, ahora $n=8$. Encontramos $y_1^{(h)}$ por las fórmulas (4):

$$y_1^{(h)}=1+\Delta y_0=1+\frac{1}{6}(\widetilde{q}_1^{(0)}+2\widetilde{q}_2^{(0)}+2\widetilde{q}_3^{(0)}+\widetilde{q}_4^{(0)})=$$

$$=1+\frac{1}{6}(0{,}075+2\cdot 0{,}0806+2\cdot 0{,}0808+0{,}0867)=1{,}0808.$$

De modo análogo encontramos los demás valores de $y_k^{(h)}$.

Ponemos los resultados en la tabla:

$y_k^{(2h)}$	$y_k^{(h)}$	$y_k^{(2h)}-y_k^{(h)}$
$y_0^{(2h)}=1$	$y_0^{(h)}=1$	0
	$y_1^{(h)}=1{,}0808$	
$y_1^{(2h)}=1{,}1737$	$y_2^{(h)}=1{,}1737$	0
	$y_3^{(h)}=1{,}2796$	
$y_2^{(2h)}=1{,}3998$	$y_4^{(h)}=1{,}3997$	0,0001
	$y_5^{(h)}=1{,}5350$	
$y_3^{(2h)}=1{,}6867$	$y_6^{(h)}=1{,}6866$	0,0001
	$y_7^{(h)}=1{,}8559$	
$y_4^{(2h)}=2{,}0443$	$y_8^{(h)}=2{,}0442$	0,0001

Es evidente que el primer miembro de la desigualdad (5) en este caso no supera a 0,00002. Por eso, $y_k^{(h)}$ con una exactitud de hasta 0,00002 representa la función que se busca, es decir, todos los dígitos hallados son válidos. ▶

MÉTODO DE MILNE. Los valores de la función buscada $y = y(x)$ en el segmento $[x_0, X]$ se hallan sucesivamente por dos fórmulas:

$$\tilde{y}_k = y_{k-4} + \frac{4h}{3}(2 \cdot f(x_{k-3}, y_{k-3}) - f(x_{k-2}, y_{k-2}) + \\ + 2 \cdot f(x_{k-1}, y_{k-1})), \tag{6}$$

$$y_k = y_{k-2} + \frac{h}{3}(f(x_{k-2}, y_{k-2}) + 4f(x_{k-1}, y_{k-1}) + \\ + f(x_k, \tilde{y}_k)),$$

$$k = 4, 5, \ldots, n, \; h = \frac{X - x_0}{n}, \; x_k = x_{k-1} + h.$$

Los cuatro primeros valores de y_0, y_1, y_2, y_3 deben ser dados y para esto previamente se determinan y_1, y_2, y_3 por cualquier otro método. El error absoluto límite ε del valor y_k de la solución aproximada se determina por la igualdad

$$\varepsilon = \frac{1}{29}|\tilde{y}_k - y_k|. \tag{7}$$

EJEMPLO 3. Empleando los valores de y_1, y_2, y_3 que fueron obtenidos en el ejemplo 2 por el método de Runge—Kutta, hállese el valor de y_4 mediante el método de Milne.

◀ Tenemos $y_0 = 1{,}0000$; $y_1 = 1{,}0808$, $y_2 = 1{,}1737$, $y_3 = 1{,}2796$ y $h = 0{,}075$. Calculando $\tilde{y}_4$ e y_4 según las fórmulas (6), obtenemos:

$$\tilde{y}_4 = 1 + \frac{4 \cdot 0{,}075}{3}(2(0{,}075 + 1{,}0808) - (0{,}15 + 1{,}1737) + \\ + 2(0{,}225 + 1{,}2796)) = 1{,}3997,$$

$$y_4 = 1{,}1737 + \frac{0{,}075}{3}((0{,}15 + 1{,}1737) + 4(0{,}225 + 1{,}2796) + \\ + (0{,}3 + 1{,}3997) = 1{,}3997.$$

Ya que $\tilde{y}_4 - y_4 = 0$ de la fórmula (7) concluimos que todos los dígitos de los valores de y_4 son válidos. ▶

En los problemas 5.1—5.19 se exige hallar con una exactitud de hasta 0,0001, la solución de la ecuación diferencial de primer orden para las condiciones iniciales indicadas en el segmento dado:

a) mediante el método de Euler con iteraciones,
b) mediante el método de Runge — Kutta,
c) mediante el método de Milne.

5.1. $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $y(0) = 1$, $[0, 1]$.

5.2. $y' - 2y = 3e^x$, $y(0{,}3) = 1{,}415$, $[0{,}3, 0{,}6]$.

5.3. $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$, $[0, 0{,}3]$.

5.4. $y' = y^3 - x^2$, $y(1) = 1$, $[1, 2]$.
5.5. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0{,}27$, $[0, 1]$.
5.6. $y' + xy(1 - y^2) = 0$, $y(0) = 0{,}5$, $[0, 1]$.
5.7. $y' = x^2 - xy + y^2$, $y(0) = 0{,}1$, $[0, 1]$.
5.8. $y' = (2y - x)/y$, $y(1) = 2$, $[1, 2]$.
5.9. $y' = x^2 + xy + y^2 + 1$, $y(0) = 0$, $[0, 1]$.
5.10. $y' + y = x^3$, $y(1) = -1$, $[1, 2]$.
5.11. $y' = xy + e^y$, $y(0) = 0$, $[0, 0{,}1]$.
5.12. $y' = 2xy + x^2$, $y(0) = 0$, $[0, 0{,}5]$.

5.13. $y' = x + \operatorname{sen}\frac{y}{2}$, $y(0) = 1$, $[0, 2]$.
5.14. $y' = e^x - y^2$, $y(0) = 0$, $[0, 0{,}4]$.
5.15. $y' = 2x + \cos y$, $y(0) = 0$, $[0, 0{,}1]$.
5.16. $y' = x^3 + y^2$, $y(0) = 0{,}5$, $[0, 0{,}5]$.
5.17. $y' = xy^3 - y$, $y(0) = 1$, $[0, 1]$.
5.18. $y' = y^2 \cdot e^x - 2y$, $y(0) = 1$, $[0, 1]$.

5.19. $y' = \frac{1}{y^2 - x}$, $y(1) = 0$, $[1, 2]$.

En los problemas 5.20—5.22 fórmense en Fortran los subprogramas de la solución de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ mediante los métodos indicados.

5.20. Método de Euler con iteraciones. Los parámetros son F, X0, Y0, H, N, Y, donde F es el nombre del subprograma-función para calcular los valores de la función $f(x, y)$, X0 es el valor inicial del argumento, Y0 es el valor inicial de la función, H es el paso de cálculos, N es el número de valores de la función buscada $y = y(x)$, Y es la tabla de dimensión N de los valores de la función $y = y(x)$.

5.21. Método de Runge — Kutta. Los parámetros son F, X0, Y0, H, N, Y, EPS, donde H es el paso inicial de cálculos, EPS es el error absoluto límite dado, parámetro de entrada; los demás parámetros son los mismos que en el problema 5.20.

5.22. Método de Milne. Los parámetros son F, X0, H, N, Y, EPS, donde EPS es el error absoluto límite obtenido durante los cálculos, parámetro de salida, N es el número de valores de la función buscada, incluyendo el inicial. Los demás parámetros son los mismos que en el problema 5.20. Los cuatro primeros elementos de la tabla Y deben ser determinados antes de recurrir al subprograma.

En los problemas 5.23—5.25 compóngase en Fortran el programa de la solución de uno de los problemas 5.1—5.19, empleando con este fin uno de los subprogramas indicados.

5.23. Subprograma obtenido en el problema 5.20.
5.24. Subprograma obtenido en el problema 5.21.
5.25. Subprograma obtenido en el problema 5.22.

Los métodos considerados más arriba pueden ser empleados en la solución del problema de Cauchy para el sistema normal de dos ecuaciones diferenciales de primer orden y para la ecuación diferencial de segundo orden.

EJEMPLO 4. Aplicando el método de Euler con iteraciones resuélvase el problema de Cauchy en el segmento $[3, 4]$ con una exactitud de hasta 0,01 para la ecuación

$$y'' = -\frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} + 1,$$

cuando las condiciones iniciales son $y(3) = 6$, $y'(3) = 3$.

◀ Partiendo de la desigualdad $h^3 < 0{,}01$ escojamos el paso de cálculos de $h = 0{,}2$. Entonces $n = \dfrac{4-3}{0{,}2} = 5$.

Reducimos la ecuación de segundo orden al sistema de dos ecuaciones de primer orden, introduciendo una nueva función $p = y'$:

$$p' = -\frac{p}{x} + \frac{y^2}{x} + 1 = f(x, y, p),$$

$$y' = p = \varphi(x, y, p).$$

Las condiciones iniciales para el sistema dado son: $y = 6$, $p = 3$ para $x = 3$.

Conservando un signo de reserva calculemos los valores de las funciones $p = p(x)$ e $y = y(x)$ en los puntos $x_1 = 3{,}2$, $x_2 = 3{,}4$, $x_3 = 3{,}6$, $x_4 = 3{,}8$, $x_5 = 4$, según las fórmulas (1) y (2).

Para $x_1 = 3{,}2$ tenemos:

$$p_1^{(0)} = p_0 + h \cdot f(x_0, y_0, p_0) = 3 + 0{,}2\left(-\frac{3}{3} + \frac{6}{3^2} + 1\right) = 3{,}133,$$

$$y_1^{(0)} = y_0 + h \cdot \varphi(x_0, y_0, p_0) = y_0 + h \cdot p_0 = 6 + 0{,}2 \cdot 3 = 6{,}600,$$

$$p_1^{(1)} = p_0 + \frac{h}{2}\left(f(x_0, y_0, p_0) + f(x_1, y_1^{(0)}, p_1^{(0)})\right) =$$

$$= 3 + 0{,}1\left(\left(-\frac{3}{3} + \frac{6}{3^2} + 1\right) + \left(-\frac{3{,}133}{3{,}2} + \frac{6{,}600}{3{,}2^2} + 1\right)\right) = 3{,}133,$$

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}\left(\varphi(x_0, y_0, p_0) + \varphi(x_1, y_1^{(0)}, p_1^{(0)})\right) =$$

$$= y_0 + \frac{h}{2}(p_0 + p_1^{(0)}) = 6 + 0{,}1(3 + 3{,}133) = 6{,}613.$$

Obtenemos los valores de $p_1 = 3{,}133$ e $y_1 = 6{,}613$.

Para $x_2 = 3{,}4$ tenemos:

$$p_2^{(0)} = p_1 + h \cdot f(x_1, y_1, p_1) = 3{,}133 + 0{,}2\left(-\frac{3{,}133}{3{,}2} + \frac{6{,}613}{3{,}2^2} + 1\right) = 3{,}266,$$

$$y_2^{(0)} = y_1 + h \cdot \varphi(x_1, y_1, p_1) = y_1 + h \cdot p_1 = 6{,}613 + 0{,}2 \cdot 3{,}133 = 7{,}240,$$

$$p_2^{(1)} = p_1 + \frac{h}{2}\left(f(x_1, y_1, p_1) + f(x_2, y_2^{(0)}, p_2^{(0)})\right) =$$

$$= 3{,}133 + 0{,}1\left(\left(-\frac{3{,}133}{3{,}2} + \frac{6{,}613}{3{,}2^2} + 1\right) + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{3{,}266}{3{,}4} + \frac{7{,}240}{3{,}4^2} + 1\right)\right) = 3{,}266,$$

$$y_2^{(1)} = y_1 + \frac{h}{2}\left(\varphi(x_1, y_1, p_1) + \varphi(x_2, y_2^{(0)}, p_2^{(2)})\right) =$$

$$= y_1 + \frac{h}{2}(p_1 + p_1^{(0)}) = 6{,}613 + 0{,}1\,(3{,}133 + 3{,}266) = 7{,}253.$$

De aquí obtenemos los valores de $p_2 = 3{,}266$ e $y_2 = 7{,}253$.

Realizando cálculos análogos para $x_3 = 3{,}6$, $x_4 = 3{,}8$ y $x_5 = 4$ hallamos

$$p_3 = 3{,}399, \quad y_3 = 7{,}920,$$
$$p_4 = 3{,}532, \quad y_4 = 8{,}613,$$
$$p_5 = 3{,}665, \quad y_5 = 9{,}333.$$

Redondeando hasta centésimas obtenemos la respuesta: $y_0 = 6{,}00$, $y_1 = 6{,}61$, $y_2 = 7{,}25$, $y_3 = 7{,}92$, $y_4 = 8{,}61$, $y_5 = 9{,}33$. ▶

En los problemas 5.26—5.31 se exige hallar la solución del sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden o la solución de la ecuación diferencial de segundo orden, con exactitud de hasta 0,001 para las condiciones iniciales indicadas en el segmento dado:

5.26. $y' = \frac{z}{x}$, $z' = \frac{2z^2}{x(y-1)} + \frac{z}{x}$, $y(1) = 0$, $z(1) = \frac{1}{3}$, $[1, 2]$.

5.27. $y' = (z - y)\,x$, $z' = (z + y)\,x$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$, $[0, 1]$.

5.28. $y' = \cos(y + 2z) + 2$, $z' = \frac{2}{x + 2y^2} + x + 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0{,}05$, $[0, 0{,}3]$.

5.29. $y' = e^{-(y^2-z^2)} + 2x,\ z' = 2y^2 + z,\ y(0) = 0{,}5,$
$z(0) = 1,\ [0,\ 0{,}3].$

5.30. $y'' - y = e^x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0{,}5,\ [0,\ 1].$

5.31. $y'' - 2y' = x^2 - 1,\ y(1) = -\frac{1}{6},\ y'(1) = -\frac{3}{4},$
$[1,\ 2].$

5.32. Fórmese en Fortran aplicando el método de Runge—Kutta el subprograma de la solución del sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$y' = f(x,\ y,\ z),$$
$$z' = \varphi(x,\ y,\ z)$$

con las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0,\ z(x_0) = z_0$, en el segmento $[x_0,\ X]$. Los parámetros son F, F1, X0, Y0, H, N, Y, Z, EPS, donde F y F1 son los nombres de los subprogramas-funciones para calcular los valores de las funciones $f(x,\ y,\ z)$ y $\varphi(x,\ y,\ z)$, X0 es el valor inicial del argumento $x = x_0$, Y0 es el valor inicial de la función, H es el paso inicial de cálculos, N es el número de valores de las funciones buscadas $y = y(x)$ y $z = z(x)$, Y y Z son tablas de dimensión N de los valores de las funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$, EPS es el error absoluto límite dado.

5.33. Utilizando el subprograma obtenido al resolver el problema 5.32, compóngase en Fortran el programa de la solución de uno de los problemas 5.26—5.31.

2. Problema de contorno para la ecuación lineal. El problema de contorno para la ecuación diferencial lineal

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x),$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $f(x)$ son ciertas funciones continuas en el segmento $[a,\ b]$, consiste en hallar su solución $y = y(x)$ que satisfaga las condiciones de frontera

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A,$$
$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B,$$

donde $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \beta_0,\ \beta_1,\ A,\ B$ son constantes y $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$. Este problema puede ser resuelto numéricamente por el método de diferencias finitas; aplicándolo, los valores de las funciones $y = y(x)$ se hallan a partir del sistema de ecuaciones lineales de $(n+1)$-ésimo orden del tipo:

$$\frac{y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k}{h^2}+p(x_k)\frac{y_{k+1}-y_k}{h}+q(x_k)\,y_k=f(x_k), \tag{8}$$

$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-2,$$

$$\alpha_0 y_0+\alpha_1\frac{y_1-y_0}{h}=A,$$

$$\left(h=\frac{b-a}{n}\right),$$

$$\beta_0 y_n+\beta_1\frac{y_n-y_n-1}{h}=B$$

con $n+1$ incógnitas $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

EJEMPLO 5. Resuélvase el problema de contorno para la ecuación diferencial

$$y''+x^2y+2=0$$

con las condiciones de frontera $y(-1)=0$, $y(1)=0$ en el segmento $[-1, 1]$ mediante el método de diferencias finitas, partiendo este segmento en cuatro partes iguales.

◀ Tenemos: $n=4$, $h=0{,}5$, $y_0=0$, $y_4=0$. Por consiguiente, se exige calcular tres valores $y_1=y(-0{,}5)$, $y_2=y(0)$, $y_3=y(0{,}5)$. Formemos el sistema (8) poniendo por turno $k=0, 1, 2$:

$k=0$:

$$\frac{y_2-2y_1+y_0}{h^2}+x_1^2y_1+2=0, \text{ ó } 4(y_2-2y_1+y_0)+\frac{1}{4}y_1=-2;$$

$k=1$:

$$\frac{y_3-2y_2-y_1}{h^2}+x_2^2y_2+2=0, \text{ ó } 4(y_3-2y_2+y_1)=-2;$$

$k=2$:

$$\frac{y_4-2y_3+y_2}{h^2}+x_3^2y_3+2=0, \text{ ó } 4(y_4-2y_3+y_2)+\frac{1}{4}y_3=-2.$$

Añadiendo las condiciones de frontera obtenemos el siguiente sistema de cinco ecuaciones respecto a cinco incógnitas y_0, y_1, y_2, y_3, y_4:

$$\begin{aligned}
16y_0-31y_1+16y_2 \qquad\qquad &=-8,\\
2y_1+4y_2+2y_3 \qquad &=-1,\\
16y_2-31y_3+16y_4 &=-8,\\
y_0 \qquad\qquad\qquad\qquad &=0,\\
y_4 &=0.
\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema hallamos $y_0=0$, $y_1=0{,}8$, $y_2=1{,}05$, $y_3=0{,}8$, $y_4=0$. ▶

En los problemas 5.34—5.39 se exige hallar la solución de la ecuación diferencial de segundo orden con las condiciones de frontera indicadas, aplicando el método de diferencias finitas y dividiendo el segmento dado en n partes iguales.

5.34. $x^2y'' - xy' = 3x^3$; $y(1) = 2$, $y(2) = 9$, $[1, 2]$, $n = 4$.

5.35. $x^2y'' + xy' - y = x^2$; $y(1) = 1{,}333$, $y'(3) = 3$, $[1, 3]$, $n = 7$.

5.36. $y'' + xy' + y = 2x$; $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, $[0, 1]$, $n = 10$.

5.37. $y'' + y\,\mathrm{ch}x = 0$; $y(0) = 0$, $y(2{,}2) = 1$, $[0, 2{,}2]$, $n = 11$.

5.38. $y'' + (x - 1)\,y' + 3{,}125y = 4x$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1{,}368$, $[0, 1]$, $n = 10$.

5.39. $x^2y'' - 2y = 0$, $y(1) - 2y'(1) = 0$, $y(2) = 4{,}5$, $[1, 2]$, $n = 5$.

5.40. Empleando el subprograma de la solución del sistema lineal de las ecua iones algebraicas obtenido en el problema 5.16 del cap. 4, fórmese en Fortran el programa de la solución de uno de los problemas 5.34—5.39.

RESPUESTAS

1.4. $y(\ln|1-x^2|+1)=1$. **1.5.** $y(1+x)=1$. **1.6.** $y=2-3\cos x$. **1.7.** $f(x, y)=0$, para $\frac{\partial f}{\partial x}<0$ tenemos máx, para $\frac{\partial f}{\partial x}>0$ tenemos mín. **1.8.** $\frac{\partial f}{\partial x}+f(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}=0$, a) $y+x^3+3x^2=0$, b) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+4})-\ln 2$. **1.9.** $x^2+y=xy'$. **1.10.** $xy'+y=0$. **1.11.** $y'=y\,\mathrm{th}\,x$. **1.12.** $2xyy'=x^2+y^2$. **1.13.** $yy'=x$. **1.14.** $xy'+2y=0$. **1.15.** $y'=\frac{1}{4ky^2}$. **1.22.** $\mathrm{arctg}\,y-\mathrm{arcsen}\,x=C$; $x=\pm 1$. **1.23.** $e^x+e^{-y}=C$. **1.24.** $y\,\mathrm{sen}\,y+\cos y-x\cos x+\mathrm{sen}\,x=C$. **1.25.** $\mathrm{arctg}\,y+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=C$. **1.26.** $y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$; $x=\pm 1$. **1.27.** $y=C\sqrt{1+e^{2x}}$. **1.28.** $(1+e^x)^2\,\mathrm{tg}\,y=C$. **1.29.** $e^x-\frac{1}{2}e^{2y}-2\ln|1+y|-\frac{(y-1)^2}{2}=C$, $y=-1$. **1.30.** $\mathrm{tg}\,\frac{x+y}{2}-x=C$. **1.31.** $4x+2y+1=Ce^{2y}$. **1.32.** $\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}$

$\frac{1}{2}(4x+y+1)-x=C$. **1.33.** $x^2-y^2=1$. **1.34.** $\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\ln\left|\frac{y}{x}\right|=1$. **1.35.** $y=\operatorname{sen} x$. **1.36.** $y=\pm x\sqrt{2\ln|x|+C}$. **1.37.** $y=2x(\operatorname{arctg} Cx+\pi n)$, $y=(2\pi-1)\pi x$, $n\in\mathbb{Z}$. **1.38.** $x^2-2xy-y^2=C$. **1.39.** $\operatorname{arcsen}\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-y^2}-\ln|x|=C$, $y=\pm x$. **1.40.** $xe^{y/x}=C$, $x=C$. **1.41.** $x^2-xy+y^2+x-y=C$. **1.42.** $x+y-1=C(y+2)^2$, $y=-2$. **1.43.** $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$. **1.44.** $y=xe^{1-x}$. **1.45.** $\ln|y|+2\sqrt{\frac{x}{y}}=2$. **1.46.** $y=\frac{1}{2}(x^2-1)$. **1.47.** $y=e^{-x^2}\left(C+\frac{x^2}{2}\right)$. **1.48.** $y=(x+C)(1+x^2)$. **1.49.** $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{5}e^{3x}$. **1.50.** $y=x\ln x+\frac{C}{x}$. **1.51.** $y=(x+1)^2(e^x+C)$. **1.52.** $x=Cy+\frac{1}{2}y^3$. ● Escríbase la ecuación en la forma de $\frac{dx}{dy}=\frac{x+y^3}{y}$; es lineal respecto a x y $\frac{dx}{dy}$. **1.53.** $x=\operatorname{arctg} y-1+Ce^{-\operatorname{arctg} y}$. **1.54.** $\operatorname{sen} y=Ce^{-x}+x-1$. ● Póngase $\operatorname{sen} y=z$. **1.55.** $y=\operatorname{sen} x$. **1.56.** $y=e^{2x}-e^{x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$. **1.57.** $x=y\ln y+\frac{1}{y}$. **1.58.** $y=e^{-2x^2}\left(C+\frac{1}{2}x^3\right)^2$. **1.59.** $y=\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2\cos x+C}}$; $y=0$. **1.60.** $x^2=Ce^{\operatorname{sen} y}-2(\operatorname{sen} y+1)$. ● Escríbase la ecuación en la forma de $\frac{dx}{dy}=\frac{x^2\cos y+\operatorname{sen} 2y}{2x}$. **1.61.** $y^3=1/(3-2e^{\cos x})$. **1.62.** $x^2=1/(y+3y^2)$. **1.63.** $x^2+xy+y^2=C$. **1.64.** $5x^2y-8xy+x+3y=C$. **1.65.** $x^3+ye^{x/y}=C$. **1.66.** $x^3\cos^2 y+y^2=C$. **1.67.** Todo el plano Oxy. **1.68.** $y\neq x$. **1.69.** $y\neq\frac{2n+1}{2}\pi$. **1.70.** $x>y^2$. **1.71.** $y=0$. **1.72.** $y=1$. **1.73.** $y=-x$. **1.74.** $y=x^2/4$. **1.75.** $x=2p+6p^2+C$, $y=p^2+4p^3$; $y=0$ (solución particular). **1.76.** $x=2\sqrt{p^2+1}-\ln(1+\sqrt{p^2+1})+\ln p+C$, $y=p\sqrt{1+p^2}$; $y=0$ (solución particular). **1.77.** $x=e^p+C$, $y=(p-1)e^p$. **1.78.** $y=Cx+\frac{1}{2}(C^2-x^2)$, $y=-x^2$ (solución particular). **1.79.** $x=p^3-p+2$, $y=\frac{3}{4}p^4-\frac{p^2}{2}+C$. **1.80.** $x=p\cos p$, $y=p^2\cos p-p\operatorname{sen} p-\cos p+C$. **1.81.** $x=2p-\ln p$, $y=p^2-p+C$. **1.82.** $x=Cy+C^2$, $x=-\frac{1}{4}y^2$ (solución particular). **1.83.** $y=\frac{1}{2}Cx^2+\frac{1}{2C}$, $y=\pm x$ (solución particular). **1.84.** $x=\frac{C}{p^2}-\frac{2}{p^3}$; $y=\frac{2C}{p}-\frac{3}{p^2}$. **1.85.** $x=-p-\frac{1}{2}+\frac{C}{(1-p)^2}$, $y=-\frac{1}{2}p^2+\frac{Cp^2}{(1-p)^2}$; $y=0$, $y=x+$

$+1$ (solución particular). **1.86.** $x=Cp-\ln p-2$, $y=\frac{1}{2}Cp^2-p$.
1.87. $y=Cx-\frac{1}{C}$, $y^2=-4x$ (solución particular). **1.88.** $y=Cx+C+\sqrt{C}$, $y=-\frac{1}{4(x+1)}$ (solución particular). **1.89.** $y=Cx-e^C$, $y=x(\ln x-1)$ (solución particular) **1.90.** $y=Cx+\cos C$, $y=x\operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}$ (solución particular). **1.91.** Lineal; $y=uv$. **1.92.** Homogénea; $y=ux$. **1.93.** Con las variables separables. **1.94.** Ecuación de Bernoulli; $y=uv$. **1.95.** Lineal respecto a x; $x=uv$. **1.96.** Ecuación en diferenciales totales **1.97.** Homogénea; $x=uy$. **1.98.** Ecuación de Bernoulli respecto a x; $x=uv$. **1.99.** La que se reduce a la ecuación con variables separables; $u=y-x$. **1.100.** Lineal; $y=uv$.
1.101. Ecuación de Bernoulli; $y=uv$. **1.102.** $y=x^2-2+Ce^{-x^2/2}$.
1.103. $\ln|y|+\frac{x}{y}=C$, $y=0$ (solución particular). **1.104.** $\frac{1}{2}x^2\cos 2y+x=C$. **1.105.** $y=\frac{1}{(x+C)\cos x}$. **1.106.** $y=\sqrt[3]{C+3x-3x^2}$.
1.107. $x=\frac{1}{2}y^2+Cy^3$. **1.108.** $\ln|x|+e^{x/y}=C$, $x=0$ (solución particular). **1.109.** $1+y^2=C(1-x^2)$. **1.110.** $x^4-x^2y^2+y^4=C$. **1.111.** $y=1/(1+\ln x+Cx)$. **1.112.** $(3x+2y-1)(x-1)=C$. **1.113.** $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}+C$. **1.114.** $2y\cos x+\cos 2x=C$. **1.115.** $x^2+x\ln y-\cos y=C$. **1.116.** $y=Cx-\ln C$, $y=1+\ln$ (solución particular).
1.117. $x=1/(Ce^{-y^2/2}+2-y^2)$. **1.118.** $\ln|x|-\cos\frac{y}{x}=C$. **1.119.** $x\sqrt{1+y^2}-\operatorname{sen} y=C$. ● Escríbase la ecuación en forma $\frac{dx}{dy}+\frac{y}{1+y^2}x=\frac{\cos y}{\sqrt{1+y^2}}$ **1.120.** $x+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$. **1.121.** $y=\left(\frac{C+\ln|\operatorname{sen} x|}{x}-\operatorname{ctg} x\right)^2$. **1.122.** $y=C^2+Cx-\frac{x^2}{4}$, $y=-\frac{x^2}{2}$ (solución particular). **1.123.** $(x+y^3)^3=C(y^3-x)$. ● Póngase $y=z^{1/3}$. **1.124.** $y=\pm\ln|x^2-1|$. **1.125.** 1) $y^2=4x$, 2) $xy^2=4$. **1.126.** $y=\pm\frac{x}{x-1}$.
1.127. $(x+C)^2+y^2=a^2$. **1.128.** $y^2=\pm 2a(x+C)$. **1.129.** $y=2\operatorname{ch}\frac{x}{2}$. **1.130.** $y^2=x^2/(x^2+3)$. **1.131.** $y^2=6x+9$. **1.132.** 1) $y^2=4(x-1)$, 2) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$. **1.133.** $y^2=\frac{2}{3}x$. **1.134.** $r=2e^{\varphi/a}$.
1.135. $x^2+y^2=2y$. **1.136.** $x=y(3\pm\ln|y|)$. **1.137.** $y^2=2x+1-e^{2x}$. **1.138.** $y=\frac{1}{x}-x^2$. **1.139.** $x=\pm\left(\frac{1}{y}-y\right)$. **1.140.** $y=x\sqrt{5x^2-1}$.

1.141. $r=\varphi+\frac{\pi}{2}$. 1.142. $2x^2+3y^2=C^2$. 1.143. $x^2+2y^2=C^2$. 1.144. $y=C/x^2$. 1.145. $x+y^2=C$. 1.146. $T=a+(T_0-a)e^{-kt}$. 1.147. Al cabo de 40 min. 1.148. $\omega=5\cdot(3/5)^{t/120}$ (r.p.s.); al cabo de 6 min 18 s. ● La ecuación tiene la forma de $\frac{d\omega}{dt}=-k\omega$. 1.149. Al cabo de 1575 años. 1.150. En 6 min 5 s. ● La ecuación tiene el aspecto de $wv(h)\,dt=-S(h)\,dh$ donde w es el área del orificio, $v(h)$ es la velocidad de salida del agua, h es el nivel del agua, $S(h)$ es el área de la sección transversal del recipiente, t es el tiempo. 1.151. 0,0878. ● La ecuación tiene la forma de $dQ=-kQdh$. 1.152. ≈ 50 s; ≈ 15 m. 1.153. $t\approx 0{,}0011$ s. ● La ecuación tiene el aspecto de $m\frac{dv}{dt}=-kv^2$. 1.154. 0,5 kg. 1.155. a) 56,5 g; b) 7,84 h. 1.156. 0,06 %. ● La ecuación tiene la forma de $(0{,}01\,x-0{,}0004)\,1500\,dt=-10800\cdot 0{,}01\,dx$, donde x es el contenido de dióxido de carbono (en %) en el aire en el momento de tiempo t. 1.157. $i=\frac{E}{R^2+L^2\omega^2}\left(R\operatorname{sen}\omega t-L\omega\cos\omega t+L\omega e^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

2.1. $y'<x^2$. 2.2. $y'>0$. 2.9. $y''=0$. 2.10. $\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}=R^2$. 2.11. $y''+y=0$. 2.12. $y'''=0$. 2.13. $y=(C_1+\operatorname{arctg}x)\,x-\ln\sqrt{1+x^2}+C_2$. 2.14. $y=\frac{x^3}{6}-\operatorname{sen}x+C_1x+C_2$. 2.15. $y=\frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{x}{C_1}+C_2$, $y=\frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{x-C_1}{x+C_1}\right|+C_2$, $y=C-\frac{1}{x}$. 2.16. $C_1^2y=(C_1^2x^2+1)\operatorname{arctg}C_1x-C_1x+C_2$, $2y=k\pi x^2+C$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. 2.17. $y=\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\left(x-\frac{1}{C_1}\right)+C_2$, $y=\frac{ex^2}{2}+C$. 2.18. $y=\frac{1}{x}+C_1\ln x+C_2$. 2.19. $y=C_1\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)+x^2+C_2$, $y=C_1\left(x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen}x\right)+x^2+C_2$. 2.20. $y=C_1(x-e^{-x})+C_2$. 2.21. $2y=C_1\cos 2x+(1+2C_1)\,x^2+C_2x+C_3$. 2.22. $2y=C_1x^2-2C_1^2(x+C_1)\ln|x+C_1|+C_2x+C_3$. 2.23. $y=C_3-(x+C_1)\ln|x+C_1|+C_2x$, $y=C_1x+C_2$. 2.24. $x=2C_1p-\ln|p|+C_2$, $y=C_1p^3-p$; $y=Ce^{-x}$; $y=C$. 2.25. $x=\pm\frac{2}{3}(\sqrt{y}-2C_1)\sqrt{\sqrt{y}+C_1}+C_2$. 2.26. $\frac{1}{C_1}\sqrt{C_1y^2+1}=C_2\pm x$. 2.27. $C_1^2y+1=\pm\operatorname{ch}(C_1x+C_2)$, $C_1^2y-1=\operatorname{sen}(C_1x+C_2)$, $2y=(x+C)^2$, $y=0$. 2.28. $\ln y=C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$, $\ln\left|\frac{\ln y-C_1}{\ln y+C_2}\right|=2C_1x+C_2$, $(C-x)\ln y=1$, $y=C$. 2.29. $\operatorname{ctg}y=C_2+C_1x$. 2.30. $y=1+$

$+\dfrac{1}{C_1x+C_1}$. **2.31.** $y=\dfrac{1}{12}(x^3+6x^2)+C_1x\ln|x|+C_2x+C_3$. **2.32.** $y^2=\dfrac{x^3}{3}+C_1x+C_2$. **2.33.** $y=C_1x+\dfrac{C_2}{x}$. **2.34.** $y=C_2\Big(xe^{C_1x}-$
$-\dfrac{1}{C_1}e^{C_1x}\Big)+C_3$.

2.35. $y=C_2xe^{-C_1x}$. ● La ecuación es homogénea respecto a y, y', y''. **2.36.** $y=C_2e^{\frac{1}{3}(x^2+C_1)^{3/2}}$. **2.37.** $y^2=C_1x^3+C_2$. **2.38.** $y=$ $=\dfrac{C_2}{\cos^2(x+C_1)}$. **2.39.** $y=(x-2)e^x+x+3$. **2.40.** $y=-\dfrac{x}{2}\ln^2x+\dfrac{3}{2}x^2-$ $-2x+\dfrac{1}{2}$. **2.41.** $y=\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{2x}-\dfrac{16}{5}$. **2.42.** $y=2\ln|x+1|-x+1$. **2.43.** $y=-\ln|x-1|$. **2.44.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\right|=2(x+1)$. **2.45.** $y=$ $=\operatorname{tg}x$, $-\pi/2<x<\pi/2$. **2.46.** $y=e^{x^2/2}$. **2.47.** $(3-x)y^5=8(x+2)$. **2.48.** $y=1+\operatorname{sen}x$. **2.49.** $y=1-e^x$, $y=-1+e^{-x}$. **2.50.** $y=1-x$. **2.51.** $x=C_1e^p-2p-2p-2$, $y=C_1(p-1)e^p-p^2+C_2$. **2.52.** $x=$ $=\dfrac{\ln|t|}{2}+\dfrac{3}{4t^2}+C_1$, $y=\dfrac{t}{4}+\dfrac{3}{4t^3}+C_2$. **2.53.** $x=(p+1)e^p+C_1$, $y=$ $=p^2e^p+C_2$. **2.54.** $x=3C_1p^2+\ln|p|+C_2$, $y=2C_1p^3+p$; $y=C$. **2.55.** $y=\pm\ln\cos x$. **2.56.** a) $y=\dfrac{1}{C_1}\operatorname{ch}(C_1x+C_2)$ para $y''>0$; b) $(x+C_2)^2+y^2=C_1^2$ para $y''<0$. **2.57.** a) $4(C_1y-1)=C_1^2(x+C_2)^2$ para $y''>0$; b) $x=\dfrac{C_1}{2}(t-\operatorname{sen}t)+C_2$, $y=\dfrac{C_1}{2}(1-\cos t)$ para $y''<$ <0. ● $\displaystyle\int\sqrt{\frac{y}{C_1-y}}\,dy$ se calcula sustituyendo $y=C_1\operatorname{sen}^2\dfrac{t}{2}$. **2.58.** $y=$ $=\dfrac{H}{q}\operatorname{ch}\left(\dfrac{q}{H}x\right)$. **2.59.** $e^{y/a}=\dfrac{1}{\cos x/a}$, donde $a=\dfrac{k}{q}$. **2.60.** $v=$ $=\sqrt{\dfrac{P}{k}}\operatorname{th}\left(\dfrac{\sqrt{kp}}{m}t\right)$, $x=\dfrac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\left(\dfrac{\sqrt{kp}}{m}t\right)$. **2.61.** 1,89 s, 16,6 m/s. ● Empléense las respuestas al problema **2.60.** poniendo $P=mg$. **2.62.** El tiempo de subida es $T_s=\dfrac{1}{k}\sqrt{\dfrac{m}{g}}\operatorname{arctg}\dfrac{kv_0}{\sqrt{mg}}$; la altura de elevación es $h_{\text{máx}}=\dfrac{m}{2k^2}\ln\left(1+\dfrac{k^2v_0^2}{mg}\right)$; la velocidad de caída $V_c=v_0\sqrt{\dfrac{mg}{mg+k^2v_0^2}}$; el tiempo de caída es $T_c=\dfrac{1}{2k}\sqrt{\dfrac{m}{g}}\ln\times$ $\times\dfrac{\sqrt{mg}+kV_c}{\sqrt{mg}-kV_c}$. **2.63.** 1,75 s, 16,3 m/s. ● Empléense las respuestas al problema 2.62. **2.64.** $x=\sqrt{x_0^2+\frac{k}{mx_0^2}t^2}$. **2.65.** $x=\sqrt{x_0^2-\frac{k^2}{x_0^2}t^2}$, $T=\frac{x_0^2}{k}$. **2.66.** $x=-\frac{gt^2}{2}+u_0\int_0^t \ln\frac{\varphi(0)}{\varphi(t)}\,dt$; $x=-\frac{gt^2}{2}+$ $+\frac{u_0}{\alpha}((1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t)$, $x(10)=0{,}54$ km, $x(30)=5{,}65$ km, $x(50)=18{,}44$ km. **2.67.** $\sqrt{\frac{H}{2gR^2}}\left(\sqrt{R(H-R)}+\frac{H}{2}\times\right.$ $\left.\times\arcsen\left(1-\frac{2R}{H}\right)+\frac{H}{4}\right)$. **2.68.** ≈ 116 h. ● Empléese la respuesta al problema 2.67. **2.69.** $\approx 11{,}18$ km/s. **2.70.** $y=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{1+k}\times\right.$ $\left.\times\left(\frac{x}{a}\right)^{1+k}-\frac{1}{1-k}\left(\frac{x}{a}\right)^{1-k}\right)+\frac{ka}{1-k^2}$, donde $k=\frac{v}{u}<1$. **2.71.** $EIy=\frac{q}{4}\left(\frac{l^2x^2}{4}-\frac{x^4}{6}-\frac{5l^4}{96}\right)$, $EIy_{\text{máx}}=-\frac{5l^4q}{384}$. ● $EIy''=$ $=\frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right)$, donde E es el módulo de elasticidad (módulo de Younge), I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje Ox **2.72.** $EIy=\left(\frac{Pl^2}{2}+\frac{ql^3}{6}\right)x-\frac{Px^3}{6}-$ $-\frac{qx^4}{24}-\frac{Pl^3}{3}-\frac{ql^4}{8}$, $EIy_{\text{máx}}=-\frac{Pl^3}{3}-\frac{ql^4}{8}$. ● $EIy''=-Px-$ $-\frac{qx^2}{2}$, donde E es el módulo de elasticidad (módulo de Younge), I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje Ox. **2.73.** $P=\frac{3}{8}ql$. ● $EIy''=P(l-x)-\frac{q(l-x)^2}{2}$, $EIy=\frac{P(l-x)^3}{6}-\frac{q(l-x)^4}{24}+\left(\frac{Pl^2}{2}-\frac{ql^3}{6}\right)x-\frac{Pl^3}{6}+\frac{ql^4}{24}$, donde E es el módulo de la elasticidad (módulo de Younge), I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje Ox. **2.75.** $y=C_1e^{5x}+C_2e^x$. **2.76.** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$. **2.77.** $y=$ $=C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. **2.78.** $y=C_1\left(\frac{1}{2}x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-1\right)+C_2x$. **2.79.** $y=C_1x+\frac{C_2}{x}+\frac{C_3}{x}$. **2.80.** Linealmente independiente. **2.81.** Linealmente dependiente. **2.82.** Linealmente independiente. **2.83.** Linealmente dependiente. **2.84.** Linealmente independiente. **2.85.** Linealmente independiente. **2.86.** Linealmente independiente. **2.87.** Linealmente independiente. **2.88.** Linealmente dependiente. **2.89.** Linealmente independiente. **2.90.** $y''+y'=0$. **2.91.** $y''-$ $-4y'+5y=0$. **2.92.** $x^2y''-6xy'+12y=0$. **2.93.** $y'''-y''=0$. **2.94.** $y'''+y'=0$. **2.95.** $y'''-y''=0$. **2.96.** $y''-8y'+15y=0$.

2.97. $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$. **2.98.** ◀ De la igualdad $W(x_0) = 0$ se deduce que el sistema homogéneo de ecuaciones algebraicas lineales con incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0, \\ &\alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

tiene tal solución $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ que no todos α_n^* son iguales a cero. La función $y(x) = \alpha_1^* y_1(x) + \alpha_2^* y_2(x) + \ldots + \alpha_n^* y_n(x)$ es la solución de la ecuación homogénea lineal dada y, como se deduce de las igualdades (*), satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Pero a las mismas condiciones iniciales las satisface también la función $y \equiv 0$, que es también la solución de la ecuación dada (la función $y \equiv 0$ es la solución de cualquier ecuación diferencial homogénea lineal). De aquí, basándose en el teorema de Cauchy sobre la existencia y unicidad de la solución, concluimos que $\alpha_1^* y_1(x) + \ldots + \alpha_n^* y_n(x) \equiv 0$ en (a, b), es decir, el sistema de las funciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ es linealmente dependiente en (a, b). Pero, entonces, el wronskiano $W(x)$ de este sistema es igual a cero en todos los puntos de (a, b), lo que se requería demostrar. ▶

2.99. $\begin{vmatrix} y & y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y' & y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0$. ● Cualquier solución y de la ecuación buscada junto con las funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ forma un sistema linealmente dependiente. **2.100.** $y = e^x + 2\cos x + 3\,\mathrm{sen}\, x$. **2.101.** $y = e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x}$. **2.102.** $y = C_1x^3 + C_2x^4 + \frac{1}{2}x$. **2.103.** $y = C_1e^{2x} + C_2\,\mathrm{sen}\, x + C_3\cos x + e^{3x}$. **2.104.** $y = C_1e^x + C_2x - x^2 - 1$. **2.105.** $y = C_1\cos x + C_2x\cos x - \mathrm{sen}\, x\cos x$. **2.106.** $y = C_1e^{5x} + C_2e^x + 5x + 6 - e^{2x}$. **2.107.** $y = C_1 + C_2\,\mathrm{sen}\, x + C_3\cos x + \frac{1}{2}e^x - \mathrm{sen}\, 2x$. **2.108.** $y = e^{kx}(1 + (1-k)x)$. **2.109.** $y'' - y' - 6y = 0$, $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$. **2.110.** $y'' - 2y' + y = 0$, $y = (C_1 + C_2x)e^x$. **2.111.** $y'' - 6y' + 13y = 0$, $y = (C_1\cos 2x + C_2\,\mathrm{sen}\, 2x)e^{3x}$. **2.112.** $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$, $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{2x}$. **2.113.** $y''' - 8y'' + 16y' = 0$, $y = C_1 + (C_2 + C_3x)e^{4x}$. **2.115.** $y = C_1e^{(1+\sqrt{3})x} + C_2e^{(1-\sqrt{3})x}$. **2.116.** $y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\,\mathrm{sen}\, 2x)$. **2.117.** $y = e^{3x}(C_1 + C_2x)$. **2.118.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-\frac{4}{3}x}$. **2.119.** $y = e^x\left(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}\right)$. **2.120.** $y = e^{-x/2}(C_1 + C_2x)$. **2.121.** $y = C_1e^x + e^{2x}(C_2\cos 3x + C_3\,\mathrm{sen}\, 3x)$. **2.122.** $y = C_1\cos x + C_2\,\mathrm{sen}\, x + C_3\cos\sqrt{3}x + C_4\,\mathrm{sen}\sqrt{3}x$. **2.123.** $y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)e^{-x}$. **2.124.** $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x}$. **2.125.** $y = C_1\cos x + C_2\,\mathrm{sen}\, x + x(C_3\cos x + C_4\,\mathrm{sen}\, x)$. **2.126.** $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + (C_3 + C_4x)e^{-2x}$. **2.127.** $y = C_1 +$

$+ C_2 \cos 2x + C_3 \operatorname{sen} 2x + x (C_4 \cos 2x + C_5 \operatorname{sen} 2x)$. **2.128.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{3x} (C_4 + C_5 x)$. **2.129.** $y = (C_1 + C_2 x) e^x + (C_3 + C_4 x) \cos x + (C_5 + C_6 x) \operatorname{sen} x$. **2.130.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + e^{-x} (C_5 + C_6 x)$. **2.131.** $y = e^x$. **2.132.** $y = (7 - 3x) e^{x-2}$. **2.133.** $y = 2 + e^{-x}$. **2.134.** $y = \operatorname{sh} x$. Las condiciones iniciales son: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2.135. $y = \frac{5}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{3x}$. **2.136.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln (e^x + 1)$. **2.137.** $y = (C_1 - \ln |\operatorname{sen} x|) \cos 2x + \left(C_2 - x - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x \right) \operatorname{sen} 2x$. **2.138.** $y = \left(C_1 + C_2 x + \sqrt{4 - x^2} + x \arcsin \frac{x}{2} \right) e^x$.

2.139. $y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{3}{4} x^2 \right) e^{-2x}$. **2.140.** $(Ax^3 + Bx^2) e^{4x}$.

2.141. $x (A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x)$. **2.142.** $Ax + B \cos 8x + C \operatorname{sen} 8x$. **2.143.** $(Ax + B) \operatorname{sen} 2x + (Cx + D) \cos 2x$. **2.144.** $(Ax^2 + Bx) e^{4x}$. **2.145.** $Ax^3 + Bx^2 + Cx$. **2.146.** $e^x ((Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \times \times \operatorname{sen} 2x)$. **2.147.** $xe^{2x} ((Ax^2 + Bx + C) \cos 3x + (Dx^2 + Ex + F) \times \times \operatorname{sen} 3x)$.

2.148. $y = C_1 e^x + \left(C_2 - \frac{x}{2} \right) e^{-x}$. **2.149.** $y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x + \frac{x \operatorname{sh} x}{2}$. **2.150.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{x}{5} e^{-4x} - \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36} \right) e^{-x}$.

2.151. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6} (5 \cos 3x - \operatorname{sen} 3x)$. **2.152.** $y = (C_1 + C_2 x) e^{mx} + \frac{(m^2 - n^2) \operatorname{sen} nx + 2mn \cos nx}{(m^2 + n^2)^2}$. **2.153.** $y = (C_1 + C_2 x) \times \times e^{mx} + \frac{1}{2m^2} \cos mx$.

2.154. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x (x \operatorname{sen} x + \cos x)$. **2.155.** $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8} (1 + x \operatorname{sen} 2x)$. **2.156.** $y = C_1 e^{x/2} + C_2 e^{-x/2} - x^3$ **2.157.** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{-x} + xe^{-2x}$. **2.158.** $y = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{x}{5} e^{3x} + 2x + 3x^2$. **2.159.** $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + x) e^{-x} + x^3 - 3x^2$.

2.160. $y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \frac{x^3}{6} \right) e^x$. **2.161.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x + \frac{x^2}{12} (x^2 + 2x - 12)$. **2.162.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x + \frac{x}{8} (x - 3) e^x - \frac{x}{4} \operatorname{sen} x$. **2.163.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + \frac{x^4}{24} + \left(\frac{x^2}{2} - 4x + C_5 \right) e^x$.

2.164. $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$. 2.165. $y = e^x - e^{-x} + x^2$. 2.166. $y = \frac{x}{4} + \cos 2x + \frac{7}{16}\pi \operatorname{sen} 2x$. 2.167. $y = 2\cos x - 5 \operatorname{sen} x + 2e^x$. 2.168. $y = 2xe^x$. 2.169. $y = \cos x + 2 \operatorname{sen} x + e^{-x} - 3e^x + 2xe^x$. 2.170. $y = e^x((2x - \pi - 1) \operatorname{sen} x - \pi \cos x)$. 2.171. $y = C_1 \times \cos \ln |x| + C_2 \operatorname{sen} \ln |x|$. 2.172. $y = C_1 \cos(2 \ln |x|) + C_2 \times \operatorname{sen}(2 \ln |x|) + 2x$. 2.173. $y = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2 \ln x + \frac{1}{3}$. 2.174. $y = C_1 + C_2 x^2 + C_3 x^4$. 2.175. $y = C_1 + C_2 \ln |x| + C_3 x^3$. 2.176. $y = (2x + 1)(C_1 + C_2 \ln |2x + 1|)$.

2.177. $y = \frac{1}{\operatorname{sh} 2\pi} \cdot \operatorname{sh} x$. 2.178. $y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}$. 2.179. $y = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} 1} \times$ $\times$(solución única). 2.180. No hay soluciones. 2.181. $(x-2)^2 + y^2 = 5$. 2.182. $y = 1 - \operatorname{sen} x - \cos x$. 2.183. $y = \sqrt{\frac{e - e^{-x}}{e - 1}}$. 2.184. $y = \frac{x}{2} - x^2 + x^2 \ln x$. 2.185. $x = e^{-ht}\left(a \cos \beta t + \frac{ah + v_0}{\beta} \operatorname{sen} \beta t\right)$ donde $\beta = \sqrt{k^2 - h^2}$. ● La ecuación tiene la forma $\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2 x = 0$. 2.186. $x = e^{-\alpha t}\left(a \operatorname{ch} \beta t + \frac{\alpha a + v_0}{\beta} \operatorname{sh} \beta t\right)$, donde $\alpha = \frac{\lambda}{2m}$, $\beta = \sqrt{\alpha^2 + \frac{k}{m}}$. ● La ecuación tiene la forma de $m \times \frac{d^2x}{dt^2} = kx - \lambda \frac{dx}{dt}$. 2.187. a) $r = a \operatorname{ch} \omega t$; b) $r = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t$. ● La ecuación tiene la forma $\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r$. 2.188. $r = ae^{-\mu\omega t} \times \left(\operatorname{ch} \omega \sqrt{1+\mu^2} t + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \operatorname{sh} \omega \sqrt{1+\mu^2} t\right)$. 2.189. $T = \frac{3}{\sqrt{g}} \times \ln(9 + \sqrt{80}) \approx 3$ s. ● La ecuación tiene la forma de $\frac{d^2s}{dt^2} - \frac{g}{9} s = \frac{g}{9}$, donde s es el camino recorrido durante el tiempo t por el extremo de la parte de la cadena que desciende. 2.190. $x = \frac{2g \operatorname{sen} 30t - 60\sqrt{g} \operatorname{sen} \sqrt{g} t}{g - 900}$ (cm). ● Si x se calcula a partir del estado de reposo de la carga, entonces $4\frac{d^2x}{dt^2} = 4g - k(x_0 + x - y - e)$, donde x_0 es la distancia del punto de reposo de la carga desde el punto inicial de suspensión del resorte, l es la longitud del resorte en estado de reposo, por esto $k(x_0 - 1) = 4g$ y, por consiguiente, $4\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - y)$, donde $k = 4g$, $g =$

-981 cm/s². 2.191. $i=e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{E}{\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2+R^2}\left(\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)\times\right.$
$\times\cos\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,t-\frac{R}{2}\left(\omega+\frac{1}{LC\omega}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}$ sen $\times$
$\times\left.\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,t\right)+\frac{E}{\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2+R^2}\left(\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)\cos\times\right.$
$\left.\times\,\omega t+R\,\mathrm{sen}\,\omega t\right)$. La ecuación diferencial del circuito es: $L\frac{d^2i}{dt^2}+$
$+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{de}{dt}$. 2.192. $i=\frac{E}{2L}t\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{LC}}t$. ◀ Tenemos
$\frac{de}{dt}=E\omega\cos\omega t$. La ecuación diferencial del circuito es: $L\frac{d^2i}{dt^2}+$
$+\frac{1}{C}i=E\omega\cos\omega t$. La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es: $i_0=C_1\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t+C_2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{LC}t$. La solución particular de la ecuación no homogénea lineal tiene la forma de $\tilde{i}=t\,(A\cos\omega t+B\,\mathrm{sen}\,\omega t)$. Entonces $\frac{d\tilde{i}}{dt}=t\,(-A\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t+$
$+B\omega\cos\omega t)+A\cos\omega t+B\,\mathrm{sen}\,\omega t$, $\frac{d^2\tilde{i}}{dt^2}=t\,(-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\times$
$\times\,\mathrm{sen}\,\omega t)+(-2A\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t+2B\omega\cos\omega t)$. Sustituyendo en la ecuación la expresión $\tilde{i}$ y $\frac{d^2\tilde{i}}{dt^2}$ y considerando que $L\omega^2-\frac{1}{C}=0$, obtendremos la identidad $L\,(-2A\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t+2B\omega\cos\omega t)\equiv E\omega\cos\omega t$, de donde $A=0$, $B=\frac{E}{2L}$. Por consiguiente, $\tilde{i}=\frac{E}{2L}t\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{\sqrt{LC}}$. La solución general: $i=C_1\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t+C_2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{LC}}t+\frac{E}{2L}t\,\mathrm{sen}\times$
$\times\frac{1}{\sqrt{LC}}t$. Calculando $\frac{di}{dt}=-\frac{C_1}{\sqrt{LC}}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{LC}}t+\frac{C_2}{\sqrt{LC}}\cos\times$
$\times\frac{1}{\sqrt{LC}}t+\frac{E}{2L\sqrt{LC}}t\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t+\frac{E}{2L}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{LC}}t$ y empleando las condiciones iniciales, obtendremos $C_1=C_2=0$. La solución particular buscada es: $i=\frac{E}{2L}t\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{LC}}t$. ▶ 2.193. $i=$
$-\frac{E}{2\omega L}\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\omega t+\frac{E}{2L}t\cos(\omega t+\psi)$.

3.1. $x^2+y^2-z^2-2z(y-xy')$, $x+yy'-zz'-z'(y-xy')$.
3.2. $yy'+zz'=0$, $y^2+2xzz'=x^2z'^2$. 3.3. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{u}=\frac{du}{xyz-z^3}$.
3.4. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{u}=\frac{du}{v}=\frac{dv}{w}=\frac{dw}{y^2}$. 3.5. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=\frac{du}{t}=$
$=\frac{dv}{v+w}=\frac{dw}{w+t}=\frac{dt}{t+v}$. 3.6. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{du}=\frac{du}{2y-z}=\frac{dv}{w}=$
$=\frac{dw}{x+y-1}$. 3.7. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{t}=\frac{dz}{x^2-uz}=\frac{dt}{z+u}=\frac{du}{v}=\frac{dv}{w}=$
$=\frac{dw}{-xy}$. 3.13. $C_1x^2=2t+C_2$, $y^2=C_1(2t+C_2)$. 3.14. $x^2=t^2+C_1$,
$y^2=t^2+C_2$. 3.15. $y^2=\frac{(C_1+C_2-x)^2}{2(C_2-x)}$, $z^2=\frac{(C_1-C_2+x)^2}{2(C_2-x)}$.
3.16. $x=\ln|C_3(C_1t+C_2)|$, $y=\ln|C_3(C_1t+C_2)|-C_1$, $z=$
$=(C_1+1)t+C_2$. 3.17. $x^2+y^2+z^2=C_1y$, $z=C_2y$. 3.18. $x=C_1t$,
$y=C_2e^t+\frac{2}{C_1}$. 3.19. $z-2y=C_1$, $2\sqrt{z-x-y}+y=C_2$. 3.20. $x^2=$
$=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}$, $y^2=C_1e^{2t}-C_2e^{-2t}$. 3.21. $y=x+\frac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x}$,
$z=C_2e^{C_1x}$; $y=x-e^x$, $z=e^{-x}$. 3.22. $z=C_1y$, $y^3=\frac{3x^2}{2C_1}+C_2$; $z=y$,
$y^3=\frac{3}{2}x^2+1$. 3.23. a) Sí; b) no. ● La relación $\varphi(t, x, y)=C$ es la primera integral del sistema $x'_t=f_1(t, x, y)$, $y'_t=f_2(t, x, y)$, cuando y sólo cuando $\frac{\partial\varphi}{\partial t}+f_1(t, x, y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+f_2(t, x, y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$.
3.24. $2e^{z-y}=x^2+(y-1)^2$. 3.25. $2y^3+3y(x^2-1)-8=0$. 3.26. $y=$
$=x(1+\ln\sqrt{|x|})$. 3.27. $(y-x)^2+x^2=1$. 3.28. $y=C_1x^{1+\sqrt{2}}+$
$+C_2x^{1-\sqrt{2}}$, $z=x^{\sqrt{2}-1}C_1(2+\sqrt{2})+x^{-\sqrt{2}-1}C_2(2-\sqrt{2})$.
3.29. $y=C_1+C_2x$, $z=2C_2+\frac{C_1}{x}$. 3.30. $x=C_1t+\frac{C_2}{t}$, $y=-C_1t+$
$+\frac{C_2}{t}$. 3.31. $x=\frac{C_2}{t^2}$, $y=C_1e^t-\frac{C_2}{t^2}$. 3.32. $x=C_1e^t+C_2e^{2t}$, $y=$
$=C_1e^t+2C_2e^{2t}$. 3.33. $x=3C_1e^{2t}+C_2e^{4t}$, $y=C_1e^{2t}+C_2e^{4t}$; $x=3e^{2t}$,
$y=e^{2t}$. 3.34. $x=e^{5t}(C_1\cos 2t+C_2\operatorname{sen} 2t)$, $y=e^{5t}((C_1-C_2)\operatorname{sen} 2t-$
$-(C_1+C_2)\cos 2t)$; $x=e^{5t}(\cos 2t-\operatorname{sen} 2t)$, $y=2e^{5t}\operatorname{sen} 2t$. 3.35. $x=$
$=e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\operatorname{sen} 3t)$, $y=\frac{1}{5}e^{-2t}((4C_1-3C_2)\cos 3t+(3C_1+$
$+4C_2)\operatorname{sen} 3t)$. 3.36. $x=(2C_1t+2C_2+1)e^{-t}$, $y=(C_1t+C_2)e^{-t}$.
3.37. $x=(C_1t+C_2)e^{-3t}$, $y=\left(-C_1t+\frac{C_1}{2}-C_2\right)e^{-3t}$; $x=2te^{-3t}$,

$y=(1-2t)e^{-3t}$. 3.38. $x=C_1e^t+e^{-t/2}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, $y=C_1e^t+\frac{1}{2}e^{-t/2}\left((C_3\sqrt{3}-C_2)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-(C_2\sqrt{3}+C_3)\,\mathrm{sen}\times\right.$ $\left.\times\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, $z=C_1e^t+\frac{1}{2}e^{-t/2}\left((C_2\sqrt{3}-C_3)\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}t-(C_3\sqrt{3}+\right.$ $\left.+C_2)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$; $x=y=z=e^t$. 3.39. $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$, $y=$ $=C_1e^{2t}+C_3e^{-t}$, $z=C_1e^{2t}-(C_2+C_3)e^{-t}$; $x=e^{2t}+e^{-t}$, $y=e^{2t}+e^{-t}$, $z=e^{2t}-2e^{-t}$. 3.40. $x=C_1+3C_2e^{2t}$, $y=-2C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$, $z=C_1+$ $+C_2e^{2t}-2C_3e^{-t}$. 3.41. $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}$, $y=C_1e^t+2C_3e^{3t}$, $z=2C_1e^t+C_2e^{2t}+2C_3e^{3t}$. 3.42. $x=2C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-\frac{2}{3}t-\frac{5}{18}$, $y=C_1e^{2t}+3C_2e^{-3t}-\frac{t}{2}-\frac{1}{12}$. 3.43. $x=(C_1\cos t+C_2\,\mathrm{sen}\,t-1)e^t$, $y=(C_1\,\mathrm{sen}\,t-C_2\cos t)e^t$. 3.44. $x=\left(C_1+C_2t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2}-3e^t\right)e^{2t}$, $y=\left(C_1-\frac{C_2}{3}+C_2t+\frac{t^3}{2}-2e^t\right)e^{2t}$. 3.45. $x=C_1\cos t+C_2\,\mathrm{sen}\,t-$ $-t\cos t$, $y=(C_2-C_1)\cos t-(C_1+C_2)\,\mathrm{sen}\,t+t(\cos t+\mathrm{sen}\,t)$. 3.46. $x=C_1\cos t+C_2\,\mathrm{sen}\,t+\mathrm{tg}\,t$, $y=-C_1\,\mathrm{sen}\,t+C_2\cos t+2$. 3.47. $x=3(C_1e^{2t}+C_2e^{-2t})+C_3\cos 2t+C_4\,\mathrm{sen}\,2t$, $y=2(C_1e^{2t}+$ $+C_2e^{-2t})-2(C_3\cos 2t+C_4\,\mathrm{sen}\,2t)$. ● Búsquese la solución del sistema en forma de $x=Ae^{kt}$, $y=Be^{kt}$. 3.48. $x=a(1-2^{-t})/4$, $y=$ $=3a(1-2^{-t})/4$. ● El sistema de ecuaciones diferenciales es: $\dot{x}=k_1(a-x-y)$, $\dot{y}=k_2(a-x-y)$. 3.49. $x=a\cos\frac{k}{\sqrt{m}}t$, $y=$ $=\frac{v_0\sqrt{m}}{k}\,\mathrm{sen}\,\frac{k}{\sqrt{m}}t$; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{mv_0^2}=1$. ● La ecuación diferencial del movimiento es $m\ddot{x}=-k^2x$, $m\ddot{y}=-k^2y$.

4.1. Inestable. 4.2. Estable. 4.3. Inestable. 4.4. Asintóticamente estable. 4.5. Asintóticamente estable si, $\alpha<-1/2$; estable, si $\alpha=$ $=-1/2$ e inestable para $\alpha>-1/2$. 4.6. $\dot{z}_i=-\dot{\varphi}_i+f_i(t,\ z_1+$ $+\varphi_1(t),\ \ldots,\ z_n+\varphi_n(t))=F_i(t,\ z_1,\ \ldots,\ z_n)$ $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. ● Transfórmese el sistema (1) para nuevos variables, poniendo $z_i=$ $=x_i-\varphi_i$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. 4.7. El punto de reposo $x_i=0$ ($i=$ $=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) del sistema de ecuaciones diferenciales es estable, si para cualquier $\varepsilon>0$ se encuentra $\delta(\varepsilon)>0$ tal que de la desigualdad $\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t_0)<\delta^2(\varepsilon)$ se deduce $\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t)<\varepsilon$ para todos los $t\geqslant t_0$. Si, además, se cumple la relación $\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t)=0$, entonces el punto de reposo del sistema es asintóticamente estable. El punto de reposo es inestable, si existen $\varepsilon > 0$ y el número t tales, que para todo $\delta > 0$ de la desigualdad $| x_i (t_0) | < \delta$ se deduce $| x_i (t) | > \varepsilon$ para cierto $t > t_0$. **4.9.** Foco inestable. **4.10.** Ensilladura. **4.11.** Foco inestable. **4.12.** Nudo estable. **4.13.** Nudo estable. **4.14.** Nudo estable. **4.15.** Para ningún α. **4.16.** $| \alpha | \geqslant 2$. **4.17.** $\alpha < 0$, $| \alpha | \geqslant | \beta |$ es el caso de un «rozamiento negativo» grande, el punto de reposo es un nudo inestable; $\alpha < 0$, $| \alpha | < | \beta |$ es el caso de un «rozamiento negativo», el punto de reposo es un foco inestable; $\alpha = 0$, el punto de reposo es estable, centro; $\alpha > 0$, $| \alpha | < | \beta |$, el punto de reposo es un foco estable; $\alpha > 0$, $| \alpha | \geqslant | \beta |$, la resistencia del medio es grande, el punto de reposo es un nudo estable. ● Sustitúyase la ecuación por el sistema normal equivalente $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -2\alpha y - \beta^2 x$. **4.18.** Empléese la notación de la solución particular del sistema homogéneo para diferentes valores de la raíz característica. **4.19.** Inestable. **4.20.** Estable. **4.21.** $V = x^2 + y^2$; estable. **4.22.** $V = x^2 + y^2$; inestable. **4.23.** $V = x^4 + y^4$; estable. **4.24.** $V = x^2 + y^2$; inestable. **4.25.** $V = 2x^2 + y^2$; estable. **4.26.** $V = y^2 - \frac{1}{2} x^4$; inestable. **4.27.** Estable. **4.28.** Inestable. **4.29.** Inestable. **4.30.** Estable. **4.31.** Estable. **4.32.** Inestable. **4.33.** $V = 3x^2 + 4y^2$; asintóticamente estable.

5.1[1]). $y (1) = 1{,}3280$. **5.2.** $y (0{,}6) = 4{,}4828$. **5.3.** $y (0{,}3) = 0{,}0451$. **5.4.** $y (2) = -0{,}8407$. **5.5.** $y (1) = 0{,}7899$. **5.6.** $y (1) = 0{,}3305$. **5.7.** $y (1) = 0{,}3635$. **5.8.** $y (2) = 3{,}4547$. **5.9.** $y (1) = 3{,}7190$. **5.10.** $y (2) = 2{,}3683$. **5.11.** $y (0{,}1) = 0{,}1057$. **5.12.** $y (0{,}5) = 0{,}0461$. **5.13.** $y (2) = 4{,}2489$. **5.14.** $y (0{,}4) = 0{,}4647$. **5.15.** $y (0{,}1) = 0{,}1098$. **5.16.** $y (0{,}5) = 0{,}6842$. **5.17.** $y (1) = 0{,}4388$. **5.18.** $y (1) = 0{,}3679$. **5.19.** $y (2) = 0{,}7895$.

5.20.

```
      SUBROUTINE EULER (F, X0, Y0, H, N, Y)
      DIMENSION Y(N)
      H3 = H**3
      X = X0 - H
      U = Y0
      K = 0
    3 X = X + H
      FUNC = F (X, Y)
      Y1 = U + H*FUNC
    1 Y2 = U + (FUNC + F (X, Y1))* H/2.
      IF (ABS (Y2—Y1).LT.H3) GO TO 2
      Y1 = Y2
      GO TO 1
    2 K = K + 1
      Y (K) = Y2
```

[1]) En las respuestas a los problemas 5.1—5.19, así como a 5.26—5.31 se dan los valores de la solución buscada en el extremo del segmento dado.

```
      U = Y2
      IF (K.LT.N) GO TO 3
      RETURN
      END
```

5.21.

```
      SUBROUTINE RK (F, X0, Y0, H, N, Y, EPS)
      DIMENSION Y (N)
      M = 1
      DO 1 I = 1, N
    1 Y (I) = 0
    2 X = X0
      U = Y0
      DO 4 j = 1, N
      DO 3 K = 1, M
      Q1 = F (X, U)* H
      Q2 = F (X + H/2., U + Q1/2.) * H
      Q3 = F (X + H/2., U + Q2/2.) * H
      Q4 = F (X + H, U + Q3) * H
      DY = (Q1 + 2 * Q2 + 2 * Q3 + Q4)/6.
      U = U + DY
    3 X = X + H
      A = ABS ((U - Y (J))/15.)
      Y (J) = U
      IF (A.GT.EPS) KIND = 1
    4 CONTINUE
      IF (KIND.EQ.1) GO TO 5
      RETURN
    5 H = H/2.
      M = M*2.
      KIND = 0
      GO TO 2
      END
```

5.22.

```
      SUBROUTINE MILN (F, X0, H, N, Y, EPS)
      DIMENSION
      NI = N - 4
      EPS = 0.
      X = X0
      F1 = F (X + H, Y (2))
      F2 = F (X + 2.*H, Y (3))
      F3 = F (X + 3.*H, Y (4))
      DO 1 K = 1, NI
      YW = Y (K) + (2. F1 - F2 + 2.*F3) * 4*H/3.
```

```
      Y (K + 4) = Y (K + 2) + (F2 + 4.*F3 + F (X + 4.*H, YW))*
     *H/3.
      A = ABS (YW - Y (K + 4))/29.
      EPS = AMAX1 (A, EPS)
      F1 = F2
      F2 = F3
      F3 = F (K + 4)
    1 X = X + H
      RETURN
      END
```

5.23. En la tarea para la calculadora entran tres unidades de programa:

a) subprograma

```
      SUBROUTINE EULER (F, X0, Y0, H, N, Y)
```

b) subprograma-función (para el problema 5.12)

```
      FUNCTION F (X, Y)
      F = 2.*X*Y + X*X
      RETURN
      END
```

c) programa principal

```
      EXTERNAL F
      DIMENSION Y (20), A (40)
      CALL EULER (F, 0., 0., 0.025, 20, Y)
      CALL EULER (F, 0., 0., 0.0125, 40, A)
      B = 0
      DO 1 K = 1,20
      C = ABS (Y (K) - A (2*K - 1))/7.
    1 B = AMAX1 (B, C)
      WRITE (3,2) A,B
    2 FORMAT (5 (1H, 8F12.6), 'ERROR = ', F10.8)
      STOP
      END
```

5.24. Tarea para la calculadora para el problema 5.18:

a) subprograma

```
      SUBROUTINE RK (F, X0, Y0, H, N, Y, EPS)
```

b) subprograma-función

```
      FUNCTION F (X, Y)
      F = Y*Y*EXP (X) - 2.*Y
      RETURN
      END
```

c) programa principal

```
      EXTERNAL F
      DIMENSION Y (10)
```

```
      CALL RK (F, 0., 1., 0.1, 10, Y, 1E-4)
      WRITE (3,1) Y
    1 FORMAT (1H, 5F15.6)
      STOP
      END
```

5.25. Tarea para la calculadora para el problema 5.19:

a) subprograma

```
      SUBROUTINE MILN (F, X0, H, N, Y, EPS)
```

b) subprograma-función

```
      FUNCTION F (X, Y)
      F = 1./(Y*Y + X)
      RETURN
      END
```

c) programa principal

```
      EXTERNAL F
      DIMENSION Y (21)
      DATA Y (1)/0.63212/,Y(2)/0.652562/,Y(3)/0.677129/,Y(4)/0.705863/
      CALL MILN (F, 1., 0.05, 21, Y, EPS)
      WRITE (3, 1) Y, EPS
    1 FORMAT (3 (1H, 7F12.6)/', ERROR = ', F8.6)
      STOP
      END
```

5.26. $y(2) = 0{,}25$, $z(2) = 0{,}375$. 5.27. $y(1) = 1{,}261$, $z(1) = 2{,}346$. 5.28. $y(0{,}3) = 1{,}505$, $z(0{,}3) = 0{,}577$. 5.29. $y(0{,}3) = 0{,}638$, $z(0{,}3) = 1{,}568$. 5.30. $y(1) = 1{,}359$. 5.31. $y(2) = -1{,}833$.

5.32.

```
      SUBROUTINE RKD (F, F1, X0, Y0, Z0, H, N, Y, Z, EPS)
      DIMENSION Y (N), Z (N)
      M = 1
      DO 1 I = 1, N
      Y (I) = 0.
    1 Z (I) = 0.
    2 X = X0
      U = Y0
      V = Z0
      DO 4 J = 1,N
      DO 3 K = 1,M
      Q1Y = F (X, U, V)*H
      Q1Z = F1 (X, U, V)*H
      Q2Y = F (X + H/2., U + Q1Y/2., V + Q1Z/2.)*H
      Q2Z = F1 (X + H/2., U + Q1Y/2., V + Q1Z/2.)*H
      Q3Y = F (X + H/2., U + Q2Y/2., V + Q2Z/2.)*H
```

```
      Q3Z = FI (X + H/2., U + Q2Y/2., V + Q2Z/2.)*H
      Q4Y = F (X + H, U + Q3Y, V + Q3Z)*H
      Q4Z = FI (X + H, U + Q3Y, V + Q3Z)*H
      DY = (Q1Y + 2*Q2Y + 2*Q3Y + Q4Y)/6.
      DZ = (Q1Z + 2*Q2Z + 2*Q3Z + Q4Z)/6.
      U = U + DY
      V = V + DZ
    3 X = X + H
      A = ABS ((U - Y (J))/15.)
      B = ABS ((V - Z (J))/15.)
      Y (J) = U
      Z (J) = V
      IF (A.GT.EPS.OR.B.GT.EPS) KIND = 1
    4 CONTINUE
      IF (KIND.EQ.1) GO TO 5
      RETURN
    5 H = H/2.
      M = M*2
      KIND = 0
      GO TO 2
      END
```

5.33. Tarea para la calculadora, para el problema 5.29:

a) subprograma

```
      SUBROUTINE  RKD (F, FI, X0, Y0, Z0, H, N, Y, Z, EPS)
```

b) subprograma-función

```
      FUNCTION  F (X, Y, Z)
      F = EXP (-1.*(Y**2 + Z**2)) + 2.*X
      RETURN
      END
```

c) subprograma-función

```
      FUNCTION FI (X, Y, Z)
      FI = 2.*Y**2 + Z
      RETURN
      END
```

d) programa principal

```
      EXTERNAL  F, FI
      DIMENSION  (Y20), Z (20)
      CALL  RKD (F, FI, 0., 0.5, 1., 0.1, 20, Y, Z, 1E - 4)
      WRITE  (3,1) Y, Z
    1 FORMAT  (1H, 10F10.4)
      STOP
      END
```

5.34. $y_1 = 2{,}953$, $y_2 = 4{,}375$, $y_3 = 6{,}359$. **5.35.** $y_1 = 1{,}926$, $y_2 = 2{,}593$, $y_3 = 3{,}333$, $y_4 = 4{,}148$, $y_5 = 5{,}037$, $y_6 = 6$. **5.36.** $y_1 = 0{,}874$, $y_2 = 0{,}743$, $y_3 = 0{,}611$, $y_4 = 0{,}482$, $y_5 = 0{,}362$, $y_6 = 0{,}253$, $y_7 = 0{,}161$, $y_8 = 0{,}087$, $y_9 = 0{,}033$ **5.37.** $y_1 = 2{,}019$, $y_2 = 3{,}956$, $y_3 = 5{,}720$, $y_4 = 7{,}212$, $y_5 = 8{,}316$, $y_6 = 8{,}908$, $y_7 = 8{,}855$, $y_8 = 8{,}044$, $y_9 = 6{,}413$, $y_{10} = 3{,}998$. **5.38.** $y_1 = 1{,}17$, $y_2 = 1{,}31$, $y_3 = 1{,}42$, $y_4 = 1{,}50$, $y_5 = 1{,}64$, $y_6 = 1{,}66$, $y_7 = 1{,}63$, $y_8 = 1{,}58$, $y_9 = 1{,}49$. **5.39.** $y_0 = 2$, $y_1 = 2{,}273$, $y_2 = 2{,}674$, $y_3 = 3{,}185$, $y_4 = 3{,}796$.

5.40. Tarea para la calculadora para el problema 5.38:

a) subprograma

```
      SUBROUTINE EXCLUS (A, B, N)
```

b) programa principal

```
      DIMENSION A (11, 11), B (11)
      READ (1, 1) A, B
    1 FORMAT (9F8.4)
      CALL EXCLUS (A, B, 11)
      WRITE (3, 2) B
    2 FORMAT (", 9F8.3)
      STOP
      END
```

CAPÍTULO 10

ANALISIS VECTORIAL

§ 1. Campos escalares y vectoriales. Gradiente

1. Características geométricas de los campos escalares y vectoriales. Sea D un dominio en el espacio de dos, tres o n dimensiones. Se dice que en el dominio D está definido *el campo escalar*, si en D está dada la función escalar del punto $u(P) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u(\boldsymbol{r})$ que se llama función del campo ($\boldsymbol{r}$ es el radio vector del punto $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$). Si a cada punto $P \in D$ está puesto en correspondencia el vector $\boldsymbol{a}(P) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, entonces se dice que en el dominio D está definido el campo vectorial determinado por la función vectorial $\boldsymbol{a}(P) = \boldsymbol{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$.

Las características geométricas más elementales de los campos escalares son *líneas de nivel* $u(x, y) = C$ en el espacio de dos dimensiones, *superficies de nivel*, o *superficies equipotenciales*, $u(x, y, z) = C$ en el espacio de tres dimensiones y *hipersuperficies de nivel* $u(x_1, \ldots, x_n) = C$ en el espacio $n > 3$ dimensiones. Las características geométricas más elementales de los campos vectoriales son líneas vectoriales y tubos vectoriales. Se llama *línea vectorial* la línea, cuya tangente en cada punto tiene una dirección que coincide con la dirección del vector del campo que le corresponde. Las líneas vectoriales para el vector $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ se determinan por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}$$

(análogamente para los campos planos y multidimensionales). Se llama *tubo vectorial* la superficie formada por las líneas vectoriales que pasan por los puntos de cierta curva cerrada situada en el campo y que no coincide (incluso parcialmente) con cualquier línea vectorial

Determínese el tipo de líneas o superficies (hipersuperficies) de nivel de los campos escalares siguientes:

1.1. $u = y^2 + x$. **1.2.** $u = xy$.

1.3. $u = y/x$. **1.4.** $u = x + y + z$.

1.5. $u = x^2 + y^2 - z^2$. **1.6.** $u = x^2 + y^2 - z$.

1.7. $u = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. **1.8.** $u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

Hállense las líneas vectoriales de los campos siguientes:

1.9. $a = yi - xj$. **1.10.** $a = xi - yj$.

1.11. $a = yi + j$. **1.12.** $a = r = xi + yj + zk$.

1.13. $a = [r, c]$ (c es vector constante).

1.14. $a = \frac{i}{x} + \frac{j}{y} + \frac{k}{z}$.

1.15. $a = (y - z)\, i + (z - x)\, j + (x - y)\, k$.

1.16. $a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_4 e_4$.

1.17. Determínese el tipo de tubos vectoriales: a) en el problema 1.12; b) en el problema 1.15.

2. Derivada direccional y gradiente del campo escalar. Sea $s = \cos\alpha \cdot i + \cos\beta \cdot j + \cos\gamma \cdot k$ el vector unitario de la dirección dada s, $r_0 = x_0 i + y_0 j + z_0 k$ el radio vector del punto P_0 (x_0, y_0, z_0). *La derivada* del campo escalar u (P) en el punto P_0 respecto *a la dirección* s, designada mediante $\frac{\partial u}{\partial s}$ se determina por la relación

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{u(r_0 + \tau s) - u(r_0)}{\tau}$$

y caracteriza la velocidad de variación de la función u (P) en la dirección s. La derivada $\frac{\partial u}{\partial s}$ se calcula según la fórmula

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{r=r_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{r=r_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{r=r_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{r=r_0} \cos\gamma. \qquad (1)$$

Se llama *gradiente* del campo escalar u (P), designado mediante el símbolo grad u, el vector cuyas proyecciones son las derivadas parciales de la función u (P) respecto a las coordenadas correspondientes, es decir,

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k \qquad (2)$$

De modo análogo se determina la derivada respecto a la dirección y el gradiente para los campos escalares n-dimensionales.

Partiendo de la expresión de la derivada respecto a la dirección (1) y de la definición del gradiente (2) demuéstrense las siguientes propiedades del gradiente:

1.18. La derivada del campo respecto a la dirección s es igual al producto escalar del gradiente del campo por el vector unitario de la dirección dada, es decir, es igual a la proyección del gradiente en la dirección dada

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (\operatorname{grad} u, \boldsymbol{s}) = |\operatorname{grad} u| \cos \varphi,$$

donde φ es el ángulo entre el gradiente y el vector $\boldsymbol{s}$.

1.19. La dirección del gradiente es la dirección del más rápido crecimiento de la función del campo.

1.20. En cada punto del campo el gradiente está dirigido por la normal a la superficie de nivel correspondiente, en dirección del crecimiento del potencial del campo, es decir,

$$|\operatorname{grad} u| = \frac{\partial u}{\partial n},$$

donde n es la normal a la superficie de nivel dirigida hacia el crecimiento de la función del campo.

Hállense las derivadas de los campos siguientes en los puntos dados, según la dirección prefijada:

1.21. $u + x^2 + \frac{1}{2} y^2$ en el punto $P_0(2, -1)$ en dirección de P_0P_1, donde $P_1(6, 2)$.

1.22. $u = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 + z$ en el punto $P_0(2, 1, 1)$ en dirección de la recta $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2}$ hacia el crecimiento del campo.

1.23. $u = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ en el punto P_0 (1, 3, 2, —1) en dirección del vector $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_4$.

1.24. Hállese el ángulo entre los gradientes del campo $u = x^2 + 2y^2 - z^2$ en los puntos P_1 (2, 3, —1) y P_2 (1, —1, 2).

1.25. Hállense la velocidad y la dirección del más rápido crecimiento del campo $u = xyz$ en el punto P_0 (1, 2, —2).

1.26. Hállese el vector unitario de la normal a la superficie de nivel del campo $u = x^2 + 2xy - 4yz$ en el punto P_0 (1, 1, —1), dirigido hacia el crecimiento del campo.

1.27. Hállense los puntos estacionarios del campo $u = 2x^2 - 4xy + y^2 - 2yz + 6z$.

1.28. Cerciórese de la ortogonalidad de las líneas de nivel de los campos:

a) $u = x^2 - y^2$, $v = xy$;

b) $u = 2x^2 + y^2$, $v = \frac{y^2}{x}$.

1.29. Cerciórese de la ortogonalidad de las superficies de nivel de los campos siguientes:

a) $x^2 + y^2 - z^2$, $v = xz + yz$;

b) $u = x^2 + y^2 - 2z^2$, $v = xyz$;

c) $u = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$, $v = x_1x_3 + x_2x_4$, $w = x_1x_4 - x_2x_3$.

1.30. Hállese la familia de líneas del más rápido crecimiento para los campos siguientes:

a) el campo plano $u = x^2 - y^2$;

b) el campo tridimensional $u = xyz$;

c) el campo tridimensional $u = x^2 + y^2 - z^2$.

§ 2. Integrales curvilíneas y de superficie

1. Integrales curvilíneas de primera especie. Sean $\breve{AB}$ el arco de una curva suave a trozos; $u(P)$, el campo escalar definido en AB; $A_0 = A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$ — la partición arbitraria del arco AB y P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) — son puntos arbitrarios en los arcos parciales $\breve{A_{\nu-1}A_\nu}$, cuyas longitudes se designan mediante Δs_ν. Si existe el límite de la sucesión de las sumas integrales $\sum_{\nu=1}^{n} u(P_\nu) \times \Delta s_\nu$ para $\max_\nu \Delta s_\nu \to 0$ (y $n \to \infty$), que no depende ni del modo de la partición del arco $\breve{AB}$ por los puntos A_ν ni de la elección de los puntos P_ν en los arcos parciales $\breve{A_{\nu-1}A_\nu}$, entonces este límite se llama *integral curvilínea de primera especie* de la función $u(P)$ según la curva $\breve{AB}$ y se designa mediante

$$\int_{\breve{AB}} u(P)\, ds = \int_{\breve{AB}} u(x, y, z)\, ds$$

(ds es la diferencial del arco), es decir,

$$\int_{\breve{AB}} u(P)\, ds = \lim_{\max_\nu \Delta s_\nu \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\, \Delta s_\nu. \tag{1}$$

Si la función $u(P)$ es continua en $\breve{AB}$, entonces la integral (1) existe.

Desde el punto de vista físico la integral (1) puede interpretarse como masa de la curva $\breve{AB}$. El cálculo de la integral (1) se reduce al cálculo de la integral definida. Por ejemplo, si la ecuación del arco $\breve{AB}$

tiene por expresión $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, entonces

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} u(P)\,ds=\int\limits_{t_0}^{t_1} u(x(t),\ y(t),\ z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

La integral curvilínea de primera especie no depende de la dirección en la que se pasa el arco $\overset{\frown}{AB}$, en otras palabras

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} u(P)\,ds=\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} u(P)\,ds.$$

EJEMPLO 1. Determínese la masa M de la primera espira de la hélice $x=a\cos t$, $y=a\,\text{sen}\,t$, $z=ht$, si la densidad $\mu(P)$ en cada punto de ésta es proporcional a la longitud del radio vector de este punto.

◀ Puesto que $\mu=kr=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, entonces en los puntos de la hélice $\mu=k\sqrt{a^2+h^2t^2}$. A la primera espira corresponde la variación del parámetro t desde 0 hasta 2π y

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{a^2+h^2}\,dt.$$

De aquí

$$M=\int\limits_0^{2\pi} k\sqrt{a^2+h^2}\sqrt{a^2+h^2t^2}\,dt=$$

$$=k\sqrt{a^2+h^2}\left(\frac{t}{2}\sqrt{a^2+h^2t^2}+\frac{a^2}{2h}\ln\left(ht+\sqrt{a^2+h^2t^2}\right)\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=k\sqrt{a^2+h^2}\left(\pi\sqrt{a^2+4\pi^2h^2}+\frac{a^2}{2h}\ln\frac{2\pi h+\sqrt{a^2+4\pi^2h^2}}{a}\right).\ ▶$$

2.1. Hállese la masa de toda la astroide $x=a\cos^3 t$, $y=a\,\text{sen}^3\,t$, si $\mu(P)=|xy|$.

2.2. Hállese la masa de toda la cardioide $r=a(1+\cos\varphi)$, si $\mu(P)=k\sqrt{r}$.

2.3. Hállese la masa de toda la lemniscata $r^2=a^2\cos 2\varphi$, si $\mu(P)=kr$.

2.4. Calcúlese $\displaystyle\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}\frac{y}{x+3z}\,ds$ si $\overset{\frown}{AB}$ es el arco de la línea $x=t$, $y=\dfrac{t^2}{\sqrt{2}}$, $z=\dfrac{t^3}{3}$, $A(0,\ 0,\ 0)$ y $B\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.5. Hállese la masa del arco de la hélice cónica $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \operatorname{sen} t$, $z = ae^t$, si $\mu = ke^t$ desde el punto O (0, 0, 0) hasta el punto A $(a, 0, a)$.

2.6. Hállese la fuerza con la cual la masa M distribuida uniformemente a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, $z = c$, atrae la masa puntual m colocada en el origen de coordenadas.

2.7. Hállese la masa de la cuarta parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ situada en el primer cuadrante, si su densidad en cada punto de la circunferencia es proporcional a la abscisa de este punto (el coeficiente de proporcionalidad es α).

2.8. Hállese la masa de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ situada en el semiplano superior, si la densidad de esta semicircunferencia en cada punto es proporcional al cubo de la ordenada de este punto (el coeficiente de proporcionalidad es β).

2. Integral de superficie de primera especie. Sean G la superficie suave a trozos; $u(P)$, el campo escalar dado en G; $G_1, G_2, \ldots, G_n$, la partición arbitraria de la superficie G en superficies parciales cuyas áreas son iguales $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ y sean P_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ puntos arbitrarios en las superficies parciales G_ν. Si existe el límite de la sucesión de las sumas integrales $\sum\limits_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\,\Delta\sigma_\nu$ para $\max\limits_{\nu} \Delta\sigma_\nu \to 0$ (y $n \to \infty$) que no depende ni del modo de partir la superficie G en superficies parciales ni de la elección de los puntos P_ν en estas superficies parciales, entonces este límite se llama *integral de superficie* de primera especie de la función $u(P)$ según la superficie G y se designa mediante

$$\iint_G u(P)\,d\sigma = \iint_G u(x, y, z)\,d\sigma$$

($d\sigma$ es la diferencial del área de superficie), es decir,

$$\iint_G u(P)\,d\sigma = \lim_{\max\limits_{\nu} \Delta\sigma_\nu \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\,\Delta\sigma_\nu. \qquad (2)$$

Si $u(P)$ es continua en G, la integral (2) existe. El cálculo de la integral (2) se reduce al cálculo de la integral doble ordinaria. Supongamos que la recta paralela al eje Oz corta la superficie G sólo en un punto, es decir, la ecuación de la superficie tiene la forma $z = f(x, y)$ y que G se proyecta sobre el plano Oxy en el dominio D. El elemento $d\sigma_1$ del área D se expresa en forma de $d\sigma_1 = d\sigma \cos\gamma$, donde γ es un ángulo agudo formado por la normal a la superficie G con el eje Oz:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

De este modo,

$$\iint\limits_G u(x, y, z)\, d\sigma = \iint\limits_D u(x, y, z)\frac{d\sigma_1}{\cos\gamma} =$$

$$= \iint\limits_D u(x, y, z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Si la recta paralela al eje Oz corta la superficie G en dos puntos o más, entonces G se divide en partes, cada una de las cuales se interseca con la recta paralela al eje Oz sólo en un único punto. La integración debe realizarse respecto a cada una de las partes obtenidas.

La superficie G puede proyectarse sobre los planos Oxz o Oyz, en vez de proyectarse sobre el plano Oxy.

Para las superficies de dos caras la integral de superficie de primera especie no depende de la cara por la cual se toma. El sentido físico de la integral de superficie de primera especie depende del carácter físico del campo escalar dado: éste puede determinar la masa distribuida por la superficie definida, la carga eléctrica, etc.

EJEMPLO 2. Determínense el momento estático respecto al plano Oxy y la posición del centro de masas de la semiesfera homogénea G: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(z \geqslant 0)$

◀ Tenemos

$$M_{xy} = \iint\limits_G z\, d\sigma = \iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy,$$

donde D es el círculo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $z = 0$. Ya que en la semiesfera $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$ entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z},$$

de donde

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

y

$$M_{xy} = \iint\limits_G z\, d\sigma = \iint\limits_G R\, dx\, dx = R\iint\limits_G dx\, dy = R\cdot\pi R^2 = \pi R^3.$$

Determinemos ahora las coordenadas del centro de masas de la semiesfera. En virtud de la simetría

$$x_0 = y_0 = 0.$$

Luego, ya que el área Q de la superficie de la semiesfera G es $2\pi R^2$, entonces

$$z_0 = \frac{M_{xy}}{Q} = \frac{R}{2}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 3. Por toda la superficie del cono con una altura h y un radio de la base a están distribuidas las cargas eléctricas. En cada punto de la superficie la densidad de la carga es proporcional a la z-coordenada de este punto ($e = kz$). El vértice del cono está en el origen de las coordenadas, su eje está dirigido a lo largo del eje Oz. Determínese la carga sumaria de toda la superficie del cono.

◀ La carga sumaria de la base del cono es igual al producto de su área πa^2 por la densidad de la carga puntual, es decir, kh. Así pues, $F_b = k\pi a^2 h$. La carga de la superficie lateral G se determina por la integral

$$E_{s.l} = \iint\limits_G kz\, d\sigma.$$

La ecuación de la superficie del cono es $z^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2 + y^2)$, $0 \leqslant z \leqslant h$. Diferenciando hallamos $z\,dz = \frac{h^2}{a^2}(x\,dx + y\,dy)$, de donde $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h^2}{a^2}\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h^2}{a^2}\frac{y}{z}$ y por consiguiente

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{h^4}{a^4}\cdot\frac{x^2+y^2}{z^2}} = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}.$$

Por eso

$$E_{s.l} = k\iint\limits_G z\, d\sigma = \frac{kh}{a}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\, dx\, dy,$$

donde D es el círculo $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $z = 0$. Pasando a las coordenadas polares obtenemos

$$E_{s.l} = \frac{kh\sqrt{a^2+h^2}}{a^2}\iint\limits_D r^2\, dr\, d\varphi =$$

$$= \frac{kh\sqrt{a^2+h^2}}{a^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\, dr = \frac{2}{3}k\pi ah\sqrt{a^2+h^2}.$$

Hallamos toda la carga:

$$E = E_{eje} + E_{s.l} = k\pi a^2 h + \frac{2}{3}k\pi ah\sqrt{a^2+h^2} =$$

$$= \frac{k\pi ah}{3}\left(3a + 2\sqrt{a^2+h^2}\right). \blacktriangleright$$

2.9. Determínese la masa distribuida en una parte de la superficie del paraboloide hiperbólico $2az = x^2 - y^2$, cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, si la densidad en cada punto de la superficie es igual a $k \mid z \mid$.

2.10. Determínese el momento de inercia de la superficie lateral homogénea del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \leqslant z \leqslant a)$ respecto del eje Oz.

2.11. Determínese la carga eléctrica sumaria distribuida en una parte de la superficie del hiperboloide de dos hojas $z^2 = x^2 + y^2 + a^2$ $(a \leqslant z \leqslant a\sqrt{2})$, si la densidad de la carga en cada punto es proporcional a la z-coordenada de este punto $(e = kz)$.

2.12. Determínese la masa distribuida por la superficie del cubo $x = \pm a$, $y = \pm a$, $z = \pm a$, si la densidad superficial en el punto $P(x, y, z)$ es igual a $k\sqrt[3]{\mid xyz \mid}$ $(k = \text{const})$.

2.13. Determínese la carga eléctrica sumaria distribuida en una parte de la superficie del paraboloide $2az = x^2 + y^2$, cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, si la densidad de la carga en cada punto es igual a $k\sqrt{z}$ $(k = \text{const})$.

3. Integral curvilínea de segunda especie. Supongamos que en el arco $\overset{\smile}{AB}$ de la curva suave a trozos está definido el campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = a_x(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + a_y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + a_z(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$ y que $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$ es una partición arbitraria del arco $\overset{\smile}{AB}$ en arcos parciales, P_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ son puntos arbitrarios en los arcos $\overset{\smile}{A_{\nu-1}A_\nu}$ y $\Delta\boldsymbol{r}_\nu$ es un incremento del radio vector $\boldsymbol{r}(P)$ en los extremos del arco $\overset{\smile}{A_{\nu-1}A_\nu}$. Entonces, si existe el límite de la sucesión de las sumas integrales $\sum\limits_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\boldsymbol{r}_\nu)$ para $\max\limits_{\nu} \mid \Delta\boldsymbol{r}_\nu \mid \to 0$ (y $n \to \infty$) que no depende ni del modo de partir el arco $\overset{\smile}{AB}$ en arcos parciales, ni de la elección de los puntos P_ν en estos arcos parciales, este límite se llama *integral curvilínea de segunda especie* respecto al arco $\overset{\smile}{AB}$ y se designa mediante

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz,$$

es decir,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \lim_{\max\limits_{\nu} \mid \Delta\boldsymbol{r}_\nu \mid \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\boldsymbol{r}_\nu). \tag{3}$$

Aquí $(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$ y $(\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta \boldsymbol{r}_\nu)$ son productos escalares de los vectores. Si la función vectorial $\boldsymbol{a}(P)$ es continua en $\overset{\frown}{AB}$, entonces la integral (3) existe.

La integral (3) se llama también *integral lineal* del vector $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. Análogamente se definen las integrales lineales en los campos vectoriales planos y multidimensionales. Si se dan las ecuaciones paramétricas del arco $\overset{\frown}{AB}$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, entonces

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (a_x(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) +$$
$$+ a_y(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + a_z(x(t), y(t), z(t))\, z'(t))\, dt. \qquad (4)$$

Aquí t_0 y t_1 son valores del parámetro t correspondientes a los puntos A y B. A diferencia de las integrales curvilíneas de primera especie las integrales lineales (3) dependen de la dirección por la cual se realiza la integración a lo largo del arco $\overset{\frown}{AB}$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}).$$

El sentido físico más simple de la integral lineal es el trabajo del campo de fuerzas $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, cuando en éste se desplaza un punto material por la curva $\overset{\frown}{AB}$, del punto A al punto B.

EJEMPLO 4. Determínese el trabajo del campo de fuerzas $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, cuando el punto material se desplaza a lo largo de la primera espira de la hélice cónica $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \operatorname{sen} t$, $z = ae^t$, del punto $A(0, 0, 0)$ al punto $B(a, 0, a)$.

◀ Ya que $dx = ae^t(\cos t - \operatorname{sen} t)\, dt$, $dy = ae^t(\operatorname{sen} t + \cos t)\, dt$, $dz = ae^t\, dt$ y

$$(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}) = x\, dx + y\, dy + z\, dz = a^2e^{2t}((\cos t - \operatorname{sen} t) \cos t +$$
$$+ (\operatorname{sen} t + \cos t) \operatorname{sen} t + 1)\, dt = 2a^2e^{2t}\, dt,$$

entonces, teniendo en cuenta que $t = -\infty$ en el punto A y $t = 0$ en el punto B, tenemos

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}) = 2a^2 \int\limits_{-\infty}^{0} e^{2t}\, dt = a^2. \text{ ▶}$$

OBSERVACIÓN. Este ejemplo se puede resolver de un modo más simple, si se toma en consideración que en este caso $(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2} d(r^2)$, además $r = |\boldsymbol{r}| = 0$ en el punto A y $r = a\sqrt{2}$ en el punto B. Tenemos

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{a\sqrt{2}} d(r^2) = \frac{r^2}{2}\Big|_0^{a\sqrt{2}} = a^2.$$

La integral lineal del vector $\boldsymbol{a}$, tomada por el contorno cerrado C se llama *circulación* del vector del campo por el contorno dado y se designa con el símbolo $\oint_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$. La dirección del recorrido del contorno se indica de antemano, con la particularidad de que se considera positivo el recorrido en sentido antihorario y negativo en sentido horario.

Para los campos planos vectoriales $\boldsymbol{a} = a_x(x, y)\,\boldsymbol{i} + a_y(x, y)\,\boldsymbol{j}$ tiene lugar la siguiente afirmación:

Si la función vectorial $\boldsymbol{a} = a_x(x, y)\,\boldsymbol{i} + a_i(x, y)\,\boldsymbol{j}$ es continua junto con las derivadas $\frac{\partial a_x}{\partial y}$ y $\frac{\partial a_y}{\partial x}$ en la región cerrada $\overline{G} = G + C$, entonces

$$\iint_G \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_G a_x\,dx + a_y\,dy$$

(*fórmula de Green*).

EJEMPLO 5. Calcúlese la integral curvilínea

$$\oint_C (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$$

donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.

◀ Aplicando la fórmula de Green podemos escribir:

$$\oint_C (x+y)\,dx - (x-y)\,dy = \iint_{K_C} (-1-1)\,dx\,dy = -2\pi r^2,$$

puesto que $\iint_{K_C} dx\,dy$ es el área del círculo K_C: $x^2+y^2 \leqslant r^2$. ▶

2.14. Calcúlese el trabajo del campo de fuerzas $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$, cuando el punto material se desplaza a lo largo de la mitad superior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, del punto $A\,(a, 0)$ al punto $B\,(-a, 0)$.

2.15. Calcúlese la integral lineal $\int_{OB} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$, si $\boldsymbol{a} = y^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$, $O\,(0, 0)$, $B\,(1, 1)$ respecto a las líneas siguientes:

a) al segmento de la recta OB; b) al arco de la parábola $x^2 = y$; c) al arco de la parábola $y^2 = x$; d) a la quebrada OAB, donde $A\,(1, 0)$; e) a la quebrada OCB, donde $C\,(0, 1)$.

2.16. Calcúlese la circulación del vector $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ a lo largo de la circunferencia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ en sentido negativo.

2.17. Calcúlese la integral lineal $\int\limits_{\overset{\frown}{OA}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$, si $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ y la ecuación del arco $\overset{\frown}{OA}$ es $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

2.18. Calcúlese la integral lineal $\int\limits_{\overset{\frown}{OA}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$, si $\boldsymbol{a} = -yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$, $\overset{\frown}{OA}$ es la primera espira de la hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = ht$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

2.19.** Calcúlese la circulación del vector $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 + z^3 = R^2$, $x + y + z = R$ en sentido positivo respecto al versor $\boldsymbol{k}$.

2.20. Calcúlese la circulación del vector $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ a lo largo de la elipse $\frac{x^2+y^2}{2} + z^2 = a^2$, $y = x$ en dirección positiva respecto al versor $\boldsymbol{i}$.

2.21. Calcúlese el trabajo del campo de fuerzas $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} - x^2\boldsymbol{k}$, cuando el punto material se desplaza a lo largo de la sección del hiperboloide $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2$ por el plano $y = x$, del punto $(a, a, 0)$ al punto $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, a)$.

Aplicando la fórmula de Green calcúlense las integrales:

2.22. $\oint\limits_C (x^2 - y^2)\, dx + (x^2 + y^2)\, dy$, donde C es el contorno formado por la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y el eje Ox.

2.23. $\oint\limits_C (x + y)^2\, dx - (x - y)^2\, dy$, donde C es el contorno formado por la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ y el segmento del eje Ox para $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

2.24. $\oint\limits_{x^2+y^2=r^2} x^2y\, dx - xy^2\, dy$.

2.25. $\oint\limits_C (x + y)^2\, dx - (x^2 + y^2)\, dy$, donde C es el triángulo con vértices $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ y $B(0, 1)$.

4. Integral de superficie de segunda especie. La superficie suave G en el espacio tridimensional se llama *de dos caras*, si la normal a la superficie, al recorrer cualquier contorno cerrado que se encuentra sobre la superficie G y que no tiene puntos comunes con su frontera, retorna a la posición inicial. La elección de una cara determinada de la superficie, es decir, la elección de la dirección de la normal hacia la superficie se llama *orientación* de la superficie.

Sea G la superficie orientada suave a trozos y $\boldsymbol{a} = a_x(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + a_y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + a_z(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$, el campo vectorial. Dividamos la superficie G en superficies parciales $G_1, G_2, \ldots, G_n$, cuyas áreas designamos mediante $\Delta\sigma_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ y las áreas de las superficies parciales G_ν, provistas de normales unitarias $\boldsymbol{n}_\nu(P_\nu)$ en los puntos $P_\nu \in G$, la denotamos por $\Delta\boldsymbol{\sigma}_\nu$ (es decir, consideramos cada área de tal índole como un vector de longitud $\Delta\sigma_\nu$ y de dirección $\boldsymbol{n}_\nu(P_\nu)$). Pues, si existe el límite de la sucesión de sumas integrales $\sum\limits_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\boldsymbol{\sigma}_\nu)$ para $\max\limits_{\nu} \Delta\sigma_\nu \to 0$ (y $n \to \infty$), el cual no depende ni del modo de partir la superficie G en superficies parciales, ni de la elección de los puntos P_ν en estas superficies parciales, entonces este límite se llama *integral de superficie de segunda especie* respecto a la superficie G y se designa mediante

$$\iint_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint_G a_x\,dy\,dz + a_y\,dx\,dz + a_z\,dx\,dy, \tag{5}$$

es decir,

$$\iint_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \lim_{\max\limits_{\nu} \Delta\sigma_\nu \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\boldsymbol{\sigma}_\nu).$$

Si el campo $\boldsymbol{a}(P)$ es continuo en G, la integral (5) existe.

La integral de superficie de segunda especie se llama también *flujo* del campo vectorial $\boldsymbol{a}(P)$ a través de la superficie G. Puede ser interpretada como la cantidad de líquido o gas que pasa por unidad de tiempo en la dirección dada a través de la superficie G. El paso a otra cara de la superficie cambia la dirección de la normal hacia la superficie y por eso, también el signo de la integral de superficie de segunda especie.

El cálculo de la integral de superficie de segundo género se reduce al cálculo de la integral de superficie de primer género

$$\iint_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint_G (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\,d\sigma = \iint_G (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\,d\sigma \tag{6}$$

donde $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ es la normal unitaria a la superficie, o al cálculo de la suma de tres integrales dobles

$$\iint_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint_{D_1} a_x(x(y, z), y, z)\,dy\,dz +$$
$$+ \iint_{D_2} a_y(x, y(x, z), z)\,dx\,dz + \iint_{D_3} a_z(x, y, z(x, y))\,dx\,dy,$$

donde D_1, D_2 y D_3 son las proyecciones de G respectivamente sobre los planos Oyz, Oxz y Oxy, y $x(y, z)$, $y(x, z)$ y $z(x, y)$ son las expresiones obtenidas de la ecuación de la superficie G resolviendo respecto a las coordenadas correspondientes.

EJEMPLO 6. Hállese el flujo del vector $r = xi + yj + zk$ a través de una parte de la superficie del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ situada en el primer octante, en dirección de la normal exterior.

◀ En virtud de (6) tenemos

$$\iint\limits_G (r, n)\,d\sigma = \iint\limits_G (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,d\sigma.$$

Puesto que en el primer octante la normal exterior del elipsoide forma con todos los ejes de coordenadas ángulos agudos, todos los tres cosenos directores son no negativos. Por eso

$$\iint\limits_G (r, n)\,d\sigma = \iint\limits_{D_1} x\,dy\,dz + \iint\limits_{D_2} y\,dx\,dz + \iint\limits_{D_3} z\,dx\,dy =$$
$$= 3v = 3\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi abc = \frac{\pi abc}{2}$$

(cada una de las integrales respecto a D_1, D_2 y D_3 determina el volumen de una octava parte del elipsoide). ▶

EJEMPLO 7. Hállese el flujo del vector $a = x^2 i - y^2 j + z^2 k$ a través de toda la superficie del cuerpo $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3R^2$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$ en dirección de la normal exterior.

▶ Tenemos

$$\iint\limits_G (a, n)\,d\sigma = \iint\limits_G (x^2\cos\alpha - y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,d\sigma =$$
$$= \iint\limits_G x^2\cos\alpha\,d\sigma - \iint\limits_G y^2\cos\beta\,d\sigma + \iint\limits_G z^2\cos\gamma\,d\sigma.$$

La superficie dada está limitada por arriba por el segmento de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2$; por los lados, por parte de la superficie del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$; por abajo por el círculo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $z = 0$ (fig. 93). Sobre los planos Oyz y Oxz la superficie G se proyecta dos veces por distintas caras, por eso, en virtud de la simetría de la superficie respecto a estos planos, las dos primeras integrales en la notación del flujo son iguales a cero:

$$\iint\limits_G x^2\cos\alpha\,d\sigma = \iint\limits_G y^2\cos\beta\,d\sigma = 0.$$

Sobre el plano Oxy el segmento esférico se proyecta en el círculo (dominio D_3') $x^2+y^2 \leqslant 2R^2$; parte de la superficie del hiperboloide, en el anillo (dominio D_3'') $R^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2R^2$ y de base inferior sirve el círculo situado en este plano, (dominio D_3''') $x^2+y^2 \leqslant R^2$. No

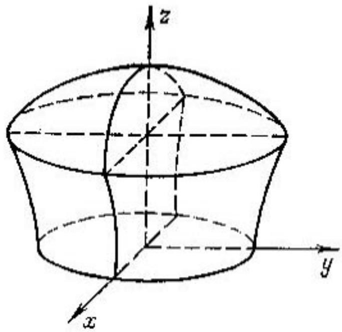


Fig. 93

obstante, para el segmento de la esfera $\cos\gamma > 0$, para el hiperboloide $\cos\gamma < 0$ y en la base inferior $z = 0$. Por eso

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\,d\sigma = \iint\limits_G z^2\cos\gamma\,d\sigma = \iint\limits_{D_3'} (3R^2 - x^2 -$$

$$- y^2)\,dx\,dy - \iint\limits_{D_2'} (x^2+y^2-R^2)\,dx\,dy.$$

Para calcular las integrales pasemos a las coordenadas polares

$$\iint\limits_{D_3'} (3R^2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R\sqrt{2}} (3R^2 - r^2)\,r\,dr = 4\pi R^4,$$

$$\iint\limits_{D_3''} (x^2+y^2-R^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_R^{R\sqrt{2}} (r^2-R^2)\,r\,dr = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Así pues, definitivamente hallamos: $\iint\limits_G (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\,d\sigma = \frac{7}{2}\pi R^4$. ▶

2.26. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a través de la superficie del cuerpo $\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant H$ en dirección de la normal exterior.

2.27. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ a través de una parte de la superficie del cilindro $x^2+y^2=R^2$,

$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant H$, en dirección de la normal exterior.

2.28. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ a través de una parte de la superficie del paraboloide $\frac{H}{R^2}(x^2 + y^2) = z$, $z \leqslant H$, en dirección de la normal interior.

2.29. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ a través de una parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, en dirección de la normal exterior.

2.30. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k}$ a través de toda la superficie del cubo $x = \pm a$, $y = \pm a$, $z = \pm a$ en dirección de la normal exterior.

2.31. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = 2x^2\boldsymbol{i} + 3y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ a través de toda la superficie del cuerpo $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{2R^2 - x^2 - y^2}$ en dirección de la normal exterior.

2.32. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a través de una parte de la superficie del paraboloide $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$, cortada por los planos $x = R$, $z = 0$, $x = 0$ y orientada según la dirección del versor $\boldsymbol{k}$.

2.33. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a través de una parte de la superficie del paraboloide $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$, cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ y orientada según la dirección del versor $\boldsymbol{k}$.

§ 3. Relaciones entre las distintas características de los campos escalares y vectoriales

1. Divergencia del campo vectorial y el teorema de Gauss—Ostrogradski. Se llama *divergencia* del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, designada por div $\boldsymbol{a}$, la magnitud escalar igual al límite de la razón entre el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a}$ a través de la superficie cerrada $\sum_P$ y la magnitud v_P del volumen del cuerpo limitado por esta superficie, para $v_P \to 0$, es decir, a condición de que la superficie se concentre en el punto P.

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{a})_P = \lim_{v_P \to 0} \frac{\oiint\limits_{\sum_P} (\boldsymbol{a},\, d\boldsymbol{\sigma})}{v_P}. \qquad (1)$$

La divergencia caracteriza la potencia del flujo del campo vectorial «saliente» del punto P, referida a una unidad de volumen, es decir, la potencia del manantial (para $(\operatorname{div} \boldsymbol{a})_P > 0$) o del sumidero (para $(\operatorname{div} \boldsymbol{a})_P < 0$) que se encuentra en el punto P.

En el espacio euclídeo tridimensional la divergencia del campo se expresa del modo siguiente:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

TEOREMA DE GAUSS—OSTROGRADSKI. *El flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ a través de una superficie cerrada $\sum$, situada en este campo en dirección de su normal exterior, es igual a la integral triple de la divergencia de este campo vectorial sobre el recinto V, limitado por esta superficie, es decir,*

$$\oiint\limits_{\Sigma} (\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{a})\, d\sigma = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dv.$$

EJEMPLO 1. Empleando el teorema de Gauss—Ostrogradski hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + R^2z\boldsymbol{k}$ a través de toda la superficie del cuerpo $\frac{H}{R^2}(x^2 + y^2) \leqslant z \leqslant H$ en dirección de la normal exterior.

◀ Tenemos $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 3(x^2 + y^2) + R^2$. Por eso

$$\oiint\limits_{G} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, d\sigma = \iiint\limits_{v} (3(x^2 + y^2(+ R^2)\, dv.$$

Para calcular la integral triple pasemos a las coordenadas cilíndricas. La ecuación de la superficie tomará la forma $z = \frac{H}{R^2} r^2$,

$$\iiint\limits_{v} (3(x^2+y^2)+R^2)\, dv = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R (3r^2+R^2)\, r\, dr \times$$

$$\times \int\limits_{\frac{Hr^2}{R^2}}^{H} dz = 2\pi \int\limits_0^R (3r^2+R^2)\left(H - \frac{Hr^2}{R^2}\right) r\, dr =$$

$$= \frac{2\pi H}{R^2} \int\limits_0^R (R^4 + 2R^2r^2 - 3r^4)\, r\, dr = \pi H R^4. \ ▶$$

Empleando el teorema de Gauss — Ostrogradski resuélvanse los problemas siguientes:

3.1. Demuéstrese que el flujo del radio vector $\boldsymbol{r}$ a través de cualquier superficie cerrada suave a trozos en dirección de la normal exterior es igual al volumen triplicado del cuerpo, limitado por esta superficie.

3.2. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} - z^3\boldsymbol{k}$ a través de toda la superficie del cubo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$ $0 \leqslant z \leqslant a$ en dirección de la normal exterior.

3.3. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}/r$ a través de toda la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ en dirección de la normal exterior.

3.4*. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$ dirigido en el sentido negativo del eje Ox a través de la superficie de una parte del paraboloide $y^2 + z^2 = Rx$ que se corta por el plano $x = R$.

3.5. Extiéndase el concepto de flujo y de divergencia en el caso de un campo plano (bidimensional) y formúlese el teorema de Gauss — Ostrogradski para este caso.

3.6*. Utilizando la solución del problema anterior, transfórmese la circulación del vector por un contorno cerrado L en un campo plano, en la integral doble sobre el área limitada por este contorno.

3.7. Con ayuda del teorema de Gauss — Ostrogradski hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j} + xyz\boldsymbol{k}$ a través de toda la superficie del cuerpo $x^2 + y^2 - z^2 \leqslant R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ en dirección de la normal exterior.

3.8. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2y\boldsymbol{i} - xy^2\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2) z\boldsymbol{k}$ a través de toda la superficie del cuerpo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$ en dirección de la normal exterior.

2. Rotor del campo vectorial. Teorema de Stokes. Se llama *rotor* del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, designado por rot $\boldsymbol{a}$, el vector que en todo punto P de la diferenciabilidad del campo se determina del modo siguiente:

$$(\text{proyecc}_s \text{ rot } \boldsymbol{a})_P = \lim_{\sigma_P \to 0} \frac{\oint\limits_{l_P} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})}{\sigma_P}.$$

Aquí s es el vector unitario de la dirección arbitraria, l_P es el contorno cerrado menor, que rodea el punto P, situado en el plano perpendicular al vector s y recorrido en el sentido positivo con respecto al vector s; σ_P es el área del recinto limitado por el contorno l_P: el límite se busca a condición de que el contorno se contrae en el punto P. En el espacio tridimensional rot $\boldsymbol{a}$ se expresa mediante las coordenadas rectangulares cartesianas del vector $\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$ del modo siguiente:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \boldsymbol{k}.$$

TEOREMA DE STOKES. *La circulación de un campo vectorial diferenciable $\boldsymbol{a}$ por un contorno arbitrario cerrado suave a trozos L, es igual al flujo del vector rot $\boldsymbol{a}$ a través de la superficie G, limitada por este contorno L:*

$$\oint_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \iint_G (\operatorname{rot} \boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{\sigma})$$

o en la forma coordenada

$$\oint_L (a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz) = \iint_G \left(\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos\gamma \right) d\sigma.$$

En este caso el vector unitario $\boldsymbol{n}$ de la normal a la superficie G está dirigido de tal modo para que el contorno L se recorra en el sentido positivo respecto a $\boldsymbol{n}$.

EJEMPLO 2. Compruébese la respuesta al problema 2.19 del capítulo presente con ayuda del teorema de Stokes.

◀ Puesto que $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$, entonces rot $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Tomemos como superficie G limitada por el contorno L, el propio círculo formado como resultado de la sección de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ por el plano $x + y + z = R$. El centro del círculo es $O'\left(\frac{R}{3}, \frac{R}{3}, \frac{R}{3}\right)$; su radio es $R_1 = R\sqrt{\frac{2}{3}}$. El vector unitario de la normal es $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$.

Por cuanto $(\operatorname{rot} \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, hallamos

$$\oint_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \iint_G (\operatorname{rot} \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\,d\sigma = \sqrt{3} \iint_G d\sigma = \sqrt{3}\,\pi R_1^2 = \frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}. \ ▶$$

Ejemplo 3. Hállese la circulación del vector $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - 2z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ a lo largo de la elipse formada como resultado de la sección del hiperboloide $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ por el plano $y = x$, en el sentido positivo respecto al versor $\boldsymbol{i}$. Verifíquese la respuesta con ayuda del teorema de Stokes.

◀ Las ecuaciones paramétricas de la elipse dada son $x = R\cos t$, $y = R\cos t$, $z = R\,\mathrm{sen}\,t$. Para recorrer en una dirección determinada hay que variar el parámetro t desde 0 hasta 2π. Por consiguiente

$$\oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_L y\,dx - 2z\,dy + x\,dz = R^2 \int_0^{2\pi} (-\mathrm{sen}\,t\cos t + $$
$$+ 2\,\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt = 3\pi R^2.$$

Apliquemos el teorema de Stokes. Tenemos rot $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. De superficie G limitada por el contorno L nos servirá una parte del plano secante, situada dentro de la elipse. El vector unitario de la normal dirigido en sentido necesario tiene la forma $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})$.

Por eso, $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = \frac{3}{\sqrt{2}}$ y

$$\iint_G (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\,d\sigma = \frac{3}{\sqrt{2}} \iint_G d\sigma = \frac{3}{\sqrt{2}}\pi ab.$$

Ya que la elipse tiene semiejes $a = R\sqrt{2}$ y $b = R$, entonces

$$\iint_G (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\,d\sigma = 3\pi R^2. \ ▶$$

3.9*. El medio líquido gira con una velocidad angular de $\omega = \omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j} + \omega_z \boldsymbol{k}$ alrededor del eje que pasa por el origen de coordenadas. Hállese el rotor del campo de velocidades de este medio.

3.10. Dedúzcase la fórmula de Green (véase la respuesta al problema 3.6) aplicando el teorema de Stokes al campo vectorial bidimensional $\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j}$.

3.11. Empleando la fórmula de Green cerciórese de que el área Q del dominio plano D, limitado por el contorno suave a trozos L, pude hallarse con ayuda de cualquiera de los tres integrales siguientes:

$$Q = \oint_L x\,dy, \quad Q = -\oint_L y\,dx, \quad Q = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx.$$

3.12. Utilizando la última fórmula del problema anterior hállese el área de las figuras, limitadas por las curvas siguientes:

a) por el bucle del folio de Decartes $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;

b) por la evoluta de la elipse $x = \frac{a^2}{c}\cos^3 t$, $y = \frac{b^2}{c}\mathrm{sen}^3 t$ (a y b son semiejes de la elipse, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$)

3.13. Aplicando el teorema de Stokes hállese la circulación del vector $a = z^2 i + x^2 j + y^2 k$ por la sección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ producida por el plano $x + y + z = R$ en el sentido positivo respecto al versor k.

3.14. Hállese la circulación del vector $a = z^3 i + x^3 j + y^3 k$ por la sección del hiperboloide $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ producida por el plano $x + y = 0$ en el sentido positivo respecto al versor i. Verifíquese aplicando el teorema de Stokes.

3.15. Hállese la circulación del vector $a = y^2 i + xyj + (x^2 + y^2) k$ a lo largo del contorno cortado en el primer octante del paraboloide $x^2 + y^2 = Rz$ por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = R$, en dirección positiva respecto a la normal exterior del paraboloide. Verifíquese con ayuda del teorema de Stokes.

3. Operador de Hamilton y su aplicación. Todas las operaciones del análisis vectorial pueden ser expresadas aplicando el operador de Hamilton, vector simbólico ∇ (se lee: nabla), definido por la igualdad

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

Empleando las operaciones conocidas de multiplicación del vector por el escalar, del producto escalar y vectorial de dos vectores, hallamos:

$$\operatorname{grad} u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z} = \nabla u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (s, \operatorname{grad} u) = (s, \nabla u) = (s, \nabla)\, u;$$

$$\operatorname{div} a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = (\nabla, a);$$

$$\operatorname{rot} a = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = [\nabla, a].$$

Por analogía con la derivada en dirección de la función escalar $\frac{\partial u}{\partial s}$, se introduce el concepto de derivada en dirección del vector unitario

s de la función vectorial $a(r)$. Precisamente,

$$\frac{\partial a}{\partial s} = (s, \nabla)\, a = i\,(s, \text{grad } a_x) + j\,(s, \text{grad } a_y) + k\,(s, \text{grad } a_z) = \frac{\partial a_x}{\partial s}\, i + \frac{\partial a_y}{\partial s}\, j + \frac{\partial a_z}{\partial s}\, k.$$

Las derivadas en dirección de cualquier vector arbitrario c (no unitario) se diferencian de las derivadas en dirección del vector unitario sólo en que en ellas entra el factor escalar complementario $|c|$:

$$(c, \nabla)\, u = (c, \text{grad } u),$$

$$(c, \nabla)\, a = (c, \text{grad } a_x)\, i + (c, \text{grad } a_y)\, j + (c, \text{grad } a_z)\, k.$$

Con ayuda del operador de Hamilton es cómodo realizar las operaciones diferenciales del análisis vectorial sobre las expresiones complejas (el producto de dos y más funciones escalares, el producto de la función escalar por el vector, los productos escalar y vectorial de los vectores, etc.). Es necesario recordar sólo que es un operador de diferenciación, y no olvidar la regla de diferenciación del producto.

EJEMPLO 4. Hállese el gradiente del producto de dos funciones escalares u y v.

◀ Tenemos

$$\text{grad}\,(uv) = \nabla\,(uv) = \nabla\,(\overset{\downarrow}{u}v) + \nabla\,(u\overset{\downarrow}{v})$$

(la flecha indica la función sobre la cual «actúa» el operador). Pero

$$\nabla\,(\overset{\downarrow}{u}v) = v\,\nabla u = v \text{ grad } u,$$

$$\nabla\,(u\overset{\downarrow}{v}) = u\,\nabla v = u \text{ grad } v.$$

De este modo,

$$\text{grad } uv = v \text{ grad } u + u \text{ grad } v. \ ▶$$

EJEMPLO 5. Hállese el rot $[a, c]$, donde c es vector constante.

◀ Puesto que según la fórmula conocida del álgebra vectorial $[a, [b, c]] = (a, c)\, b - (a, b)\, c$, entonces, considerando la relación $[\nabla, [a, c]] = 0$, tenemos

$$\text{rot}\,[a, c] = [\nabla, [a, c]] = [\nabla, [\overset{\downarrow}{a}, c]] + [\nabla, [a, \overset{\downarrow}{c}]] = (\nabla, c)\, \overset{\downarrow}{a} - (\nabla, \overset{\downarrow}{a})\, c.$$

Pero $(\nabla, c)\, \overset{\downarrow}{a} = (c, \nabla)\, \overset{\downarrow}{a}$, lo que es la derivada del vector a en dirección del vector c. Luego,

$$(\nabla, a)\, c = c\, (\nabla, a) = c \text{ div } a.$$

De este modo, $\text{rot}\,[a, c] = (c, \nabla)\, a - c \text{ div } a$. ▶

Realícense las siguientes operaciones diferenciales (aquí y más abajo, en los problemas de este párrafo, c es un vector constante, a y b son vectores variables):

3.16. Hállense div (cu) y div (au).

3.17.** Hállense grad (a, c) y grad (a, b).

3.18. Hállense div $[a, c]$ y div $[a, b]$.

3.19*. Hállense rot (cu), rot (au) y rot $[a, b]$.

4. Operaciones diferenciales de segundo orden. Se puede realizar cinco operaciones diferenciales de segundo orden:

1) div grad $u = (\nabla, \nabla) u = \nabla^2 u = \nabla u$ (laplaciano de la función);

2) rot grad $u = [\nabla, \nabla] u$;

3) grad div $a = \nabla (\nabla, a)$;

4) div rot $a = (\nabla, [\nabla, a])$;

5) rot rot $a = [\nabla, [\nabla, a]]$.

Además, se puede aplicar la operación ∇^2 también a los campos vectoriales, es decir, analizar la operación $\nabla^2 a$.

Las operaciones segunda y cuarta llevan al cero:

$$\text{rot grad } u = [\nabla, \nabla] u \equiv 0, \quad \text{div rot } a = (\nabla, [\nabla, a]) \equiv 0.$$

Esto deriva del sentido vectorial del operador ∇: en el primer caso tenemos formalmente el producto vectorial de dos vectores colineales, en el segundo, el producto mixto de vectores coplanares.

3.20. Obténganse las expresiones para

$$\text{div grad } u = \nabla^2 u,$$
$$\text{grad div } a = \nabla (\nabla, a),$$
$$\text{rot rot } a = [\nabla [\nabla, a]],$$
$$\nabla^2 a = \nabla^2 a_x i + \nabla^2 a_y j + \nabla^2 a_z k$$

a partir de las derivadas de los campos escalar o vectorial.

3.21. Hállese grad div a, si $a = x^3 i + y^3 j + z^3 k$.

3.22. Hállese rot rot a, si $a = xy^2 i + yz^2 j + zx^2 k$.

3.23. Hállese $\nabla^2 a$, si $a = (y^2 + z^2) xi + (x^2 + z^2) yj + (x^2 + y^2) zk$.

3.24. Hállese div grad (uv).

3.25. Hállese grad div (uc) y grad div (ua) (c es un vector constante, a es un vector variable).

3.26. Hállese rot rot (uc).

§ 4. Tipos especiales de campos vectoriales

1. Campo vectorial potencial. El campo vectorial $a = a(r)$ se llama *potencial* si el vector del campo a es el gradiente de una función escalar $u = u(P)$:

$$a(r) = \text{grad } u(P). \tag{1}$$

La función $u(P)$ se denomina, en este caso, *potencial* del campo vectorial. La condición necesaria y suficiente de potencialidad del campo

$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ dos veces diferenciable en la región simplemente conexa, es la igualdad a cero del rotor de este campo:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} \equiv 0. \tag{2}$$

EJEMPLO 1. Verifíquese que el rotor del campo vectorial tridimensional $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u$, sea idénticamente igual a cero (la función $u(P)$ se supone dos veces diferenciable).

◀ Ya que $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \boldsymbol{k}$, entonces, tomando en consideración la igualdad de las derivadas mixtas de segundo orden, obtenemos

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \boldsymbol{i} + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \boldsymbol{k} \equiv 0. \blacktriangleright$$

En el punto 4 del párrafo anterior esta igualdad fue obtenida utilizando las propiedades del vector simbólico nabla.

El campo potencial posee las siguientes propiedades.

1. En la región donde el potencial del campo es continuo la integral lineal del vector del campo, tomada entre dos puntos del campo, no depende del camino de la integración y es igual a la diferencia de valores del potencial del campo al final y al principio del camino de integración

$$\int_A^B (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_A^B (\operatorname{grad} u, d\boldsymbol{r}) = \int_A^B du = u(B) - u(A) \tag{3}$$

(se aplica la fórmula $(\operatorname{grad} u, d\boldsymbol{r}) = du$ fácil de comprobar).

2. La circulación del vector del campo a lo largo de cualquier contorno cerrado, situado por completo en la región de continuidad del campo, es igual a cero.

3. Si el campo $\boldsymbol{a}$ es potencial, entonces el potencial del campo $u(P)$ en un punto arbitrario P puede ser calculado según la fórmula (3):

$$u(P) = \int_A^P (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + C, \tag{4}$$

además $C = u(A)$, lo que es fácil de obtener sustituyendo en (4) el punto fijo A, en vez del punto variable P.

Para calcular la integral (4) se puede escoger cualquier camino: como camino se escoge simplemente una quebrada, cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas, que une los puntos A y P. Como punto A es cómodo tomar el origen de coordenadas (si este está en la región de continuidad del campo).

Ejemplo 2. Hállese el potencial del campo $\boldsymbol{a} = 2xy\boldsymbol{i} + (x^2 - 2yz)\boldsymbol{j} - y^2\boldsymbol{k}$.

◀ Cerciorémonos de que el campo es potencial

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z} = -2y, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y} = 2x.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0.$$

Como camino de integración tomemos la quebrada $OABP$, donde $O(0, 0, 0)$, $A(X, 0, 0)$, $B(X, Y, 0)$, $P(X, Y, Z)$. Hallamos

$$u(X, Y, Z) = \int\limits_{OABP} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + C = \int\limits_{0}^{A} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + \int\limits_{A}^{B} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + \int\limits_{B}^{P} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + C,$$

$$(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = 2xy\,dx + (x^2 - 2yz)\,dy - y^2\,dz.$$

Puesto que en OA tenemos $y = z = 0$, $dy = dz = 0$, $0 \leqslant x \leqslant X$, entonces

$$\int\limits_{0}^{A} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = 0.$$

Análogamente en AB tenemos $x = X$, $dx = 0$, $z = 0$, $dz = 0$, $0 \leqslant y \leqslant Y$, por eso

$$\int\limits_{A}^{B} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int\limits_{0}^{Y} X^2\,dy = X^2Y.$$

En BP tenemos $x = X$, $y = Y$, $dx = dy = 0$, $0 \leqslant z \leqslant Z$, lo que significa

$$\int\limits_{B}^{P} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = -\int\limits_{0}^{Z} Y^2\,dz = -Y^2Z.$$

Así pues, $u(X, Y, Z) = X^2Y - Y^2Z + C$. Volviendo a las variables x, y, z, obtenemos

$$u(P) = x^2y - y^2z + C. \ ▶$$

OBSERVACIÓN. El método expuesto para determinar el potencial del campo se emplea para resolver los problemas del análisis matemático equivalentes al problema examinado, tales como la reconstrucción de una función de dos, tres y n variables a partir de sus diferenciales totales, así como para integrar las ecuaciones diferenciales en diferenciales totales.

Hállense los potenciales de los siguientes campos planos y tridimensionales:

4.1. $\boldsymbol{a} = (3x^2y - y^3)\,\boldsymbol{i} + (x^3 - 3xy^2)\,\boldsymbol{j}$.

4.2. $\boldsymbol{a} = \dfrac{\operatorname{sen} 2x \cos 2y \cdot \boldsymbol{i} + \cos 2x \operatorname{sen} 2y \cdot \boldsymbol{j}}{\sqrt{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 x \cos^2 y}}$.

4.3. $\boldsymbol{a} = (yz - xy)\,\boldsymbol{i} + \left(xz - \dfrac{x^2}{2} + yz^2\right)\boldsymbol{j} + (xy + y^2z)\,\boldsymbol{k}$.

4.4*. $\boldsymbol{a} = \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{y}{z^2}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2}\right)\boldsymbol{j} + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{z^2}\right)\boldsymbol{k}$.

4.5*. $\boldsymbol{a} = \left(\dfrac{z}{y^2} - \dfrac{y}{z^2} - \dfrac{2yz}{x^3}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{z}{x^2} - \dfrac{x}{z^2} - \dfrac{2xz}{y^3}\right)\boldsymbol{j} + \left(\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{2xy}{z^3}\right)\boldsymbol{k}$.

4.6.** Demuéstrese que en el campo vectorial potencial siempre continuo las líneas vectoriales no pueden ser cerradas.

Si en el campo potencial plano existen puntos en los cuales el campo pierde su propiedad de continuidad (los así llamados puntos *singulares*), entonces la circulación a lo largo del contorno cerrado que rodea tal punto puede ser distinta de cero. En este caso la circulación a lo largo del contorno que recorre un punto singular dado una vez, en sentido positivo, no depende de la forma del contorno y se llama *constante cíclica* respecto al punto singular dado.

Propiedades análogas las tienen los campos tridimensionales con líneas singulares a lo largo de las cuales el campo pierde su propiedad de continuidad.

4.7. Cerciórese de que el campo $\boldsymbol{a} = \dfrac{x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{i}}{x^2 + y^2}$ es potencial. Determínense su punto singular y su constante cíclica.

4.8*. Demuéstrese la propiedad formulada más arriba de que la circulación a lo largo del contorno cerrado, que rodea el punto singular, no depende de la forma del contorno.

4.9*. Valiéndose de la fórmula (4) para determinar el potencial del campo, cerciórese de que el potencial del campo plano, que contiene puntos singulares, es una función multiforme.

2. Campo solenoidal. Un campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ se llama *solenoidal*, si la divergencia de este campo es igual a cero: $\operatorname{div} \boldsymbol{a} \equiv 0$.

Para un campo tridimensional esta condición puede anotarse así:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \equiv 0. \tag{5}$$

En tal campo, en virtud del teorema de Gauss—Ostrogradski, el flujo del vector del campo a través de cualquier superficie cerrada es igual a cero. Puede haber una sola exclusión cuando en tal campo existen puntos singulares (en los cuales el vector del campo no está definido y la divergencia del campo, si se determina en este punto con ayuda de la fórmula (1) del § 3, es distinta de cero). En este caso el flujo a través de la superficie cerrada puede ser diferente de cero, pero tendrá el mismo valor para todas las superficies cerradas que rodean el grupo dado de puntos singulares.

EJEMPLO 3. Demuéstrese que para todo campo vectorial tridimensional dos veces diferenciable $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ el campo de rotores es solenoidal.

◀ Tenemos

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \boldsymbol{k}.$$

Considerando la igualdad de las derivadas mixtas de segundo orden, obtenemos

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + $$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = 0. \blacktriangleright$$

En el punto 4 del párrafo antecedente esta relación ha sido demostrada con ayuda del operador nabla.

4.10. Demuéstrese que en el campo solenoidal el flujo del vector a través de la superficie cerrada, que no contiene dentro puntos singulares, es igual a cero.

Verifíquese si son solenoidales los campos siguientes:

4.11. $\boldsymbol{a} = (x^2y + y^3)\,\boldsymbol{i} + (x^3 - xy^2)\,\boldsymbol{j}$.

4.12. $\boldsymbol{a} = xy^2\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} - (x^2 + y^2)\,z\boldsymbol{k}$.

4.13. $\boldsymbol{a} = \dfrac{x}{yz}\,\boldsymbol{i} + \dfrac{y}{xz}\,\boldsymbol{j} - \dfrac{(x+y)\ln z}{xy}\,\boldsymbol{k}$.

4.14. $\boldsymbol{a} = \dfrac{x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{(x^2 - y^2)\,z\boldsymbol{k}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$.

4.15*. Demuéstrese que en el campo solenoidal el flujo del vector del campo a través de la sección transversal de cualquier tubo vectorial (que está determinado en el mismo sentido) tiene valor constante.

3. Campo laplaciano (o armónico). El campo vectorial se llama *laplaciano* (o *armónico*) si es al mismo tiempo potencial y solenoidal, es decir, si

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0. \tag{6}$$

EJEMPLO 4. Demuéstrese que el potencial u del campo laplaciano bidimensional o tridimensional es *una función armónica* de dos o tres variables $\left(\text{es decir, } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ ó } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\right.$ $\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.\right)$

◀ En efecto, tenemos

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}=\operatorname{div} \operatorname{grad} u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

para dos variables,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}=\operatorname{div} \operatorname{grad} u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

para tres variables ▶

EJEMPLO 5. Muéstrese que el potencial del campo de las fuerzas de gravitación, que surge en el espacio que rodea cierta masa puntual, es igual a k/r (k es constante) y que el campo de las fuerzas de gravitación es laplaciano.

◀ Coloquemos el origen de coordenadas en el centro de atracción. Entonces

$$\boldsymbol{a}=\operatorname{grad} \frac{k}{r}=k \operatorname{grad} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-k \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-\frac{k\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Pero éste es un vector de la fuerza de atracción. Efectivamente, está dirigido hacia el centro de atracción, puesto que $\boldsymbol{r}/r$ es un vector unitario del radio vector del punto $P(\boldsymbol{r})$ dirigido hacia el origen de coordenadas y su módulo es igual a k/r^2, es decir, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro de atracción. Mostremos que $\operatorname{div} \boldsymbol{a}=-k \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0$. Tenemos

$$a_x=-\frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}=-k\frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}=-k\frac{y^2+z^2-2x^2}{r^5}.$$

Análogamente

$$\frac{\partial a_y}{\partial y}=-k\frac{x^2+z^2-2y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial a_z}{\partial z}=-k\frac{x^2+y^2-2z^2}{r^5},$$

y por eso,

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=-\frac{k}{r^5}\left((y^2+z^2-2x^2)+\right.$$
$$\left.+(x^2+z^2-2y^2)+(x^2+y^2-2z^2)\right)\equiv 0.$$

Así pues, el campo de las fuerzas de gravitación es laplaciano. ▶

4.16. Demuéstrese que el campo vectorial plano, de cuyo potencial sirve la función $u=\ln r$ $(r=\sqrt{x^2+y^2})$, es laplaciano.

4.17*. Para las funciones armónicas u y w en la región G demuéstrense las siguientes *fórmulas de Green:*

a) $$\oiint\limits_S u\,\frac{\partial w}{\partial n}\,d\sigma=\iiint\limits_G (\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} w)\,dv$$

(la primera fórmula de Green),

b) $$\oiint\limits_S \left(u\,\frac{\partial w}{\partial n}-w\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma=0$$

(la segunda fórmula de Green),

c) $$\oiint\limits_S \frac{\partial (uw)}{\partial n}\,d\sigma=2\iiint\limits_G (\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} w)\,dv$$

(la tercera fórmula de Green).

4.18. Verifíquese si son armónicas las siguientes funciones:

a) $u=\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

b) $u=r-x=\sqrt{x^2+y^2}-x$;

c) $u=Ax+By+C$;

d) $u=Ax^2+2Bxy+Cy^2$;

e) $u=Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3$;

f) $u=Ax+By+Cz+D$;

g) $u=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$;

h) $u=a_{111}x^3+a_{222}y^3+a_{333}z^3+3a_{112}x^2y+3a_{113}x^2z+3a_{122}xy^2+3a_{223}y^2z+3a_{133}xz^2+3a_{233}yz^2+6a_{123}xyz$.

§ 5. Aplicación de las coordenadas curvilíneas al análisis vectorial

1. Coordenadas curvilíneas. Relaciones principales. En el espacio el sistema de coordenadas está definido, si a todo punto P están puestos en correspondencia tres números q_1, q_2, q_3, además, a cada tres números distintos corresponden distintos puntos del espacio. Los números q_1, q_2, q_3 se llaman *coordenadas* (o *coordenadas curvilíneas*) del punto $P=P(q_1, q_2, q_3)$. Son de mayor aplicación los sistemas de coordenadas siguientes:

1) Sistema de coordenadas rectangular cartesiano. Aquí $q_1=x$ es la abscisa del punto P, $q_2=y$ es la ordenada y $q_3=z$ es z-coordenada.

2) *Sistema de coordenadas cilíndrico.* En este sistema por q_1 se toma la distancia r del punto P al eje z, $q_1 = r$ $(0 \leqslant r < \infty)$, $q_2 = \varphi$ es el ángulo formado por la proyección del radio vector OP sobre el plano Oxy con sentido positivo del eje Ox $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ y $q_3 = z$ es z-coordenada del punto P.

En este caso las coordenadas cilíndricas están relacionadas con las coordenadas rectangulares cartesianas mediante las fórmulas

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi, \quad z = z$$

y recíprocamente

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

3) *Sistema esférico de coordenadas.* Aquí $q_1 = r$ es la longitud del radio vector del punto P $(0 \leqslant r < \infty)$, $q_2 = \theta$ es el ángulo entre el sentido positivo del eje Oz y el radio vector OP del punto P $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$[1], $q_3 = \varphi$ es ángulo entre el sentido positivo del eje Ox y la proyección del radio vector OP sobre el plano Oxy $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$. Tienen lugar las fórmulas:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi,$$
$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi,$$
$$z = r \cos \theta$$

y recíprocamente

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

La línea a lo largo de la cual varía sólo una coordenada q_1 se llama *q_1-línea coordenada* y el vector unitario tangente a esta línea y dirigido en el sentido en que crece q_1, se llama *versor unitario coordenado* $\boldsymbol{e}_{q_1}$ en el punto P (q_1^0, q_2^0, q_3^0). De modo análogo se definen q_2- y q_3- líneas y los versores unitarios $\boldsymbol{e}_{q_2}$ y $\boldsymbol{e}_{q_3}$.

Si los vectores $\boldsymbol{e}_{q_1}$, $\boldsymbol{e}_{q_2}$, $\boldsymbol{e}_{q_3}$, son ortogonales dos a dos en todo punto del espacio, entonces el correspondiente sistema de coordenadas curvilíneas q_1, q_2, q_3 se denomina *ortogonal*.

Supongamos que P (q_1, q_2, q_3) es un punto arbitrario del espacio, P_1 $(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)$ es un punto situado en la q_1-línea del punto P y $|\overset{\frown}{PP_1}|$ es la longitud del arco $\overset{\frown}{PP_1}$. Entonces el número

$$L_1 = \lim_{\Delta q_1 \to 0} \frac{|\overset{\frown}{PP_1}|}{\Delta q_1}$$

[1] A veces por la coordenada q_2 del sistema esférico se toma el ángulo entre el radio vector OP y el plano Oxy (véase el § 2, cap. 8).

lleva el nombre de *coeficiente de Lamé* de la coordenada q_1 en el punto P. De modo análogo se determinan los coeficientes de Lamé L_2 y L_3 de las coordenadas q_2 y q_3.

Si el punto $P(x, y, z)$ tiene las coordenadas curvilíneas $q_1 = q_1(x, y, z)$, $q_2 = q_2(x, y, z)$, $q_3 = q_3(x, y, z)$, las diferenciales de los radio vectores dr_{q_ν} de las líneas coordenadas y las diferenciales de sus arcos ds_{q_ν} se definen con ayuda de las igualdades

$$dr_{q_\nu} = i\frac{\partial x}{\partial q_\nu}dq_\nu + j\frac{\partial y}{\partial q_\nu}dq_\nu + k\frac{\partial z}{\partial q_\nu}dq_\nu = L_\nu e_{q_\nu}dq_\nu,$$

$$ds_{q_\nu} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_\nu}\right)^2}\,dq_\nu = L_\nu\,dq_\nu,$$

($\nu = 1, 2, 3$), donde L_ν es el coeficiente de Lamé.

El conjunto de puntos $P(q_1, q_2, q_3)$ para los cuales una de las coordenadas es constante, se llama *superficie coordenada*.

Las diferenciales de las áreas de las superficies coordenadas se determinan por las fórmulas

$$d\sigma_{q_1} = L_2L_3\,dq_2\,dq_3, \quad d\sigma_{q_2} = L_1L_3\,dq_1\,dq_3,$$

$$d\sigma_{q_3} = L_1L_2\,dq_1\,dq_2$$

y la diferencial de volumen

$$dv = L_1L_2L_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3$$

Determínese el tipo de líneas coordenadas y las superficies coordenadas y constrúyanse éstas en un punto arbitrario para los casos siguientes:

5.1. Para el sistema rectangular cartesiano de coordenadas.

5.2. Para el sistema cilíndrico de coordenadas.

5.3. Para el sistema esférico de coordenadas.

Calcúlense los coeficientes de Lamé:

5.4. En el sistema rectangular cartesiano de coordenadas.

5.5. En el sistema cilíndrico de coordenadas.

5.6. En el sistema esférico de coordenadas.

Hállense las diferenciales de los arcos de las líneas coordenadas, las diferenciales de las áreas de las superficies coordenadas y la diferencial de volumen:

5.7. En el sistema rectangular cartesiano de coordenadas.

5.8. En el sistema cilíndrico de coordenadas.

5.9 En el sistema esférico de coordenadas.

2. Operaciones diferenciales del análisis vectorial en las coordenadas curvilíneas. Las operaciones mencionadas se definen por las fórmulas siguientes:

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{L_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_{q_1} + \frac{1}{L_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_{q_2} + \frac{1}{L_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_{q_3},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{L_1L_2L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(L_2L_3a_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(L_1L_3a_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(L_1L_2a_{q_3})\right),$$

donde $\boldsymbol{a} = a_{q_1}\boldsymbol{e}_{q_1} + a_{q_2}\boldsymbol{e}_{q_2} + a_{q_3}\boldsymbol{e}_{q_3}$,

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{1}{L_2L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}(L_3a_{q_3}) - \frac{\partial}{\partial q_3}(L_2a_{q_2})\right)\boldsymbol{e}_{q_1} + \frac{1}{L_1L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_3}(L_1a_{q_1}) - \frac{\partial}{\partial q_1}(L_3a_{q_3})\right)\boldsymbol{e}_{q_2} + \frac{1}{L_1L_2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(L_2a_{q_2}) - \frac{\partial}{\partial q_2}(L_1a_{q_1})\right)\boldsymbol{e}_{q_3},$$

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{1}{L_1L_2L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{L_2L_3}{L_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{L_1L_3}{L_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{L_1L_2}{L_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right).$$

Para las coordenadas cilíndricas r, φ, y z hállense las expresiones:

5.10. $\operatorname{grad} u$. **5.11.** Δu. **5.12** $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$. **5.13.** $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$

Para las coordenadas esféricas r, θ, φ hállense las expresiones:

5.14. $\operatorname{grad} u$. **5.15.** Δu. **5.16.** $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$. **5.17.** $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

Ejemplo 1. Pásese a las coordenadas cilíndricas en la expresión del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ y hállense $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ y $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

◀ Puesto que en el caso dado $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = \boldsymbol{r}$, entonces

$$\boldsymbol{a} = \frac{r\boldsymbol{e}_r - z\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{r^2+z^2}}.$$

Por las fórmulas obtenidas al resolver los problemas 5.12 y 5.13, hallamos:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{2r(r^2+z^2) - r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}} - r\frac{(r^2+z^2) - z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{2z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi +$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z = -\frac{2rz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_\varphi. \blacktriangleright$$

5.18. Dedúzcanse las fórmulas:

a) $\operatorname{div} \boldsymbol{e}_\nu = \dfrac{1}{L_1 L_2 L_3}\dfrac{\partial (L_j L_k)}{\partial q_\nu}$;

b) $\operatorname{rot} \boldsymbol{e}_\nu = \dfrac{1}{L_\nu}[\operatorname{grad} L_\nu, \boldsymbol{e}_\nu]$.

5.19. Empleando las fórmulas deducidas al resolver el problema 5.18, hállense $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ y $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ para los vectores coordenados unitarios del sistema cilíndrico de coordenadas:

a) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_r$; b) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\varphi$; c) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_z$.

5.20. Un problema, análogo al 5.19, para el sistema esférico de coordenadas:

a) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_r$; b) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\theta$; c) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\varphi$.

5.21. Hállense todas las funciones armónicas del tipo:

a) $u = f(r)$; b) $u = f(\varphi)$; c) $u = f(z)$

(r, φ, z son coordenadas cilíndricas).

5.22. Hállense todas las funciones armónicas del tipo:

a) $u = f(r)$; b) $u = f(\theta)$; c) $u = f(\varphi)$

(r, θ, φ son coordenadas esféricas).

5.23. Pásese a las coordenadas esféricas en la expresión del campo escalar $u = \dfrac{2xy(z^2 - x^2 - y^2)}{x^2+y^2}$ y hállense u, $\operatorname{grad} u$ y $\nabla^2 u$.

5.24. Pásese a las coordenadas cilíndricas en la expresión del campo escalar $u = \dfrac{2xyz + (x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y hállense u, $\operatorname{grad} u$ y $\nabla^2 u$.

5.25. Pásese a las coordenadas esféricas en la expresión del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \dfrac{x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{i}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ y hállense $\boldsymbol{a}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ y $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

5.26. Pásese a las coordenadas cilíndricas en la expresión del campo vectorial $\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - z\sqrt{x^2+y^2}\,\boldsymbol{k}$ y hállense $\boldsymbol{a}$, div $\boldsymbol{a}$ y rot $\boldsymbol{a}$.

3. Campos escalares centrales, axiales y simétricos al eje. El campo escalar se llama *central* si la función del campo $u = u(P)$ depende sólo de la distancia entre el punto P del campo y cierto punto constante, su centro. Si el origen de coordenadas se coloca en el centro del campo, entonces la función u toma la forma

$$u = u(r) = u\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$$

Al estudiar tales campos es razonable valerse de las coordenadas esféricas. Las superficies de nivel de tal campo serán esferas con el centro en el centro del campo y por eso estos campos a menudo llevan el nombre de *esféricos*.

El campo escalar se llama *axial* si la función del campo $u(P)$ depende sólo de la distancia entre el punto del campo P y cierto eje. Si este eje se toma por el eje Oz y la distancia del punto P al eje se designa con r, entonces la función u toma la forma

$$u = u(r) = u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Al investigar tales campos es conveniente aplicar las coordenadas cilíndricas. Las superficies de nivel de estos campos son cilindros circulares, cuyos ejes coinciden con el eje del campo. Estos campos también se llaman *cilíndricos*.

Si la función $u(P)$ del campo escalar toma los mismos valores en los puntos correspondientes de todos los semiplanos que pasan por la misma recta (eje del campo), este campo se llama *simétrico al eje*. Las superficies de nivel de tal campo son superficies de revolución, cuyos ejes coinciden con el eje del campo. Si el eje del campo se toma por eje Oz, al investigar tales campos es conveniente aplicar las coordenadas cilíndricas o esféricas. La función $u = u(P)$ puede ser representada, en este caso, en forma de

$$u = u(r, \theta)$$

(en coordenadas esféricas), o

$$u = u(r, z)$$

(en coordenadas cilíndricas).

Hállense los gradientes y laplacianos de los campos siguientes:

5.27. $u = f(r)$, $\quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

5.28. $u = f(r)$, $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$.

5.29. $u = F(r, \theta)$ (r, θ son coordenadas esféricas).

5.30. $u = F(r, z)$ (r, z son coordenadas cilíndricas).

OBSERVACIÓN. Los gradientes de los campos centrales, axiales y simétricos al eje forman campos vectoriales del mismo carácter: campos centrales, axiales y simétricos al eje.

RESPUESTAS

1.1. Las líneas de nivel son parábolas $y^2 = C - x$. **1.2.** Las líneas de nivel son hipérbolas $xy = C$ (para $C = 0$ es un conjunto de ejes coordenados). **1.3.** Las líneas de nivel son rectas $y = Cx$. **1.4.** Las superficies de nivel son planos paralelos $x + y + z = C$. **1.5.** Las superficies de nivel son hiperboloides de una hoja y de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 = \pm C^2$ (para $C = 0$ es un cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$). **1.6.** Las superficies de nivel son paraboloides de revolución $x^2 + y^2 = z + C$. **1.7.** Las hipersuperficies de nivel son planos paralelos cuadridimensionales $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = C$. **1.8.** Las hipersuperficies de nivel son esferas cuadridimensionales $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = C^2$. **1.9.** Circunferencias $x^2 + y^2 = C^2$. **1.10.** Hiperboloides $xy = C$ (para $C = 0$ es un conjunto de ejes coordenadas) **1.11.** Parábolas $y^2 = 2(x + C)$. **1.12.** Rectas $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$. **1.13.** Circunferencias que son secciones de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$ por los planos $c_x x + c_y y + c_z z = C_2$ perpendiculares al vector $\boldsymbol{c} = c_x \boldsymbol{i} + c_y \boldsymbol{j} + c_z \boldsymbol{k}$. **1.14.** Líneas de intersección de los cilindros hiperbólicos $y^2 - x^2 = C_1$ con cilindros idénticos $z^2 - x^2 = C_2$. **1.15.** Circunferencias que son líneas de intersección de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$ con los planos $x + y + z = C_2$. **1.16.** Rectas del espacio cuadridimensional perpendiculares al eje Ox_3 y rectas que lo intersecan: $\frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2} = \frac{x_4}{l_4}$; $x_3 = C$. **1.17.** a) Superficies cónicas con vértices en el origen de coordenadas de cuyas directrices sirven las curvas cerradas dadas; b) superficies toroidales generadas por las circunferencias con centros en la recta $x = y = z$ situados en los planos $x + y + z = C$ de cuyas secciones sirven las curvas cerradas dadas. **1.21.** $13/5$.

1.22. $4/\sqrt{5}$. **1.23.** $14/3$. **1.24.** $\cos\varphi = -4/\sqrt{41}$. **1.25.** $\frac{\partial u}{\partial n} = 2\sqrt{6}$, $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$. **1.26.** $\frac{1}{\sqrt{17}}(2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k})$. **1.27.** $P(3, 3, -3)$.

1.30. a) $xy = C$; b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1, \\ x^2 - z^2 = C_2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = C_1 x, \\ z = C_2/x. \end{cases}$

2.1. $\frac{9}{64} k\pi a^3$. **2.2.** $2k\pi a\sqrt{2a}$. **2.3.** $k\pi a^2$. **2.4.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **2.5.** $\frac{ka\sqrt{3}}{2}$.

2.6. $F = -\frac{Mmc}{(a^2 + c^2)^{3/2}}$. **2.7.** αr^2. **2.8.** $\frac{4}{3}\beta r^4$. **2.9.** $\frac{8ka^3}{15}(\sqrt{2} + 1)$

2.10. $\frac{\pi a^4 \sqrt{2}}{2}$. **2.11.** $\frac{k\pi a^3}{3}(3\sqrt{3} - 1)$. **2.12.** $\frac{27}{2} ka^3$. **2.13.** $\frac{\pi k}{4} a^2 \sqrt{a} \times$ $\times (3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}))$. **2.14.** πab. **2.15.** a) 2,3; b) 0,7; c) 0,7; d) 1.

e) 1. 2.16. $2\pi R^3$. 2.17. 91/60. 2.18. $2\pi^2a^2h$. 2.19. $\frac{2\pi R^3}{3}$. ◀ $z=R-x-y$, $x^2+y^2+(R-x-y)^2=R^2$ ó $x^2+xy+y^2=R(x+y)$. Ponemos $y=tx$. Entonces tenemos: $x=\frac{R(1+t)}{1+t+t^2}$ $y=\frac{R(t+t^2)}{1+t+t^2}=R-\frac{R}{1+t+t^2}$,

$z=-\frac{Rt}{1+t+t^2}$. Al valor $t=0$ corresponde el punto $A(R, 0, 0)$, a los valores $t=\pm\infty$, el punto $B(0, R, 0)$; al valor $t=-1$, el punto $C(0, 0, R)$. Al recorrido en el sentido positivo respecto al eje Oz corresponde el recorrido $BCAB$, es decir, la variación de t desde $-\infty$ a través -1 y 0 hasta $+\infty$.

Luego, $dx=-\frac{R(t^2+2t)}{(1+t+t^2)^2}dt$, $dy=\frac{R(2t+1)}{(1+t+t^2)^2}dt$, $dz=\frac{R(t^2-1)}{(1+t+t^2)^2}dt$.

Obtenemos $z\,dx+x\,dy+y\,dz=\frac{R^2(1+2t+3t^2+2t^3+t^4)}{(1+t+t^2)^3}dt=\frac{R^2\,dt}{1+t+t^2}$,

de donde $\oint\limits_C (a, dr)=R^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t+t^2}=R^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4}+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}=$

$=\frac{2R^2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$. ▶ 2.20. $2\pi a^2$. 2.21. $\left(2\sqrt{2}-\frac{7}{3}\right)a^3$.

2.22. $2r^2$. 2.23. -4π. 2.24. $\frac{\pi r^4}{2}$. 2.25. $-1/3$. 2.26. $\frac{\pi R^2H}{3}$. 2.27. $\frac{\pi R^2H}{4}$.

2.28. $\frac{\pi R^2H^2}{3}$. 2.29. $\frac{\pi R^4}{8}$. 2.30. 0. 2.31. πR^4. 2.32. $-\frac{R^2H}{3}$. 2.33. 0.

3.2. a^5. 3.3. $4\pi R^2$. 3.4. $-\pi R^3$. ● Ciérrese la superficie, añadiendo la base del segmento parabólico y calcúlese la parte del flujo que le corresponde. 3.5. Si $a=a_x i+a_y j$ entonces, el flujo del vector a a través del arco $\overset{\frown}{AB}$ se determina por la fórmula $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}(a, n)\,ds=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}a_x\,dx-a_y\,dy$. El teorema de Gauss—Ostrogradski

para el campo plano es: $\oint\limits_L (a, n)\,ds=\oint\limits_L a_x\,dy-a_y\,dx=$

$=\iint\limits_Q\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}\right)dx\,dy$. 3.6. $\oint\limits_L a_x\,dx+a_y\,dy=\iint\limits_Q\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\right.$

$\left.-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dx\,dy$ (fórmula de Green). ● Póngase en la fórmula anterior (problema 3.5) $a_x=a_y$, $a_y=-a_x$. 3.7. $\frac{R^5}{3}$. 3.8. $\frac{\pi R^4H}{2}$.

3.9. rot $v=2\omega$. ● La velocidad v del punto $P(r)$ que gira con una velocidad angular ω alrededor del eje que pasa por el origen de coordenadas, es igual a $[\omega, r]$. 3.12. a) a^2. ● Páseso a la forma paramétrica poniendo $y=tx$; al bucle corresponde la variación de t desde 0 hasta $+\infty$. b) $\frac{3}{8}\pi\frac{a^2b^2}{c^2}$. 3.13. $\frac{4}{3}\pi R^3$. 3.14. $\frac{3}{2}\pi R^4$.

3.15. $\frac{R^3}{3}$. 3.16. $\operatorname{div}(c u)=(c, \operatorname{grad} u)$ $\operatorname{div}(a, u)=u \operatorname{div} a+(a, \operatorname{grad} u)$.

3.17. $\operatorname{grad}(a, c)=[c, \operatorname{rot} a]+(c, \nabla) a$, $\operatorname{grad}(a, b)=[b, \operatorname{rot} a]+$ $+[a, \operatorname{rot} b]+(b, \nabla) a+(a, \nabla) b$. ▶ Previamente hállese $[c, \operatorname{rot} a]$. Tenemos $[c, \operatorname{rot} a]=[c,[\nabla, a]]=(a, c) \nabla-(c, \nabla) a=\nabla(a, c)-(c, \nabla) a$.

De aquí, $\nabla(a, c)=[c, \operatorname{rot} a]+(c, \nabla) a$; luego, $\operatorname{grad}(a, b)=\nabla(\overset{\downarrow}{a}, b)+$ $+\nabla(\overset{\downarrow}{b}, a)$ y empleemos el resultado anterior. ▶ 3.18. $\operatorname{div}[a, c]=$ $=(c, \operatorname{rot} a)$, $\operatorname{div}[a, b]=(b, \operatorname{rot} a)-(a, \operatorname{rot} b)$. 3.19. $\operatorname{rot}(c u)=$ $=[\operatorname{grad} u, c]$, $\operatorname{rot}(a u)=u \operatorname{rot} a+[\operatorname{grad} u, a]$, $\operatorname{rot}[a, b]=(b, \nabla) a-$ $-(a, \nabla) b+a \operatorname{div} b-b \operatorname{div} a$. ● Véase la solución del ejemplo 5.

3.20. $\operatorname{div} \operatorname{grad} u=\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\operatorname{grad} \operatorname{div} a=\nabla(\nabla, a)=$ $=\frac{\partial(\operatorname{div} a)}{\partial x} i+\frac{\partial(\operatorname{div} a)}{\partial y} j+\frac{\partial(\operatorname{div} a)}{\partial z} k$, $\operatorname{rot} \operatorname{rot} a=[\nabla[\nabla, a]]=$ $=\nabla(\nabla, a)-\nabla^2 a=\operatorname{grad} \operatorname{div} a-\nabla^2 a$, $\nabla^2 a=\nabla^2 a_x i+\nabla^2 a_y j+\nabla^2 a_z k$.
3.21. $6 r=6(x i+y j+z k)$. 3.22. 0. 3.23. $4 r=4(x i+y j+z k)$.
3.24. $u \operatorname{div} \operatorname{grad} v+2(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)+v \operatorname{div} \operatorname{grad} u$. 3.25. $\operatorname{grad} \operatorname{div}(u c)=$ $=(c, \nabla) \operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad} \operatorname{div}(u a)=u \operatorname{grad} \operatorname{div} a+\operatorname{div} a \operatorname{grad} u+[\operatorname{grad} u,$ $\operatorname{rot} a]+(\operatorname{grad} u, \nabla) a+(a, \nabla) \operatorname{grad} u$. 3.26. $\operatorname{rot} \operatorname{rot}(u c)=(c, \nabla) \operatorname{grad} u-$ $-c \nabla^2 u$.

4.1. $x^3 y-x y^3+C$. 4.2. $2 \sqrt{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 y+\operatorname{sen}^2 x \cos^2 y}+C$.
4.3. $x y z-\frac{x^2 y}{2}+\frac{y^2 z^2}{2}+C$. 4.4. $\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+C$. ● Tómese por punto inicial A el punto (1, 1, 1) ó cualquier otro punto no situado en los ejes de coordenadas. 4.5. $\frac{y z}{x^2}+\frac{x z}{y^2}-\frac{x y}{z^2}+C$. ● Véase la indicación al problema anterior.

4.6. ◀ Si en todo punto del campo potencial continuo pudiesen existir líneas vectoriales cerradas, entonces la circulación a lo largo de tal línea no podría ser igual a cero, ya que el producto (a, dr) a lo largo de toda la línea conservaría un signo constante y por eso $\oint (a, dr) \neq$ $\neq 0$. ▶ 4.7. El punto singular es $O(0, 0)$, la constante cíclica es igual a 2π. 4.8. ● Tómense dos contornos arbitrarios cerrados que cercan el punto singular dado: AMA y BNB. Únanse los puntos M y N mediante el segmento de una recta y aplíquese al contorno compuesto $AMNBNMA$ la fórmula de Green. 4.9. ● Al determinar el potencial utilícense los contornos que recorren los puntos singulares varias veces y en distintas direcciones. 4.15. ● Aplíquese el teorema de Gauss—Ostrogradski y téngase en consideración que en la superficie lateral del tubo $(a, n)=0$. 4.17. ● Aplíquese el teorema de Gauss—Ostrogradski y considérese que para las funciones armónicas $\nabla^2 u=0$.
4.18. a) No; b) no; c) sí; d) sólo para $A+C=0$; e) sólo si $A+C=$ $=B+D=0$; f) sí; g) sólo cuando $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$; h) sólo

si $a_{111}+a_{122}+a_{133}=a_{112}+a_{222}+a_{233}=$ $=a_{113}+a_{223}+a_{333}=0$. **5.1.** Líneas x: $\frac{x}{1}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{0}$; líneas y: $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-z_0}{0}$; líneas z: $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z}{1}$.

5.2. líneas r: $\varphi=\varphi_0$, $z=z_0$ (los rayos que parten de los puntos del eje Oz y que se encuentran en los planos horizontales); líneas φ: $r=r_0$, $z=z_0$ (las circunferencias con centros en el eje Oz y radio r_0 las cuales se encuentran en los planos $z=z_0$); líneas z: $r=r_0$, $\varphi=\varphi_0$ (las rectas paralelas al eje Oz). **5.3.** Líneas r: $\theta=\theta_0$, $\varphi=\varphi_0$ (los rayos que parten del origen de coordenadas), líneas θ: $r=r_0$, $\varphi=\varphi_0$ (las semicircunferencias de radio r_0 y con centro en el origen de coordenadas, las cuales se encuentran en los semiplanos $\varphi=\varphi_0$ que pasan por el eje Oz, es decir, meridianos). Líneas φ: $r=r_0$, $\theta=\theta_0$ (las circunferencias de radio r_0 sen θ_0 y con centro en el eje Oz, las cuales se encuentran en los planos horizontales, es decir, las paralelas). **5.4.** $L_x=L_y=L_z=1$. **5.5.** $L_r=L_z=1$, $L_\varphi=r$. **5.6.** $L_r=1$, $L_\theta=r$, $L_\varphi=r\,\text{sen}\,\theta$. **5.7.** $ds_x=dx$, $ds_y=dy$, $ds_z=dz$; $d\sigma_x=dy\,dz$, $d\sigma_y=dx\,dz$, $d\sigma_z=dx\,dy$; $dv=dx\,dy\,dz$. **5.8.** $ds_r=dr$, $ds_\varphi=r\,d\varphi$, $ds_z=dz$; $d\sigma_r=r\,d\varphi\,dz$, $d\sigma_\varphi=dr\,dz$, $d\sigma_z=r\,dr\,d\varphi$; $dv=r\,dr\,d\varphi\,dz$. **5.9.** $ds_r=dr$, $ds_\theta=r\,d\theta$, $ds_\varphi=r\,\text{sen}\,\theta\,d\varphi$; $d\sigma_r=r^2\,\text{sen}\,\theta\,d\theta\,d\varphi$, $d\sigma_\theta=r\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\varphi$, $d\sigma_\varphi=r\,dr\,d\theta$; $dv=r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$.

5.10. $\frac{\partial u}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}e_\varphi+\frac{\partial u}{\partial z}e_z$. **5.11.** $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+r\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)$. **5.12.** $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ra_r)}{\partial r}+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$. **5.13.** $\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)e_r+\left(\frac{\partial a_r}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial r}\right)e_\varphi+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right)e_z$. **5.14.** $\frac{\partial u}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}e_\theta+\frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}e_\varphi$. **5.15.** $\frac{1}{r^2\,\text{sen}\,\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\right)$. **5.16.** $\frac{1}{r^2\,\text{sen}\,\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2a_r)+r\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta\,\text{sen}\,\theta)+r\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right)$. **5.17.** $\frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\varphi\,\text{sen}\,\theta)-\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right)e_r+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)\right)e_\theta+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta)-\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right)e_\varphi$.

5.19. a) $\text{div}\,e_r=\frac{1}{r}$, $\text{rot}\,e_r=0$; b) $\text{div}\,e_\varphi=0$, $\text{rot}\,e_\varphi=\frac{e_z}{r}$; c) $\text{div}\,e_z=0$, $\text{rot}\,e_z=0$. **5.20.** a) $\text{div}\,e_r=\frac{2}{r}$, $\text{rot}\,e_r=0$; b) $\text{div}\,e_\theta=\frac{\text{ctg}\,\theta}{r}$, $\text{rot}\,e_\theta=\frac{e_\varphi}{r}$; c) $\text{div}\,e_\varphi=0$, $\text{rot}\,e_\varphi=\frac{\text{ctg}\,\theta}{r}e_r-\frac{1}{r}e_\theta$.

5.21. a) $u = C_1 \ln r + C_2$; b) $u = C_1\varphi + C_2$; c) $u = C_1 z + C_2$. **5.22.** a) $u = \frac{C_1}{r} + C_2$; b) $u = C_1 \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + C_2$; c) $u = C_1\varphi + C_2$. **5.23.** $u = r^2 \operatorname{sen} 2\varphi \cos 2\theta$, $\operatorname{grad} u = 2r\left(\operatorname{sen} 2\varphi \cos 2\theta\, \mathbf{e}_r - \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen} 2\theta\, \mathbf{e}_\theta + \frac{\cos 2\varphi \cos 2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, \mathbf{e}_\varphi\right)$, $\nabla^2 u = 2 \operatorname{sen} 2\varphi\, (1 - 2\operatorname{ctg}^2\theta)$. **5.24.** $u = rz \operatorname{sen} 2\varphi + r\cos 2\varphi$, $\operatorname{grad} u = (z \operatorname{sen} 2\varphi + \cos 2\varphi)\, \mathbf{e}_r + 2(z\cos 2\varphi - \operatorname{sen} 2\varphi)\, \mathbf{e}_\varphi + r \operatorname{sen} 2\varphi\, \mathbf{e}_z$, $\nabla^2 u = -\frac{3u}{r^2}$. **5.25.** $\mathbf{a} = \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{e}_\varphi$, $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{r}(2\cos\theta\, \mathbf{e}_r - \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{e}_\theta)$. **5.26.** $\mathbf{a} = rz(\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_z)$, $\operatorname{div} \mathbf{a} = 2z - r$, $\operatorname{rot} \mathbf{a} = (r + z)\, \mathbf{e}_\varphi$. **5.27.** $\operatorname{grad} u = f'(r)\, \mathbf{e}_r = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$, $\nabla^2 u = f''(r) + \frac{2f'(r)}{r}$. **5.28.** $\operatorname{grad} u = f'(r)\, \mathbf{e}_r = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$, $\nabla^2 u = f''(r) + \frac{f'(r)}{r}$. **5.29.** $\operatorname{grad} u = \frac{\partial F}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta$, $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta}$. **5.30.** $\operatorname{grad} u = \frac{\partial F}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{e}_z$, $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$.

CAPÍTULO 11

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE LAS FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

§ 1. Funciones elementales

1. Concepto de función de variable compleja. El conjunto de puntos E del plano complejo extendido se llama *conexo*, si cualesquiera dos puntos suyos pueden unirse por una curva continua, todos los puntos de la cual pertenecen al conjunto dado. El conjunto abierto conexo de los puntos del plano complejo se llama *región* y se designa mediante D, G, etc. La región D se llama *simplemente conexa*, si su frontera es un conjunto conexo; en el caso contrario la región D lleva el nombre de *región múltiplemente conexa*. Por ejemplo, el círculo $|z - z_0| < R$ es una región simplemente conexa y el anillo $0 \leqslant \leqslant r < |z - z_0| < R$, una región múltiplemente (doblemente) conexa.

Si a todo número complejo $z = x + iy$ perteneciente a la región D, según cierta regla, está puesto en correspondencia uno o varios números complejos $w = u + iv$, entonces se dice que en el conjunto D está definida la función y se escribe simbólicamente:

$$w = f(z) = u + iv = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Uno de los procedimientos más empleados para definir la función, la definición con ayuda de fórmulas, puede llevar tanto a las funciones uniformes como a las multiformes. Así pues, la función $w = z^2$ es uniforme en el plano complejo extendido, ya que a todo z le corresponde un valor de $w = z^2$ y la función $w = \sqrt{z}$, en virtud de la definición de la raíz del número complejo, es biforme en todos los puntos, excepto los puntos $z = 0$ y $z = \infty$ en los cuales es uniforme; tales puntos suelen llamarse *puntos de ramificación*. La función $w = = \operatorname{Arg} z$ es también multiforme y está definida en todo punto, excepto $z = 0$ y $z = \infty$.

La función uniforme $f(z)$ definida geométricamente en D puede considerarse como aplicación de la región D del plano (z) sobre cierto conjunto G del plano (w), que es colección de los valores de $f(z)$ correspondientes a todo $z \in D$.

EJEMPLO 1. Investíguese la aplicación que realiza la función lineal $w = az + b$.

◀ Se puede considerar esta aplicación como composición de tres aplicaciones elementales. Efectivamente, pongamos

$$w_1 = |a|\, z,$$
$$w_2 = e^{i \arg a} w_1,$$
$$w_3 = w_2 + b.$$

No es difícil ver que $w = w_3 \circ w_2 \circ w_1$. Del sentido geométrico del producto y de la suma de los números complejos está claro que la aplicación w_1 es la aplicación de alargamiento (restricción para $0 < |a| < 1$), la aplicación w_2 representa el giro de todo el plano (w_1) respecto al origen, en un ángulo $\varphi = \arg a$ y, por fin, la aplicación w_3 es una traslación paralela del plano w_2 sobre el vector que representa el número complejo b. ▶

La función $w = f(z)$ se llama *unifoliada* en la región D, si a los distintos cualesquiera valores arbitrarios $z_1 \neq z_2$ tomados de la región D, les corresponden distintos valores de la función $f(z_1) \neq f(z_2)$.

EJEMPLO 2. Hállese la región de la función unifoliada $w = z^2$.

◀ Sean $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ y $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$. Determínese la condición con la cual $z_1^2 = z_2^2$, aunque $z_1 \neq z_2$. Tenemos $\rho_1^2 e^{i2\varphi_1} = \rho_2^2 e^{i2\varphi_2}$. De aquí sacamos la conclusión de que $\rho_1 = \rho_2$ y $2\varphi_2 = 2\varphi_1 + 2k\pi$ $(k = 0, 1)$. Ya que $z_1 \neq z_2$, entonces $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$. De este modo la región de la función unifoliada $w = z^2$ no debe contener dentro puntos, cuyos módulos coinciden y los argumentos difieren en π; es decir, la región de función unifoliada es cualquier semiplano, por ejemplo $\operatorname{Re} z > 0$ o $\operatorname{Im} z > 0$. ▶

Descríbanse las regiones definidas por las siguientes relaciones y determínese si son uniformes:

1.1. $|z - z_0| < R$. **1.2.** $1 < |z - i| < 2$.

1.3. $2 < |z - i| < \infty$. **1.4.** $0 < \operatorname{Re}(2iz) < 1$.

1.5. $|z - z_0| > R$. **1.6.** $0 < |z + i| < 2$.

1.7. $\operatorname{Im}(iz) < 1$. **1.8.** $\operatorname{Re}\frac{1}{z} > \frac{1}{4}$.

Determínense en el plano complejo los conjuntos de puntos que satisfacen las relaciones indicadas:

1.9. $\operatorname{Im}\frac{z+1}{z-1} = 0$. **1.10.** $|z - i| + |z + i| < 4$.

1.11. $\operatorname{Re}\frac{z-2i}{z+2i} = 0$. **1.12.** $|z - 5| - |z + 5| < 6$.

1.13. $\arg\frac{z-z_1}{z-z_2} = 0$. **1.14*.** $\arg\frac{i-z}{z+i} = 0$.

Aplicando las desigualdades anótense los conjuntos abiertos siguientes del plano complejo:

1.15. Del primer cuadrante.

1.16. Del semiplano izquierdo.

1.17. De la franja compuesta de los puntos que se encuentran del eje imaginario a una distancia menor que tres.

1.18. Del interior de la elipse con focos en los puntos $1+i$, $3+i$ y el semieje mayor igual a tres.

1.19. Del interior del ángulo con vértice en el punto z_0 de la abertura $\pi/4$, que es simétrico respecto al rayo paralelo al semieje imaginario positivo.

Hállese $\operatorname{Arg} f(z)$ si $z = re^{i\varphi}$:

1.20. $f(z) = z^2$. **1.21.** $f(z) = z^3$.

1.22. $f(z) = \sqrt[3]{z+1}$. **1.23.** $f(z) = \sqrt{z-8}$.

1.24. $f(z) = \sqrt{z^2-4}$. **1.25.** $f(z) = \sqrt{\dfrac{z-2}{z+1}}$.

Hállense las regiones de función unifoliada de las funciones siguientes:

1.26. $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. **1.27.** $f(z) = e^z$.

1.28. $f(z) = e^{3iz}$. **1.29*.** $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

1.30. Para las aplicaciones dadas por las funciones:

a) $w = z^2$, b)** $w = \dfrac{1}{z}$

hállense las imágenes de las líneas $x = C$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ y la imagen de la región $|z| < r$, $\operatorname{Im} z > 0$.

2. Límite y continuidad de una función de variable compleja. Funciones elementales. El número $A \neq \infty$ se llama *límite* de la función $f(z)$ para $z \to z_0$ y se denota por $A = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal, que para todo $z \neq z_0$ que satisface la desigualdad $|z - z_0| < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

Decimos que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, si para cualquier $R > 0$ existe $\delta = \delta(R) > 0$ tal, que para todo $z \neq z_0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|f(z)| > R.$$

Hay que tener en cuenta que para la función dada $f(z)$, la existencia del límite por cualquier camino fijo $(z \to z_0)$ no garantiza todavía la existencia del límite $f(z)$ para $z \to z_0$.

EJEMPLO 3. Sea $f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}} - \dfrac{\bar{z}}{z}\right)$. Muéstrese que el $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ no existe.

◀ Para el límite cuando $r \to 0$ por cualquier rayo $re^{i\varphi}$ tenemos

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2i}\left(\frac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}}-\frac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}}\right)=\operatorname{sen} 2\varphi,$$

es decir, estos límites son distintos para distintas direcciones, ellos completan el segmento $[-1, 1]$ y, por consiguiente,

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar z}-\frac{\bar z}{z}\right)$$

no existe. ▶

La función $f(z)$ se llama *continua en el punto* z_0 si está definida en este punto y $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

La función continua en todo punto de la región D se llama *continua* en esta región.

La función $f(z)$ se llama *uniformemente continua* en la región D, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal, que para cualesquiera puntos z_1 y z_2 de la región D, tales que $|z_1 - z_2| < \delta$, se cumple la desigualdad $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

Citemos algunas funciones elementales de variable compleja:

a) Función lineal

$$w = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0.$$

b) Función potencial

$$w = z^n, \quad n = \in \mathbb{N}.$$

c) Raíz de índice entero n

$$w = \sqrt[n]{z}.$$

d) Función lineal fraccional

$$w = \frac{az+b}{cz+d},$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0.$$

e) Función racional general

$$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

f) Función de Zhukovski

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

g) Función exponencial

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

h) Funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z=\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}.$$

i) Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

j) Función logarítmica

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi).$$

La expresión $\ln|z|+i\arg z$ se llama *valor principal* de la función logarítmica y se designa por $\ln z$. De este modo,

$$\operatorname{Ln} z=\ln z+2k\pi i.$$

k) Funciones trigonométricas inversas $\operatorname{Arcsen} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$ y funciones hiperbólicas inversas $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$ (véanse el ejemplo 6 y los problemas 1.42—1.46).

Las aplicaciones realizadas por algunas funciones elementales y las propiedades de estas funciones serán estudiadas más adelante (en el § 3); aquí nos limitamos sólo a calcular los valores concretos de estas funciones.

EJEMPLO 4. Calcúlese $\operatorname{sen} i$.

◀ Tenemos:

$$\operatorname{sen} i=\frac{e^{ii}-e^{-ii}}{2i}=\frac{e^{-1}-e^{1}}{2i}=i\,\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}=i\operatorname{sh} 1. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 5. Calcúlese $\operatorname{ch}(2-3i)$.

◀ Tenemos

$$\operatorname{ch}(2-3i)=\frac{e^{2-3i}+e^{-2+3i}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{2}(\cos 3-i\operatorname{sen} 3)+e^{-2}(\cos 3+i\operatorname{sen} 3)\right)=$$

$$=\cos 3\operatorname{ch} 2-i\operatorname{sen} 3\operatorname{sh} 2. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 6. Hállese la expresión analítica para la función $\operatorname{Arccos} z$ cualquiera que sea el complejo z. Calcúlese $\operatorname{Arccos} 2$.

◀ Ya que la igualdad $w=\operatorname{Arccos} z$ es equivalente a la igualdad $\cos w=z$, podemos escribir que $z=\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$. De aquí hallamos

$$e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática respecto a e^{iw} obtenemos

$$e^{iw}=z+\sqrt{z^{2}-1}$$

(aquí se consideran ambos valores de la raíz). A partir de esta igualdad hallamos

$$iw = \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

es decir,

$$w = \mathrm{Arccos}\, z = -i\, \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

De aquí obtenemos

$$\mathrm{Arccos}\, 2 = -i\, \mathrm{Ln}\,(2 \pm \sqrt{3}) = -i\, \ln\,(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi. \blacktriangleright$$

1.31. Valiéndose de los símbolos lógicos escríbase la definición mencionada más arriba de la continuidad de la función en la región.

1.32. Utilizando la definición dada anteriormente de la función e^z, demuéstrese que e^z tiene un período puramente imaginario $2\pi i$, es decir, $e^{z+2\pi i} = e^z$.

Demuéstrense las identidades:

1.33. $\mathrm{sen}\, iz = i\, \mathrm{sh}\, z$. **1.34.** $\cos iz = \mathrm{ch}\, z$.
1.35. $\mathrm{tg}\, iz = i\, \mathrm{th}\, z$.

Calcúlense los valores de las funciones en los puntos indicados:

1.36. $\cos\,(1 + i)$. **1.37.** $\mathrm{ch}\, i$.
1.38. $\mathrm{sh}\,(-2 + i)$. **1.39.** $\mathrm{Ln}\,(-1)$.
1.40. $\ln i$. **1.41.** $\mathrm{Ln}\, \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Obténganse las expresiones analíticas para las funciones dadas más abajo y para cada una de ellas hállese el valor en el punto correspondiente z_0 (véase el ejemplo 6):

1.42. $w = \mathrm{Arcsen}\, z$, $z_0 = i$.
1.43. $w = \mathrm{Arctg}\, z$, $z_0 = i/3$.
1.44. $w = \mathrm{Arsh}\, z$, $z_0 = i$.
1.45. $w = \mathrm{Arch}\, z$, $z_0 = -1$.
1.46. $w = \mathrm{Arth}\, z$, $z_0 = 1 - i$.

Anteriormente la función potencial fue definida para $n \in \mathbb{N}$. Con ayuda de la función logarítmica se puede introducir también la función potencial general. Precisamente, si u y v son dos números complejos, $u \neq 0$, entonces ponemos

$$u^v = e^{v\,\mathrm{Ln}\, u},$$

con la particularidad de que para precisar consideraremos, que $\mathrm{Ln}\, u = \ln u$ para $u > 0$ reales.

Hállense todos los valores de las potencias:

1.47. 2^i. **1.48.** $(-1)^i$. **1.49.** $(1+i)^i$.

1.50. $(-1)^{\sqrt{2}}$. **1.51.** $(3-4i)^{1+i}$. **1.52.** $(-3+4i)^{1+i}$.

¿Qué determinación complementaria de las funciones dadas en el punto $z=0$ hay que hacer, para que sean continuas en este punto?

1.53. $f(z)=\dfrac{z\operatorname{Re} z}{|z|}$. **1.54.** $f(z)=\dfrac{z\operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}$.

1.55. $f(z)=e^{-1/|z|}$. **1.56.** $f(z)=z/|z|$.

1.57. Demuéstrese que la función $f(z)=e^{-1/z}$ es continua en el semicírculo $0<|z|\leqslant 1$, $|\arg z|\leqslant \pi/2$, pero no es uniformemente continua en este semicírculo y, en todo sector $0<|z|\leqslant 1$, $|\arg z|\leqslant \alpha<\pi/2$, es uniformemente continua.

§ 2. Funciones analíticas. Condición de Cauchy — Riemann

1. Derivada. Analiticidad de la función. Si en el punto $z\in D$ existe el límite

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},\quad z+\Delta z\in D,$$

entonces éste se llama *derivada* de la función $f(z)$ en el punto z y se designa mediante $f'(z)$ o $\dfrac{df(z)}{dz}$.

Si en el punto $z\in D$ la función $f(z)$ tiene la derivada $f'(z)$, se dice que la función $f(z)$ es *diferenciable* en el punto z.

La función $f(z)$ diferenciable en todo punto de la región D y que tiene en esta región la derivada continua $f'(z)$ se llama *analítica en la región D*. Diremos también que $f(z)$ es *analítica en el punto* $z_0\in D$, si $f(z)$ es analítica en cierto entorno del punto z_0.

La condición de continuidad de la derivada $f'(z)$ que figura en la definición de la analiticidad de la función $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, puede ser sustituida por una condición más débil de diferenciabilidad en cada punto $(x, y)\in D$ de las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$.

Para que la función $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ sea analítica en la región D es necesario y suficiente que existan en esta región las derivadas parciales continuas de las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$, que satisfacen las condiciones de Cauchy—Riemann

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x, y)}{\partial y},\qquad (1)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x, y)}{\partial x},$$

o, en coordenadas polares,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)}{\partial r} &= \frac{1}{r}\,\frac{\partial v(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)}{\partial\varphi},\\
\frac{\partial v(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)}{\partial r} &= -\frac{1}{r}\,\frac{\partial u(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)}{\partial\varphi}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Si se cumple la condición (1) o (2) la derivada $f'(z)$ puede ser anotada respectivamente:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\,\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3}$$

o bien

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\,\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}-i\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right). \tag{4}$$

Las fórmulas de diferenciación de las funciones de variable compleja, son análogas a las fórmulas correspondientes de diferenciación de las funciones de variable real.

EJEMPLO 1. Demuéstrese que la función $f(z)=e^{2z}$ es analítica y hállese $f'(z)$.

◀ Tenemos

$$e^{2z}=e^{2x}(\cos 2y+i\operatorname{sen} 2y),$$

es decir,

$$u(x,\ y)=e^{2x}\cos 2y,\quad v(x,\ y)=e^{2x}\operatorname{sen} 2y.$$

Por eso

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-2e^{2x}\operatorname{sen} 2y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2e^{2x}\operatorname{sen} 2y,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2e^{2x}\cos 2y.$$

Por consiguiente, las condiciones (1) se cumplen en todo el plano y según la primera de las fórmulas (3)

$(e^{2z})'=2e^{2x}\cos 2y+i2e^{2x}\operatorname{sen} 2y=2e^{2x}(\cos 2y+i\operatorname{sen} 2y)=2e^{2z}$. ▶

EJEMPLO 2. Muéstrese que la función $w=z^3$ es analítica en todo el plano complejo (excepto $z=\infty$).

◀ En efecto, tenemos $z=re^{i\varphi}$ y

$$w=z^3=r^3e^{i3\varphi}=r^3\cos 3\varphi+ir^3\operatorname{sen} 3\varphi,$$

además

$$\frac{\partial u}{\partial r}=3r^2\cos 3\varphi,\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=3r^2\operatorname{sen} 3\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-3r^3\operatorname{sen} 3\varphi,\qquad \frac{\partial v}{\partial\varphi}=3r^3\cos 3\varphi.$$

es decir, para cualquier $z = re^{i\varphi}$ finito se cumplen las condiciones (2). Aplicando la primera de las fórmulas (4) tenemos

$$f'(z) = (z^3)' = \frac{r}{3}(3r^2 \cos 3\varphi + i3r^2 \operatorname{sen} 3\varphi) = 3z^2. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 3. Muéstrese que la función logarítmica $w = \operatorname{Ln} z$ es analítica en todos los puntos finitos excepto $z = 0$, además

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}.$$

◀ Puesto que

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$$

tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial r} = 0,$$

es decir, están cumplidas las condiciones (2), y a partir de la primera de las fórmulas (4) hallamos

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{r}{z} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{z}. \blacktriangleright$$

Las funciones analíticas se emplean en la descripción de distintos procesos.

EJEMPLO 4. Analicemos el flujo plano, no vertiginoso, de un líquido incompresible ideal. Sean $v_x(x, y)$ y $v_y(x, y)$ los componentes del vector de velocidad v del flujo a lo largo de los ejes x e y, y sea

$$v(z) = v_x(x, y) - iv_y(x, y)$$

la velocidad compleja del flujo. Muéstrese que $v(z)$ es una función analítica.

◀ De la incompresibilidad del líquido se deduce que la divergencia del vector de la velocidad es idénticamente igual a cero, es decir,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

Luego, el flujo no es vertiginoso cuando y sólo cuando el rotor de su vector de la velocidad es igual a cero, es decir,

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

Pero las igualdades (6) y (7) son las condiciones de Cauchy - Riemann para la función (5), es decir, la velocidad compleja $v(z)$ es una función analítica de variable compleja $z = x + iy$.

Aclárese en qué puntos son diferenciables las funciones:

2.1. $w = \bar{z}$. **2.2*.** $w = \operatorname{Re} z$. **2.3.** $w = z \operatorname{Im} z$.

2.4. $w = z \operatorname{Re} z$. **2.5**.** $w = |z|$. **2.6.** $w = |z-1|^2$.

2.7. Suponiendo que estén cumplidas las condiciones de

Cauchy — Riemann (1) en las coordenadas rectangulares cartesianas, demuéstrese la validez de las condiciones de Cauchy — Riemann (2) en las coordenadas polares y la justeza de las fórmulas (4) para calcular la derivada en las coordenadas polares.

Verifíquese si se cumplen las condiciones de Cauchy — Riemann (1) o (2) y si se cumplen hállese $f'(z)$:

2.8. $f(z) = e^{3z}$. **2.9.** $f(z) = \operatorname{sh} z$.

2.10. $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. **2.11.** $f(z) = \cos z$.

2.12. $f(z) = \ln(z^2)$. **2.13.** $f(z) = \operatorname{sen}\frac{z}{3}$.

2.14*. Sea $f(z)$ la función analítica en la región D. Demuéstrese que si una de las funciones

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z),$$
$$f(x, y) = |f(z)|, \quad \theta(x, y) = \arg f(z)$$

conserva un valor constante en esta región, entonces también $f(z) \equiv \text{const}$ en D.

2. Propiedades de las funciones analíticas. Una serie de propiedades, características para las funciones diferenciables de variable real, siguen siendo válidas para las funciones analíticas.

2.15. Demuéstrese que si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones analíticas en la región D, entonces las funciones $f(z) \pm g(z)$, $f(z)\cdot g(z)$ son también analíticas en la región D y el cociente $f(z)/g(z)$ es una función analítica en todos los puntos de la región D, en los cuales $g(z) \neq 0$. En este caso tienen lugar las fórmulas

$$(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z),$$
$$(f(z)\, g(z))' = f'(z)\cdot g(z) + f(z)\cdot g'(z),$$
$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)\, g(z) - f(z)\, g'(z)}{g^2(z)}.$$

2.16. Sea $f(z)$ una función analítica en la región D con el campo de valores $G = \{f(z) \mid z \in D\}$, y sea analítica la función $\varphi(w)$ en la región G. Demuéstrese que $F(z) = \varphi(f(z))$ es una función analítica en la región D.

Empleando las afirmaciones del problema 2.15 hállense las regiones de analiticidad de las funciones y sus derivadas:

2.17. $f(z)=\operatorname{tg} z$. **2.18.** $f(z)=z\cdot e^{-z}$.

2.19. $f(z)=\dfrac{z\cdot\cos z}{1+z^2}$. **2.20.** $f(z)=\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$.

2.21. $f(z)=\dfrac{1}{\operatorname{tg} z+\operatorname{ctg} z}$. **2.22.** $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$.

2.23. $f(z)=\operatorname{cth} z$. **2.24.** $f(z)=\dfrac{\cos z}{\cos z-\operatorname{sen} z}$.

2.25. Demuéstrese que las partes real e imaginaria de la función $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ analítica en la región D son funciones armónicas en esta región, es decir, sus laplacianos son iguales a cero:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad \Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

2.26. Obténgase la expresión del laplaciano Δu en las coordenadas polares ($u=u(r,\varphi)$).

Señalemos que dada la parte real o imaginaria la función analítica en la región D se determina con una exactitud de hasta la constante arbitraria (compleja). Por ejemplo, si $u(x,y)$ es la parte real de la función $f(z)$ analítica en la región D, entonces

$$v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}=u'_y\,dx+u'_x\,dy$$

donde (x_0, y_0) es un punto fijo en la región D y el camino de integración también se encuentra en la región D.

EJEMPLO 5. Compruébese que la función $u=x^2-y^2-5x+y+2$ es la parte real de cierta función analítica $f(z)$ y hállese $f(z)$.

◀ Ya que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0$$

en todo el plano, entonces $u(x,y)$ es una función armónica y en este caso

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(2y-1)\,dx+(2x-5)\,dy=$$

$$=\int_{x_0}^{x}(2y_0-1)\,dx+\int_{y_0}^{y}(2x-5)\,dy=(2y_0-1)(x-x_0)+$$

$$+(2x-5)(y-y_0)=2xy-x-5y+5y_0+x_0-2x_0y_0,$$

es decir,

$$v(x, y) = 2xy - x - 5y + C$$

y

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 - y^2 - 5x + y + 2 + i(2xy - x - 5y + C) = \\ &= (x^2 + 2ixy - y^2) - 5(x + iy) + (-xi + y) + 2 + Ci = \\ &= z^2 - 5z - iz + 2 + Ci. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

EJEMPLO 6. Muéstrese que la función del tipo

$$u(x, y) = a(x^2 + y^2) + bx + cy + d, \quad a \neq 0,$$

no es parte real (o imaginaria) de ninguna función analítica.

◀ Efectivamente, esto se deduce de las relaciones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4a \neq 0. \ \blacktriangleright$$

Compruébese si son armónicas en las regiones indicadas, las funciones dadas más abajo y hállese, cuando es posible, la función analítica según los datos de su parte real o imaginaria:

2.27. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

2.28. $v(x, y) = 2e^x \operatorname{sen} y$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

2.29. $u(x, y) = 2xy + 3$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

2.30. $v(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $0 < |x| < \infty$.

2.31. $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y$, $0 < |z| < \infty$.

2.32. $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

2.33. $v(x, y) = xy$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

§ 3. Aplicaciones conformes

1. Sentido geométrico del módulo y del argumento de la derivada. Sea $w = f(z)$ la función analítica en el punto z_0 y $f'(z_0) \neq 0$. Entonces $k = |f'(z_0)|$ es igual geométricamente al coeficiente de alargamiento en el punto z_0 para la aplicación $w = f(z)$ (más precisamente, para $k > 1$ tiene lugar el alargamiento y para $k < 1$, la contracción). El argumento de la derivada $\varphi = \arg f'(z_0)$ es igual geométricamente al ángulo, en el que hay que girar la tangente en el punto z_0 a cualquier curva suave L, que pasa por el punto z_0 para obtener la tangente en el punto $w_0 = f(z_0)$ a la imagen L' de esta curva, cuando la aplicación $w = f(z)$. En este caso, si $\varphi > 0$, el giro se realiza en sentido antihorario y si $\varphi < 0$, en sentido horario.

De este modo, el sentido geométrico del módulo y del argumento de la derivada consiste en que, si la aplicación la realiza la función analítica que satisface la condición $f'(z_0) \neq 0$, $k = |f'(z_0)|$, determina el coeficiente de transformación de semejanza del elemento lineal infinitesimal en el punto z_0 y $\varphi = \arg f'(z_0)$ es el ángulo de giro de este elemento.

EJEMPLO 1. Hállense el coeficiente de alargamiento k y el ángulo de giro φ en el punto $z_0 = 1 - i$ para la aplicación $w = z^2 - z$.

◀ Puesto que $w' = 2z - 1$ y $w'|_{z=1-i} = 1 - 2i$, entonces

$$k = |1 - 2i| = \sqrt{5}$$

$$\varphi = \arg(1 - 2i) = -\operatorname{arctg} 2. \text{ ▶}$$

Hállense el coeficiente de alargamiento k y el ángulo de giro φ para las aplicaciones dadas $w = f(z)$ en los puntos indicados:

3.1. $w = z^2$, $z_0 = \sqrt{2}(1 + i)$. **3.2.** $w = z^2$, $z_0 = i$.

3.3. $w = z^3$, $z_0 = 1 + i$. **3.4.** $w = z^3$, $z_0 = 1$.

3.5. $w = \operatorname{sen} z$, $z_0 = 0$. **3.6.** $w = ie^{2z}$, $z_0 = 2\pi i$.

Determínese qué parte del plano complejo se alarga y qué parte se contrae para las aplicaciones siguientes,

3.7. $w = 1/z$. **3.8.** $w = e^{z-1}$.

3.9. $w = \ln(z + 1)$. **3.10.** $w = z^2 + 2z$.

Hállense los conjuntos de todos los puntos z_0, en los cuales para las aplicaciones siguientes el coeficiente de alargamiento es $k = 1$:

3.11. $w = (z - 1)^2$. **3.12.** $w = z^2 - iz$.

3.13. $w = \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$. **3.14.** $w = -z^3$.

Hállense los conjuntos de todos los puntos z_0, en los cuales para las aplicaciones siguientes el ángulo de giro es $\varphi = 0$:

3.15. $w = -\dfrac{i}{z}$. **3.16*.** $w = \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$.

3.17. $w = z^2 + iz$. **3.18.** $w = z^2 - 2z$.

2. Aplicaciones conformes. Funciones lineal y lineal fraccional. La aplicación biunívoca de la región D del plano (z) sobre la región G del plano (w) se llama *conforme*, si en todo punto de la región D posee propiedades de conservación de los ángulos y de constancia de alargamientos.

Criterio del carácter conforme de la aplicación. Para que la aplicación de la región D dada por la función $w = f(z)$ sea conforme, es necesario y suficiente que $f(z)$ sea una función uniforme y analítica en la región D, además $f'(z) \neq 0$ en todos los puntos de D.

En adelante la imagen de la región D que se aplica por la función $w = f(z)$ se designa por E o por $f(D)$.

Ejemplo 2. Muéstrese que la aplicación realizada por la función $w = z^3$ es conforme en la región

$$D = \left\{z \mid 1 < |z| < 2, \quad 0 < \arg z < \frac{2\pi}{3}\right\}.$$

◀ Es necesario comprobar si la función dada es analítica y unifoliada en D y si $f'(z) \neq 0$ en todos los puntos de D. La analiticidad de la función $w = z^3$ fue mostrada más arriba (véase el ejemplo 2 del § 2), la relación $w' = 3z^2 \neq 0$ para todo $z \in D$ es evidente. El carácter unifoliado se deduce de que la región D está dispuesta en el ángulo con vértice en el origen de coordenadas y de magnitud $\frac{2\pi}{3}$ (véase el problema 1.26). ▶

Aclárese qué funciones de las dadas $w = f(z)$ determinan las aplicaciones conformes de las regiones indicadas D:

3.19. $w = (z+i)^2$, $D = \left\{z \mid 1 < |z+i| < 3, \right.$

$$\left. 0 < \arg z < \frac{3}{2}\pi\right\}.$$

3.20. $w = |z|^2$, $D = \{z \mid |z| < 1\}$.

3.21. $w = e^z$, $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$.

3.22. $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $D = \left\{z \left| \frac{1}{2} < |z| < 1\right.\right\}$.

3.23. $w = (z-1)^3$, $D = \{z \mid |z-1| < 1\}$.

La aplicación realizada por la función lineal $w = az + b$ está estudiada más arriba (véase el ejemplo 1 del § 1). Esta representa una composición del alargamiento ($w_1 = |a| z$), del giro ($w_2 = e^{i \arg a} w_1$) y de la traslación paralela ($w_3 = w_2 + b$). La inversa a la función lineal es también una función lineal $z = \frac{1}{a} w - \frac{b}{a}$. Puesto que $w' = a \neq 0$, entonces la aplicación w es conforme en todo el plano ampliado, además tiene dos puntos inmóviles $z_1 = \frac{b}{1-a}$ (para $a \neq 1$) y $z_2 = \infty$.

Ejemplo 3. Aclárese si existe la función lineal que aplica el triángulo con vértices 0, 1, i en el plano (z) sobre el triángulo con vértices 0, 2, $1+i$ en el plano (w).

◀ Señalemos que el triángulo con vértices 0, 1, i es semejante al triángulo con vértices 0, 2, $1+i$, con la particularidad de que el vértice en el punto $z_1 = 0$ corresponde al vértice en el punto $w_1 = 1+i$, el vértice en el punto $z_2 = 1$ corresponde al vértice en el punto $w_2 = 0$ y el vértice en el punto $z_3 = i$, al vértice en el punto $w_3 = 2$. Realicemos sucesivamente las transformaciones:

a) $w_1 = e^{\frac{5\pi i}{4}} z$ es un giro alrededor del origen de coordenadas en un ángulo $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ en el sentido antihorario;

b) $w_2 = \sqrt{2}w_1$ es homotecia con el coeficiente $k = \sqrt{2}$;

c) $w_3 = w_2 + (1 + i)$ es traslación paralela sobre el vector que representa el número complejo $1 + i$.

Como resultado el triángulo con vértices 0, 1, i se aplica sobre el triángulo con vértices 0, 2, $1 + i$ y la función lineal entera que realiza esta aplicación tiene la forma

$$w = w_3 \circ w_2 \circ w_1 = 2\sqrt{e}^{-i\frac{5\pi}{4}} z + (1+i) =$$
$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z + 1 + i = (1+i)(1-z). \blacktriangleright$$

3.24. Demuéstrese que la aplicación realizada por la función lineal entera tiene dos puntos inmóviles (que coinciden si $a = 1$).

Para las aplicaciones indicadas más abajo hállense el punto inmóvil finito z_0 (si existe), el ángulo de giro φ y el coeficiente de homotecia k:

3.25. $w = 2z + 1$. **3.26.** $w = iz + 4$.

3.27. $w = e^{i\frac{\pi}{4}} z - e^{-i\frac{\pi}{4}}$. **3.28.** $w = az + b$.

La función lineal fraccional

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad c \neq 0,$$

realiza la aplicación conforme del plano ampliado (z) sobre el plano ampliado (w). En este caso por ángulo entre las curvas en el punto $z = \infty$, se entiende el ángulo en el punto $z^* = 0$ entre las imágenes de estas curvas, obtenidas mediante la aplicación $z^* = \frac{1}{z}$. La función lineal fraccional elemental (distinta de la lineal) es la función $w = \frac{1}{z}$ que puede ser representada en la forma de composición de la inversión respecto a la circunferencia unitaria $w_1 = \frac{1}{\bar{z}}$ y a la conjugación compleja $w_2 = \bar{w}_1$. La función lineal fraccional elemental aplica las circunstancias del plano (z) en las circunferencias del plano (w) (la recta se considera como circunferencia de radio infinito). Puesto que la función lineal fraccional general se representa en la forma de composición de la función lineal $w_1 = cz + d$, de la lineal fraccional elemental $w_2 = \frac{1}{w_1}$ y de nuevo de la lineal $w_3 = \frac{bc - ad}{c} w_2 + \frac{a}{c}$, entonces ella también aplica la circunferencia en la circunferencia.

La función lineal fraccional se define completamente si están dadas las aplicaciones de tres puntos $z_1 \to w_1$, $z_2 \to w_2$ y $z_3 \to w_3$:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}. \tag{1}$$

OBSERVACION. Si uno de los puntos z_1, z_2 ó z_3 o bien w_1, w_2 ó w_3 es un punto infinitamente alejado, entonces en la fórmula (1) todas las diferencias que contienen este punto deben ser sustituidas por unidades.

EJEMPLO 4. Hállese la imagen de la circunferencia $x^2+y^2=2x$ para la aplicación $w=\frac{1}{z}$.

▶ Poniendo $z=x+iy$ tenemos $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de la circunferencia, hallamos

$$x^2+y^2-2x=z\cdot\bar{z}-(z+\bar{z})=0,$$

y después del cambio $z=\frac{1}{w}$ tenemos

$$\frac{1}{w\bar{w}}-\frac{1}{w}-\frac{1}{\bar{w}}=0,$$

es decir, $w+\bar{w}=1$. Si $w=u+iv$, entonces $w+\bar{w}=2u$. De este modo la circunferencia $x^2+y^2-2x=0$ se transforma en la recta $u=1/2$ paralela al eje imaginario. ▶

EJEMPLO 5. Hállese la aplicación lineal fraccionaria que hace pasar los puntos -1, i, $i+1$ en el punto 0, $2i$, $1-i$.

◀ Empleando la fórmula (1) tenemos

$$\frac{w-0}{w-2i}\cdot\frac{1-i-2i}{1-i-0}=\frac{z+1}{z-i}\cdot\frac{i+1-i}{i+1+1},$$

de donde

$$\frac{w}{w-2i}=\frac{1}{5}\,\frac{z+1}{z-i}$$

y

$$w=-\frac{2i(z+1)}{4z-5i-1}. \;▶$$

Hállense las imágenes de las siguientes líneas para las aplicaciones $w=\frac{1}{z}$:

3.29. De la circunferencia $x^2+y^2=y/3$.

3.30. De la recta $y=-x/2$.

3.31. De la recta $y=x-1$.

3.32. De la circunferencia $x^2+y^2+2x-2y+1=0$.

3.33. Demuéstrese que la función $w = \frac{1}{z}$ transforma en una recta la circunferencia $A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy = 0$ que pasa por el origen de coordenadas y transforma a toda recta $Bx + Cy + D = 0$ en una circunferencia, que pasa por el origen de coordenadas.

Hállese la transformación homográfica a partir de las condiciones dadas:

3.34. Los puntos i, 1, $1 + i$ pasan a puntos 0, ∞, 1.

3.35. Los puntos 1 e i son inmóviles y el punto 0 pasa a ∞.

3.36. El punto $\frac{1}{2}$ y 2 son inmóviles y $\frac{5}{4} + \frac{3}{4} i$ pasan a ∞.

3.37. Demuéstrese que la transformación homográfica $w = \frac{az+b}{cz+d}$ tiene dos puntos inmóviles. ¿Cuál es la condición de coincidencia de estos puntos? ¿Cuándo el punto infinitamente alejado es inmóvil?

Los puntos z_1 y z_2 se llaman simétricos respecto a la recta, si están situados sobre la perpendicular a esta recta a distintos lados de ella y a distancias iguales.

Los puntos z_1 y z_2 se llaman *simétricos respecto a la circunferencia*, si están situados sobre un rayo que sale del centro de esta circunferencia, a distintos lados de ella y de tal modo que el producto de las distancias de estos puntos al centro, es igual al cuadrado del radio.

Los puntos M y N simétricos respecto a la recta o la circunferencia en el plano (z) se aplican por la función lineal fraccionaria en los puntos M' y N', simétricos respecto a la imagen de esta recta o la circunferencia en el plano (w).

3.38. Hállense los puntos simétricos al punto $1 + i$ respecto a las circunferencias:

a) $|z| = 1$; b)* $|z - i| = 2$.

3.39. Para la aplicación $w = \frac{z-i}{z+i}$ hállese la imagen del punto simétrico al punto $1 - i$ respecto a:

a) la recta $y = x$; b) la circunferencia $|z - 1| = 3$.

EJEMPLO 6. Hállese la aplicación del círculo $|z| < 1$ sobre el círculo $|w| < 1$ tal, que el punto $z = \alpha$ ($|\alpha| < 1$) se aplique en el centro del círculo $w = 0$.

◀ Escribamos la transformación homográfica en la forma

$$w = g\,\frac{z - z_0}{z - z_1}.$$

Ya que el punto $z = \alpha$ pasa al punto $w = 0$, entonces $z_0 = \alpha$ y puesto que el punto $w = \infty$ es simétrico al punto $w = 0$, entonces z_1 es simétrico al punto $z = \alpha$ respecto a la circunferencia $|z| = 1$, es decir, $z_1 = \dfrac{1}{\bar{\alpha}}$. Por eso

$$w = g\bar{\alpha}\,\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}.$$

Luego, el punto de la circunferencia $|z| = 1$ pasa al punto de la circunferencia $|w| = 1$ y por eso para $z = e^{i\varphi}$ tenemos

$$1 = |g\bar{\alpha}|\left|\frac{e^{i\varphi}-\alpha}{\bar{\alpha}e^{i\varphi}-1}\right|.$$

Pero

$$\left|\frac{e^{i\varphi}-\alpha}{e^{i\varphi}\bar{\alpha}-1}\right|^2 = \frac{(e^{i\varphi}-\alpha)(e^{-i\varphi}-\bar{\alpha})}{(e^{i\varphi}\bar{\alpha}-1)(e^{-i\varphi}\alpha-1)} =$$

$$= \frac{1+|\alpha|^2-e^{i\varphi}\bar{\alpha}-e^{-i\varphi}\alpha}{|\alpha|^2+1-e^{i\varphi}\bar{\alpha}-e^{-i\varphi}\alpha} = 1.$$

Por consiguiente, $|g\bar{\alpha}| = 1$, es decir, $|g\bar{\alpha}| = e^{i\theta}$ y la aplicación buscada tiene el aspecto

$$w = e^{i\theta}\,\frac{z-\alpha}{z\bar{\alpha}-1}. \blacktriangleright \tag{2}$$

Para la aplicación (2) del círculo unitario sobre sí mismo hállense los parámetros α y θ según las condiciones dadas:

3.40. $w(1/2) = 0$, $\arg w'(1/2) = 0$.

3.41. $w(0) = 0$, $\arg w'(0) = \pi/2$.

3.42. $w = (z_0) = 0$, $\arg w'(z_0) = \pi/2$.

3.43. Demuéstrese que la función

$$w = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}, \quad \operatorname{Im}\alpha > 0, \tag{3}$$

aplica el semiplano superior sobre el círculo unitario.

Determínense los parámetros α y θ en la fórmula (3) según las condiciones dadas:

3.44. $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = -\pi/2$.

3.45. $w(2i) = 0$, $\arg w'(2i) = \pi$.

3.46. $w(z_0) = 0$, $\arg w'(z_0) = \pi/2$.

Hállese la imagen E de la región D para la transformación homográfica:

3.47. $D=\{z \mid \operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Im} z>0\}$; $w=\dfrac{z-i}{z+i}$.

3.48*. $D=\left\{z \mid 0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}\right\}$: $w=\dfrac{1}{z-1}$.

3.49*. $D=\left\{z \mid 1\leqslant |z|\leqslant 2,\ 0\leqslant \arg z\leqslant \dfrac{\pi}{4}\right\}$; $w=1+\dfrac{1}{z}$.

3.50. $D=\{z \mid |z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$; $w=i\,\dfrac{1-z}{1+z}$.

3.51. $D=\{z \mid 0<\operatorname{Re} z<1\}$; $w=\dfrac{z-1}{z-2}$.

3.52. D es una lúnula (circular) comprendida entre las circunferencias $|z-1|=1$, $|z-i|=1$; $w=-\dfrac{z}{z-1-i}$.

3.53.** Hállese la región D en el plano (z), la cual para la aplicación $w=\dfrac{z}{1-z}$ se transforma en el interior del círculo $|w|<r$ del plano (w).

3. Función potencial. La aplicación realizada por la función potencial $w=z^n$ ($n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$), es conforme en el plano complejo ampliado en todos los puntos, excepto el punto $z=0$ $(w'|_{z=0}=$ $=nz^{n-1}|_{z=0}=0)$. El ángulo $D=\left\{z \,\middle|\, \dfrac{2k\pi}{n}<\arg z<\dfrac{2(k+1)\pi}{n}\right\}$ para todo $k=0, 1, \ldots, n-1$ se aplica biyectivamente por la función potencial sobre todo el plano (w) con el corte por la parte positiva del eje real (además, al rayo $\arg z=\dfrac{2k\pi}{n}$ le corresponde el extremo superior del corte y al rayo $\arg z=\dfrac{2(k+1)\pi}{n}$, el extremo inferior). La función inversa $w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{\left(i\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}$, donde $k=0, 1, \ldots, n-1$, $r=|z|$, $\varphi=\arg z$, es, como se sabe, multiforme. Su rama uniforme (formada por la representación de la imagen de uno de los puntos) aplica el plano (z) con el corte según la parte negativa del eje real, sobre el sector correspondiente

$$E=\left\{w \,\middle|\, \frac{2k\pi}{n}<\arg w<\frac{2(k+1)\pi}{n}\right\},$$

k está fijo.

EJEMPLO 7. Hállese cómo se aplica el interior de la lúnula con vértices z_1 y z_2, formada por las circunferencias C_1 y C_2 sobre el círculo unitario.

◀ La transformación $w_1=-\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ aplica el punto $z=\dfrac{z_1+z_2}{2}$ en el punto $w_1=1$, el punto $z=z_1$ en el cero y el punto $z=z_2$ en el infinito. De este modo, el segmento que une los puntos z_1 y z_2 se aplica sobre el semieje real positivo. Los arcos de las circunferencias que forman la lúnula se aplican en los rayos $\arg w_1 = \alpha\pi$ y $\arg w_1 = -\beta\pi$. Por consiguiente, la región D se aplica sobre el sector $E_1 = \{w_1 \mid -\beta\pi < \arg w_1 < \alpha\pi\}$ (compárese con el problema 3.52). Giremos este sector en un ángulo $\beta\pi$, es decir, realicemos la transformación $w_2 = e^{i\beta\pi} w_1$ y elevemos la función obtenida a la potencia $\frac{1}{\beta+\alpha}$:

$$w_3 = (w_2)^{\frac{1}{\beta+\alpha}}.$$

El sector se aplicará en el semiplano superior. La función

$$w_4 = e^{i\theta}\,\frac{w_3 - w_3^0}{w_3 - \overline{w_3^0}}$$

aplica el semiplano sobre el círculo unitario. Las magnitudes w_3^0 y θ se determinan por la representación complementaria de la aplicación

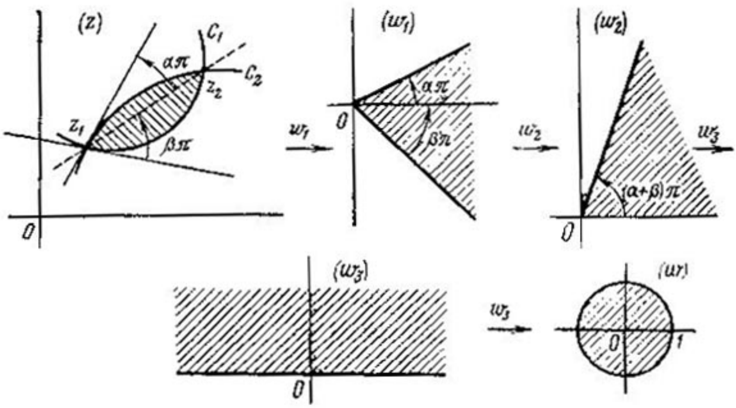


Fig. 94

del punto z_0 en el punto $w = 0$ y por la condición $\arg w'(z_0) = \gamma$. Definitivamente, $w = w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1$ (fig. 94). ▶

Hállese la función que aplica la región dada D del plano (z) sobre el semiplano superior (en las respuestas se indica una de las funciones que realizan la aplicación dada, además, si la función es multiforme, entonces se tiene en cuenta una de sus ramas uniformes):

3.54. $D = \{z \mid |z| < 1,\ |z-1| < 1\}$.

3.55. $D = \left\{z \mid -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}$.

3.56. $D = \{z \mid |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

3.57. $D = \{z \mid |z| > 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

3.58. $D = \{z \mid |z| < 2,\ 0 < \arg z < \pi/4\}$.
3.59. $D = \{z \mid |z| > 2,\ 0 < \arg z < 3\pi/2\}$.
3.60. $D = \{z \mid |z| < 2,\ \operatorname{Im} z > 1\}$.
3.61. $D = \{z \mid |z| < 1,\ |z + i| < 1\}$.
3.62. $D = \{z \mid |z| < 1,\ |z + i| > 1\}$.
3.63. $D = \{z \mid |z| > 1,\ |z + i| < 1\}$.
3.64. D es el plano (z) cortado según el segmento $[-i, i]$.
3.65. D es el plano (z) cortado según el segmento que une los puntos $1 + i$ y $2 + 2i$.
3.66. D es el plano con corte según los rayos $(-\infty, -R]$ y $[R, +\infty)$, $R > 0$.
3.67. D es el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ cortado según el segmento que une los puntos 0 e ih $(h > 0)$.

4. Función de Zhukovski. Tenemos $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $w' = \frac{1}{2}\frac{z^2 - 1}{z^2}$. Por consiguiente, la función de Zhukovski [1]) es conforme en todos los puntos del plano ampliado excepto los puntos $z_{1,2} = \pm 1$ y $z_3 = 0$. Ella aplica tanto el exterior, como el interior del círculo unitario del plano (z) sobre el plano (w) con corte por el segmento $[-1, 1]$. El plano completo (z) se aplica sobre la superficie de dos hojas de Riemann, pegada cruciformemente según los cortes $[-1, 1]$.

La función inversa

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

es biforme, además cada rama aplica el plano (w) con corte por el segmento $[-1, 1]$ sobre el interior o sobre el exterior del círculo unitario en el plano (z).

EJEMPLO 8. Hállese la imagen de la red polar $\rho = \text{const}$ y $\varphi = \text{const}$ para la transformación del plano (z) con ayuda de la función de Zhukovski.

◀ Poniendo $z = \rho e^{i\varphi}$, tenemos

$$w = u + iv = \frac{1}{2}\left(\rho e^{i\varphi} + \frac{1}{\rho}e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \times$$
$$\times \cos\varphi + i\,\frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\operatorname{sen}\varphi.$$

---

[1]) N. E. Zhukovski fue el primero en emplear la aplicación conforme realizada por la función $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, como método para obtener una sola clase de perfiles aerodinámicos, que recibieron el nombre de perfiles de Zhukovski. Los perfiles de Zhukovski se aplican sobre el círculo, para el cual es fácil resolver el problema del flujo currentilíneo, lo que da la posibilidad de investigar el flujo currentilíneo del ala de avión.

Por consiguiente,

$$u=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi,\quad v=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\operatorname{sen}\varphi$$

y para $\rho\neq 1$ tenemos

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)^2}=1 \tag{4}$$

y

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi}-\frac{v^2}{\operatorname{sen}^2\varphi}=1. \tag{5}$$

De estas igualdades concluimos que las circunferencias $|z|=\rho\neq 1$ se aplican en las elipses del plano (w) con los semiejes $a=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)$ y $b=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)$ para $\rho>1$ ó $b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\rho\right)$ para $\rho<1$. Los rayos $\varphi=\text{const}$ en el plano (z) se transforman, en las hipérbolas con los semiejes $a=|\cos\varphi|$ y $b=|\operatorname{sen}\varphi|$, en el plano (w).

Señalemos que las distancias focales $c=\sqrt{a^2-b^2}$ de las elipses (4) y $c_1=\sqrt{a^2+b^2}$ de las hipérbolas (5) son iguales a 1, es decir, (4) y (5) son familias de elipses y hipérbolas confocales. ▶

EJEMPLO 9. Hállese la aplicación del plano (z) con los cortes por el segmento que une los puntos 0 y $4i$ y por el segmento que une los puntos $2i$ y $2+2i$, sobre el interior del círculo unitario $|w|<1$.

◀ Hallamos la aplicación buscada w en forma de composición de cinco aplicaciones. La función $w_1=z-2i$ hace pasar el punto $z=2i$ en el origen de coordenadas y la función $w_2=e^{i\frac{\pi}{2}}w_1$ gira el plano (w_1) en ángulo $\pi/2$. El punto $z=4i$ pasa a consecuencia de estas aplicaciones al punto $w_2=-2$; el punto $z=2i$ al punto $w_2=0$; el punto $z=2+2i$ al punto $w_2=2i$ y el punto $z=0$ al punto $w_2=2$. Luego, como resultado de las aplicaciones $w_3=w_2^2$ y $w_4=w_3/4$ el corte se aplica en el segmento $[-1,1]$ del plano (w_4) y, por fin,

$$w_5=w_4+\sqrt{w_4^2-1}$$

aplica el exterior del segmento $[-1,1]$ sobre el interior del círculo unitario, con la particularidad de que se escoge la rama de esta función que para $w_4=\infty$ se anula. Así pues, $w=w_5\circ w_4\circ w_3\circ w_2\circ w_1$ (fig. 95). ▶

Hállense en los problemas 3.68—3.70 las imágenes de las regiones dadas para la aplicación $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

3.68. Del interior del círculo $|z|<R$ para $R<1$ y del exterior del círculo $|z|>R$ para $R>1$.

3.69. Del interior del círculo $|z|<1$ con el corte por el segmento $[1/2, 1]$.

3.70. Del interior del círculo $|z|<1$ con el corte por el segmento $[-1/2, 1]$.

3.71*. Hállese la aplicación del círculo $|z|<1$ con el corte por el segmento $[1/3, 1]$ sobre el círculo $|w|<1$.

3.72*. Hállese la aplicación de la región $D=\{z \mid \operatorname{Im} z > 0, |z|>R\}$ (el semiplano superior con el semicírculo eliminado) sobre el semiplano superior.

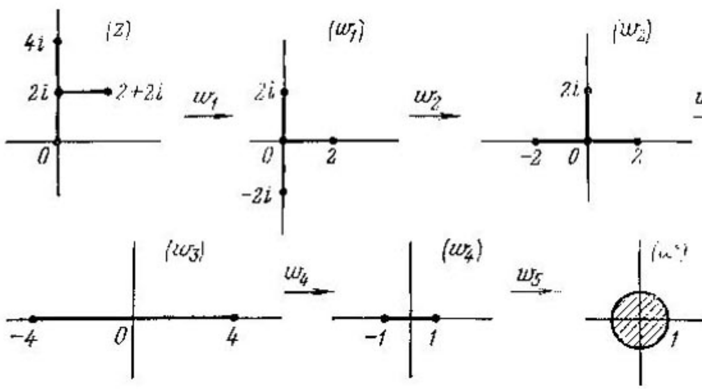


Fig. 95

3.73*. Aplíquese el exterior de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ sobre el exterior del círculo unitario.

5. **Función exponencial.** La función $w=e^z$ es unifoliada en cualquier franja de ancho menor que 2π, paralela al eje real.. Ella aplica la franja $-\infty<x<+\infty$, $-\pi\leqslant y\leqslant\pi$ en el plano completo (w) con el corte por el semieje real negativo. Todo el plano se aplica sobre la superficie de Riemann de hoja infinita. La función inversa $z=\operatorname{Ln} w=\ln w+2\pi n i$, $n=0, \pm 1, \ldots$, es uniforme sobre esta superficie de Riemann y su valor principal $\ln w=\ln|w|+i\arg w$ determina la aplicación conforme de todo el plano con el corte $(-\infty, 0]$ sobre la franja $-\pi<\operatorname{Im} z<\pi$ de 2π de ancho, paralela al eje real.

EJEMPLO 10. Hállese la aplicación de la franja de ancho H, $0<\operatorname{Re} z<H$, paralela al eje imaginario, sobre el círculo unitario del plano (w).

◀ La solución buscada la obtendremos, por ejemplo, con ayuda de la composición de aplicaciones:

$$w_1=e^{i\frac{\pi}{2}}z,\quad w_2=\frac{\pi}{H}w_1,\quad w_3=e^{w_2},\quad w_4=e^{i\theta}\,\frac{w_3-w_3^0}{w_3-\overline{w}_3^0}.$$

Al realizar sucesivamente estas aplicaciones la franja dada se transforma en las regiones, representadas en la fig. 96. ▶

Hállese la imagen E de la región D para la aplicación $w = e^z$:

3.74. $D = \{z \mid -\pi < \operatorname{Im} z < 0\}$.
3.75. $D = \{z \mid |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$.
3.76. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi,\ \operatorname{Re} z > 0\}$.
3.77. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi/2,\ \operatorname{Re} z > 0\}$.
3.78. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

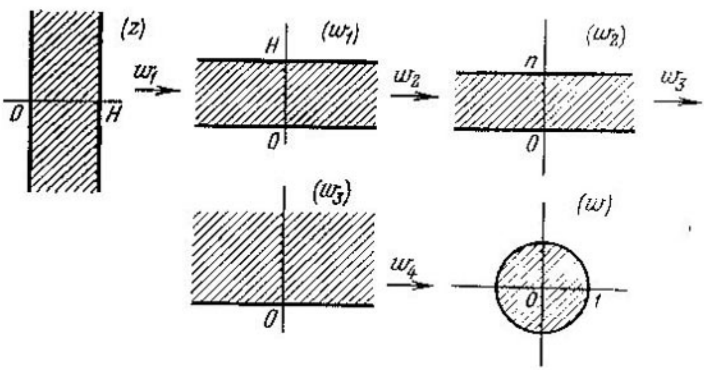


Fig. 96

3.79. Hállense las imágenes de las rectas $x = C$ e $y = C$ para la aplicación $w = e^z$.

Hállense las imágenes de las siguientes regiones para la aplicación $w = \ln z$, $w(i) = \dfrac{\pi i}{2}$:

3.80. $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.
3.81. $\{z \mid |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.
3.82. $\{z \mid |z| < 1,\ z \notin [0, 1]\}$.
3.83. $\{z \mid z \notin [-\infty, -1] \cup [0, \infty]\}$.

6. **Funciones trigonométricas e hiperbólicas.** La función $w = \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ es unifoliada en la semifranja $-\pi < x \leqslant \pi$, $y > 0$ y aplica esta semifranja sobre el plano (w) con el corte $(-\infty, 1]$. La superficie de Riemann de esta función es más compleja que la de las anteriores, ya que las hojas se pegan separadamente por el rayo $(-\infty, -1)$ y por el segmento $[-1, 1]$.

La función $w = \operatorname{sen} z$ se reduce a la anterior con ayuda de la relación $\operatorname{sen} z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$. A los $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ se reducen también las funciones hiperbólicas

$$\operatorname{sh} z = -i \operatorname{sen} iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz.$$

3.84.** Hállese la imagen E de la semifranja $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ para la aplicación $w = \cos z$.

3.85. Hállese la imagen E de la red rectangular $x = C$, $y = C$ para la aplicación $w = \operatorname{ch} z$.

3.86. Hállese la imagen E del rectángulo $D = \{z \mid -\pi < \operatorname{Re} z < \pi, -h < \operatorname{Im} z < h, h > 0\}$ para la aplicación $w = \cos z$.

§ 4. Integral de una función de variable compleja

1. Integral por la curva y su cálculo. Si l es una curva suave a trozos dirigida en el plano (z) y para todo $z \in l$ está determinada la función $f(z)$, entonces, si existe el límite en el segundo miembro, se supone según la definición:

$$\int_l f(z)\,dz = \lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta z_k. \tag{1}$$

Aquí $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $z_k \in l$, $k = 0, 1, \ldots, n$, los puntos $\xi_k \in l$ están elegidos en los segmentos l entre los puntos z_k y z_{k+1}. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces la integral se representa en la forma de la suma de dos integrales curvilíneas de segunda especie:

$$\int_l f(z)\,dz = \int_l u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i\int_l v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy. \tag{2}$$

Si la función $f(z)$ es continua sobre l, entonces la integral (1) existe.

EJEMPLO 1. Valiéndose de la definición (1) calcúlese $\int_l \operatorname{Re} z\,dz$, donde l es el radio vector del punto $1 + i$.

◀ Dividamos el radio vector del punto $1 + i$ en n partes iguales, es decir, pongamos

$$z_k = \frac{k}{n} + i\frac{k}{n}, \quad \Delta z_k = \frac{1}{n}(1 + i), \ k = 0, 1, \ldots, n,$$

y sea $\xi_k = z_k$. Entonces la suma integral se escribe en la forma

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k \Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{1+i}{n} = \frac{1+i}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1+i}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\int_l \operatorname{Re} z\,dz = \lim_{n\to\infty} \frac{(i+1)(n+1)}{2n} = \frac{1+i}{2}. \ \blacktriangleright$$

EJEMPLO 2. Empleando la representación de la integral en la forma (2) y la regla para calcular las integrales curvilíneas de segunda especie, calcúlese la integral

$$\int_l |z|\,\overline{z}\,dz,$$

donde l es la semicircunferencia superior $|z| = 1$ con el recorrido antihorario.

◀ Tenemos

$$\int_l |z|\,\overline{z}\,dz = \int_l \sqrt{x^2+y^2}\,(x\,dx+y\,dy) + i\int_l \sqrt{x^2+y^2}\,(-y\,dx+x\,dy).$$

Pasando a la ecuación paramétrica de la curva $x=\cos t$, $y=\operatorname{sen} t$, $0\leqslant t\leqslant\pi$, y teniendo en cuenta que $\sqrt{x^2+y^2}=|z|=1$ en los puntos de la curva, obtenemos

$$\int_l |z|\,\overline{z}\,dz = \int_0^\pi (-\cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t)\,dt + i\int_0^\pi (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt = \pi i. \ \blacktriangleright$$

4.1. Aplicando la sumación directa calcúlese la integral $\int_l z\,dz$, donde l es el radio vector del punto $2-i$.

4.2. Demuéstrese que si el camino de integración cambia de dirección la integral cambia de signo, es decir,

$$\int_{l^+} f(z)\,dz = -\int_{l^-} f(z)\,dz.$$

4.3. Demuéstrese que si a_1 y a_2 son constantes, entonces $\int_l (a_1f_1(z)+a_2f_2(z))\,dz = a_1\int_l f_2(z)\,dz + a_2\int_l f_2(z)\,dz.$

4.4. Demuéstrese que si la curva de integración l es una reunión de las curvas l_1 y l_2, entonces

$$\int_l f(z)\,dz = \int_{l_1} f(z)\,dz + \int_{l_2} f(z)\,dz.$$

4.5*. Demuéstrese que tiene lugar la estimación

$$\left|\int_l f(z)\,dz\right| \leqslant \int_l |f(z)|\,ds,$$

donde ds es la diferencial del arco.

Calcúlense las integrales según los contornos dados:

4.6*. $\int_l (z-z_0)^n\,dz$, n es un número entero, $l = \{z \mid |z-z_0| = R\}$.

4.7. $\int_l (z-z_0)^n\,dz$, n es un número entero, $l = \{z \mid |z-z_0| = R,\ \operatorname{Im}(z-z_0) > 0\}$.

4.8. $\int_l \frac{z}{\bar{z}}\,dz$, $l = \left\{z \mid |z| = 1,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$.

2. Teorema de Cauchy. Fórmula integral de Cauchy. Si la función $f(z)$ es analítica en la región simplemente conexa D limitada por el contorno Γ, y γ es un contorno cerrado en D, entonces

$$\oint_\gamma f(\eta)\,d\eta = 0. \qquad (3)$$

Si, además, la función $f(z)$ es continua en la región cerrada $\bar{D} = D + \Gamma$, entonces

$$\oint_\Gamma f(\eta)\,d\eta = 0, \quad \textit{(teorema de Cauchy)}.$$

Si la función $f(z)$ es analítica en la región múltiplemente conexa D, limitada por el contorno Γ y por los contornos $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ interiores respecto a Γ, y es continua en la región cerrada $\bar{D} = D + \Gamma^+ + \gamma_1^- + \ldots + \gamma_k^-$, donde los signos de los índices superiores significan la dirección de los recorridos (fig. 97), entonces

$$\oint_{\Gamma^+ + \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu^-} f(\eta)\,d\eta = 0 \qquad (4)$$

(teorema de Cauchy para la región múltiplemente conexa).

Si la función $f(z)$ está definida y es continua en la región simplemente conexa D y es tal, que para cualquier contorno cerrado $\gamma \subset D$

$$\oint_\gamma f(\eta)\,d\eta = 0,$$

entonces para un $z_0 \in D$ fijo la función

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\eta)\,d\eta$$

es una función analítica en la región D, para la cual $\Phi'(z) = f(z)$.

La función $\Phi(z)$ se llama función primitiva o integral indefinida de $f(z)$, con la particularidad de que si $F(z)$ es una de las primitivas para $f(z)$, entonces

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\eta)\,d\eta = F(z_2) - F(z_1).$$

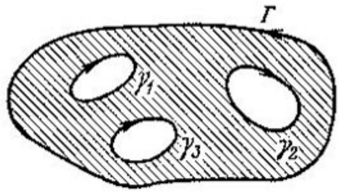


Fig 97

Si $f(z)$ es analítica en la región D, $z_0 \in D$ y $\gamma \subset D$ es un contorno que rodea el punto z_0, es válida la *fórmula integral de Cauchy*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z_0}\,d\eta. \qquad (5)$$

En este caso la función $f(z)$ tiene en todos los puntos de D derivadas de cualquier orden, para las cuales son justas las fórmulas

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{k+1}}\,d\eta, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (6)$$

EJEMPLO 3. Demuéstrese que si $f(z)$ es una función analítica y acotada en la región convexa D, entonces para cualesquiera dos puntos z_1 y z_2 de esta región tiene lugar la estimación

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} f(\eta)\,d\eta\right| \leqslant \max_{z\in D}|f(z)|\,|z_2 - z_1|.$$

◀ De la convexidad de la región se deduce que si $z_1 \in D$, $z_2 \in D$, entonces el segmento que une estos puntos también pertenece a la región D. Del teorema de Cauchy se desprende que en calidad de camino de integración se puede tomar precisamente este segmento y, por ende, aplicando la estimación del problema 4.5, tenemos

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} f(\eta)\,d\eta\right| \leqslant \max_{z\in D}|f(z)|\left|\int_{z_1}^{z_2} ds\right| = |z_2 - z_1|\max_{z\in D}|f(z)|. \ ▶$$

EJEMPLO 4. Calcúlese la integral

$$\int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta^2} = F(z) - F(0),$$

si el camino de integración no abarca ninguno de los puntos $z_{1,2} = \pm i$.

◀ Ya que la función subintegral $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ es analítica en todos los puntos, excepto los puntos, $z_{1,2} = \pm i$, entonces la integral $F(z)$ tiene sentido en todos los puntos, excepto $z = \pm i$ y a condición de que el camino de integración no pasa por estos puntos. Por consiguiente, si el camino de integración no abarca ninguno de los puntos $z_{1,2} = \pm i$, entonces a título de una de las funciones primitivas para la función $\frac{1}{z^2+1}$ se puede tomar una función uniforme $F(z) = \operatorname{arctg} z$ y, teniendo en cuenta que $\operatorname{arctg} 0 = 0$, tenemos

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta^2}. \ ▶$$

EJEMPLO 5. Calcúlese la integral

$$I = \oint_{|z-i|=1} \frac{\operatorname{sen} \frac{iz\pi}{2}}{z^2+1}\, dz.$$

◀ Escribamos la integral en la forma de

$$I = \oint_{|z-i|=1} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} \frac{iz\pi}{2}}{z+i}}{z-i}\, dz$$

y utilizando la fórmula de Cauchy (5), hallamos

$$I = 2\pi i \left. \frac{\operatorname{sen} \frac{iz\pi}{2}}{z+i} \right|_{z=i} = 2\pi i \frac{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2i} = -\pi. \ ▶$$

EJEMPLO 6. Calcúlese la integral

$$I = \oint_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\, dz.$$

◀ Puesto que en el interior del contorno de integración el denominador de la función subintegral se reduce a cero en los puntos $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$, analicemos la región múltiplemente conexa D, limitada por la circunferencia $\Gamma = \{z \mid |z-2| = 3\}$ y por los contornos interiores $\gamma_1 = \{z \mid |z| = \rho\}$ y $\gamma_2 = \{z \mid |z-1| = \rho\}$ $(0 < \rho < 1/2)$. Entonces en esta región D la función $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$ es analítica y según la fórmula (4) podemos escribir.

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_1^-} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2^-} f(z)\,dz = 0,$$

de donde se desprende que

$$I = \oint_{\Gamma^+} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz = \oint_{\gamma_1^+} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz + \oint_{\gamma_2^+} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz.$$

Aplicando ahora las fórmulas (6) y (5), respectivamente, hallamos

$$\oint_{\gamma_1^+} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)''\Bigg|_{z=0} = \pi i\,\frac{e^z(z^2-4z+5)}{(z-1)^3}\Bigg|_{z=0} = -5\pi i$$

y

$$\oint_{\gamma_2^+} \frac{e^z/z^3}{z-1}\,dz = 2\pi i\,\frac{e^z}{z^3}\Bigg|_{z=1} = 2\pi e i.$$

De este modo, $I = \pi i\,(2e-5)$. ▶

Calcúlense las integrales (los contornos se recorren en sentido antihorario):

4.9. a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z^2}{z-2i}\,dz$; b) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{z^2}{z-2i}\,dz$.

4.10. $\displaystyle\oint_{|z+i|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{(z+i)^3}\,dz$. **4.11.** $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+2z}$.

4.12. $\displaystyle\oint_{C} \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$, donde:

a) $C = \{z \mid |z-1| = 1\}$; b) $C = \{z \mid |z+1| = 1\}$;
c) $C = \{z \mid |z| = R,\ R \neq 1\}$.

4.13. $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz$.

4.14. Demuéstrese el teorema del valor medio: si la función $f(z)$ es analítica en el círculo $|z-z_0| < R$ y es continua en el círculo cerrado $|z-z_0| \leqslant R$, el valor de la función en el centro del círculo es igual a la media aritmética de sus valores en la circunferencia, es decir,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi R} \oint_{|\eta - z_0| = R} f(\eta)\, ds,$$

donde ds es la diferencial del arco.

4.15*. Es conocido que si $f(z) \not\equiv \text{const}$ es una función analítica en la región D y continua en la región cerrada $\overline{D} = D + L$, $\max\limits_{z \in \overline{D}} |f(z)|$ se alcanza sólo en la frontera de la región (principio del máximo del módulo). Demuéstrese que si, además, $\forall\, z \in \overline{D}\ (f(z) \neq 0)$, entonces $\min\limits_{z \in \overline{D}} |f(z)|$ también se alcanza en la frontera.

4.16. Utilizando la fórmula (6) para $f'(z)$ demuéstrese el teorema de Liouville: si $f(z)$ es una función analítica y acotada por todo el plano (z), entonces $f(z) \equiv \text{const}$.

RESPUESTAS

1.1. El interior del círculo con el centro en el punto z_0 de radio R; simplemente conexa. **1.2.** El anillo entre las circunferencias de los radios 1 y 2 con el centro en el punto $z_0 = i$; doblemente conexa. **1.3.** El exterior del círculo de radio 2 con el centro en el punto $z_0 = i$, con el punto reducido infinitamente alejado; doblemente conexa. **1.4.** La franja horizontal comprendida entre las rectas $y = -1/2$ e $y = \infty$; simplemente conexa. **1.5.** El exterior del radio R con el centro en el punto z_0; simplemente conexa. El punto infinitamente alejado $z = \infty$ es el punto interior de esta región. **1.6.** El interior del círculo con el centro reducido $z_0 = -i$ de radio 2; doblemente conexa. **1.7.** El semiplano situado más a la izquierda de la recta $x = 1$. **1.8.** El interior del círculo de radio 2 con el centro en el punto $(2, 0)$; simplemente conexa. **1.9.** La recta $x - y + 1 = 0$.

● Escríbase $\frac{z+1}{z-i}$ en la forma $\frac{(z+1)(\bar{z}+i)}{(z-i)(\bar{z}+i)} = \frac{(z+1)(\bar{z}+i)}{|z-i|^2}$. **1.10.** El interior de la elipse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$. **1.11.** La circunferencia $|z| = 2$. **1.12.** La parte del plano situada a la derecha de la rama izquierda de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. **1.13.** La recta que pasa por los puntos z_1 y z_2 con un segmento recortado que une estos puntos. **1.14.** El interior del segmento que une los puntos $-i$ e i. ● Empléese la igualdad $\arg(-z) = \pi + \arg z$. **1.15.** $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$. **1.16.** $\operatorname{Re} z < 0$. **1.17.** $|\operatorname{Re} z| < 3$.

1.18. $|z-(1+i)|+|z-(3+i)|<6$. **1.19.** $\frac{3\pi}{6}<\arg(z-z_0)<\frac{5\pi}{8}$. **1.20.** $2\varphi+4k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$ **1.21.** $3\varphi+6k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$ **1.22.** $\frac{1}{3}\psi+\frac{2k\pi}{3}$, $k=0, \pm 1, \ldots$, donde $\operatorname{tg}\psi=\frac{r\operatorname{sen}\varphi}{1+r\cos\varphi}$, $\operatorname{sen}\psi=$ $=\frac{r\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1+r^2+2r\cos\varphi}}$. **1.23.** $\frac{1}{2}\psi+k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$, donde $\operatorname{tg}\psi=$ $=\frac{r\operatorname{sen}\varphi}{r\cos\varphi-8}$, $\operatorname{sen}\psi=\frac{r\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{64+r^2-16r\cos\varphi}}$. **1.24.** $\frac{1}{2}\psi+k\pi$, $k=$ $=0, \pm 1, \ldots$, donde $\operatorname{tg}\psi=\frac{r^2\operatorname{sen}2\varphi}{r^2\cos 2\varphi-4}$, $\operatorname{sen}\psi=\frac{r^2\operatorname{sen}2\varphi}{\sqrt{r^4+16-8r^2\cos 2\varphi}}$.
1.25. $\frac{1}{2}\psi+k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$ donde $\operatorname{tg}\psi=\frac{3r\operatorname{sen}\varphi}{r^2-2-r\cos\varphi}$, $\operatorname{sen}\psi=$ $=\frac{3r\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{9r^2\operatorname{sen}^2\varphi+(r^2-2-r\cos\varphi)^2}}$. **1.26.** Cualquier región situada dentro del ángulo con vértice en el origen de coordenadas y una abertura no mayor que π/n. **1.27.** Cualquier región situada en la franja paralela al eje real y de ancho no mayor que 2π. **1.28.** Cualquier región situada en la franja paralela al eje imaginario y de ancho no mayor que $2\pi/3$. **1.29.** Cualquier región situada bien sea en el interior del círculo unitario ($|z|<1$), o bien fuera de él ($|z|>1$). ● La igualdad $z_1+\frac{1}{z_1}=z_2+\frac{1}{z_2}$ para $z_1\neq z_2$ se cumple sólo en el caso, cuando $z_2=\frac{1}{z_1}$. **1.30.** a) La recta $x=C$ se aplica en la parábola $v^2=4C^2\times$ $\times(C^2-u)$; la circunferencia $|z|=R$ en la circunferencia $|w|=$ $=R^2$ recorrida dos veces; el rayo $\arg z=\alpha$ en el rayo $\arg w=2\alpha$; el semicírculo $|z|<r$, $\operatorname{Im} z>0$ en el círculo $|w|<r^2$ con el corte por el segmento del eje real positivo.
b) ◀ Los puntos situados en la recta $x=C$ se escriben en la forma $z=C+iy$ y por eso $w=\frac{1}{C+iy}=\frac{C}{C^2+y^2}-i\frac{y}{C^2+y^2}$. De aquí $u=\frac{C}{C^2+y^2}$, $v=-\frac{y}{C^2+y^2}$, $u^2+v^2=\frac{1}{C^2+y^2}=\frac{u}{C}$. Por consiguiente, la imagen de la recta $x=C$ es la circunferencia u^2+v^2- $-\frac{u}{C}=0$. La imagen de la circunferencia $|z|=R$ es la circunferencia $|w|=\frac{1}{R}$. El rayo $\arg z=\alpha$, es decir, el rayo $(0, \infty\cdot e^{i\alpha})$ se aplicará en el rayo $(0, \infty\cdot e^{-i\alpha})$ que va del infinito. El semicírculo $|z|<r$, $\operatorname{Im} z>0$, se aplica en el semiplano inferior con el semicírculo cortado $|w|=\leqslant\frac{1}{r}$. $\operatorname{Im} w<0$. ▶ **1.31.** $f(z)$ es continua en D si $\forall\varepsilon>0\,\forall z\in D\;\exists\delta=\delta(\varepsilon, z)>0$ $((|\Delta z|<\delta\wedge z+\Delta z\in D)\Rightarrow$ $\Rightarrow|f(z+\Delta z)-f(z)|<\varepsilon)$. **1.36.** $\operatorname{ch}1\cos 1+i\operatorname{sh}1\operatorname{sen}1$.

1.37. $\cos 1$. **1.38.** $\operatorname{sh} 2 \cos 1 + i \operatorname{ch} 2 \operatorname{sen} 1$. **1.39.** $(2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.40. $\frac{\pi}{2}$. **1.41.** $\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.42.** $\operatorname{Arcsen} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$, $\operatorname{Arcsen} i = 2k\pi - i \ln(\sqrt{2}-1)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.43.** $\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$, $\operatorname{Arctg} \frac{i}{3} = k\pi + \frac{i}{2} \ln 2$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.44.** $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1})$, $\operatorname{Arsh} i = \left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.45.** $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})$, $\operatorname{Arch}(-1) = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.46.** $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$, $\operatorname{Arth}(1-i) = \frac{1}{4}\ln 5 + \frac{i}{2}\operatorname{arctg} 2 + \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.47.** $e^{2k\pi}(\cos \ln 2 + i \operatorname{sen} \ln 2)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.48.** $e^{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.49. $e^{\left(2k-\frac{1}{4}\right)\pi}\left(\cos \frac{\ln 2}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\ln 2}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.50.** $e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.51.** $5e^{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2k\pi}\left(\cos\left(\ln 5-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+i \operatorname{sen}\left(\ln 5-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.52.** $-5e^{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+(2k+1)\pi}\left(\cos\left(\ln 5-\operatorname{arctg} \times \frac{4}{3}\right)+ i \operatorname{sen}\left(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.53.** $f(0) = 0$. **1.54.** $f(0) = 0$. **1.55.** $f(0) = 0$. **1.56.** $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ no existe.

2.1. No es diferenciable en ningún punto. ● $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ no existe. **2.2.** No es diferenciable en ningún punto. ● Para $\Delta y = k\Delta x$ tenemos $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{1+ik}$, es decir, el límite no existe. **2.3.** Es diferenciable sólo en el punto $z=0$. **2.4.** Es diferenciable sólo en el punto $z=0$. **2.5.** No es diferenciable en ningún punto. ◀ En el punto $z=0$ $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{|z+\Delta z|-|z|}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta z|}{\Delta z}$ no existe. Si es que $z \neq 0$, entonces, designando $|z| = r$, $\Delta z = \Delta\rho e^{i\varphi}$, tenemos

$$\frac{|z+\Delta z|-|z|}{\Delta z} = \frac{r\left(\sqrt{1+\frac{2\Delta\rho}{r^2}(x\cos\varphi + y \operatorname{sen}\varphi)+\left(\frac{\Delta\rho}{r}\right)^2}-1\right)}{\Delta\rho e^{i\varphi}}.$$

De aquí hallamos $\lim\limits_{\Delta\rho \to 0} \dfrac{r\left(\sqrt{1+2\frac{\Delta\rho}{r^2}x+\left(\frac{\Delta\rho}{r}\right)^2}-1\right)}{\Delta\rho} = \dfrac{x}{r}$

para $\varphi=0$ y $\lim\limits_{|\Delta\rho|\to 0} \dfrac{r\left(\sqrt{1+2\dfrac{\Delta\rho}{r}y+\left(\dfrac{\Delta\rho}{r}\right)^2}-1\right)}{\Delta\rho}=-\dfrac{iy}{r}$ para $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. De este modo, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|z+\Delta z|+|z|}{\Delta z}$ no existe. ▶ **2.6.** Es diferenciable sólo en el punto $z=1$. **2.7.** ◐ Empléese la regla de la diferenciación de la función compuesta de dos variables $u(x, y)=u(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)$, $v(x, y)=v(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)$ y la condición (1): $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial r}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\cos\varphi-\dfrac{\partial v}{\partial x}\operatorname{sen}\varphi$ y $\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}r\operatorname{sen}\varphi+\dfrac{\partial v}{\partial y}r\cos\varphi$, es decir, $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}$. Análogamente se comprueba la segunda de las igualdades (2). Para obtener las igualdades (4) es conveniente expresar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ mediante las derivadas por r y φ, obténganse las derivadas $\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ a partir de las igualdades $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ y sustitúyanse las expresiones obtenidas en (3). **2.8.** $(e^{3z})'=3e^{3z}$. **2.9.** $(\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z$. **2.10.** $(z^n)'=nz^{n-1}$ (excepto el punto $z=0$ para n negativos). **2.11.** $(\cos z)'=-\operatorname{sen} z$. **2.12.** $(\ln(z^2))'=2/z$. **2.13.** $\left(\operatorname{sen}\dfrac{z}{3}\right)'=\dfrac{1}{3}\times\cos\dfrac{z}{3}$. **2.14.** ◐ Hágase uso de las condiciones de Cauchy—Riemann. **2.17.** Todo el plano, excepto los puntos $z=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $(\operatorname{tg} z)'=\dfrac{1}{\cos^2 z}$. **2.18.** Todo el plano; $f'(z)=e^{-z}(1-z)$. **2.19.** Todo el plano, excepto los puntos $z_{1,2}=\pm i$; $f'(z)=\dfrac{(1-z^2)\cos z-z(1+z^2)\operatorname{sen} z}{(1+z^2)^2}$. **2.20.** Todo el plano excepto los puntos $z_\nu=2\pi\nu i$, $\nu\in\mathbb{Z}$; $f'(z)=-\dfrac{2e^z}{(e^z-1)^2}$. **2.21.** Todo el plano, excepto los puntos $z_\nu=\dfrac{\pi}{2}\nu$; $\nu\in\mathbb{Z}$; $f'(z)=\cos 2z$. **2.22.** Todo el plano, excepto el punto $z=0$; $f'(z)=\dfrac{e^z(z-1)}{z^2}$. **2.23.** Todo el plano, excepto los puntos $z_k=\pi ki$, $k\in\mathbb{Z}$; $f'(z)=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$. **2.24.** Todo el plano, excepto los puntos $z_k=\left(k+\dfrac{1}{4}\right)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $f'(z)=\dfrac{1}{1-\operatorname{sen} 2z}$. **2.26.** $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$. **2.27.** $\Delta u=0$.

$v(x, y)=3x^2y-y^3+C$, $f(z)=(x+iy)^3+Ci=z^3+Ci$. **2.28.** $\Delta v\equiv 0$, $u(x, y)=2e^x\cos y+C$, $f(z)=2e^x(\cos y+i\,\mathrm{sen}\,y)+C=2e^z+C$. **2.29.** $\Delta u\equiv 0$, $v(x, y)=-x^2+y^2+C$, $f(z)=-i(x^2-y^2+2ixy)+3+Ci=-iz^2+3+Ci$. **2.30.** $\Delta v\equiv 0$, $u(x, y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$, $f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}+C=\ln|z|+i\arg z+C=\ln z+C$.

2.31. $\Delta u\equiv 0$, $v(x, y)=-\frac{y}{x^2+y^2}+2x+C$, $f(z)=\frac{x-iy}{x^2+y^2}-2y+2ix+Ci=\frac{1}{z}+2iz+Ci$. **2.32.** $\Delta u\equiv 0$, $v(x, y)=-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+2xy+C$, $f(z)=z^2-\frac{i}{2}z^2+Ci=\frac{2-i}{2}z^2+Ci$. **2.33.** $\Delta v\equiv 0$, $u(x, y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2)+C$, $f(z)=\frac{1}{2}z^2+C$.

3.1. $k=4$, $\varphi=\pi/4$. **3.2.** $k=2$, $\varphi=\pi/2$. **3.3.** $k=6$, $\varphi=\pi/2$. **3.4.** $k=3$, $\varphi=0$. **3.5.** $k=1$, $\varphi=0$. **3.6.** $k=2$, $\varphi=\pi/2$. **3.7.** La región $|z|>1$ se contrae, mientras que la región $|z|<1$ se alarga. **3.8.** El semiplano $\mathrm{Re}\,z<1$ se contrae y el semiplano $\mathrm{Re}\,z>1$ se alarga. **3.9.** La región $|z+1|>1$ se contrae y la región $|z+1|<1$ se alarga. **3.10.** El interior del círculo $|z+1|<1/2$ se contrae y el exterior de este círculo se alarga. **3.11.** $|z-1|=1/2$. **3.12.** $\left|z-\frac{i}{2}\right|=1/2$. **3.13.** $|z+i|=\sqrt{2}$. **3.14.** $|z|=1/\sqrt{3}$. **3.15.** $\{z\,|\,\mathrm{Im}\,(1-i)\,z=0\}$, es decir, la recta $y=x$. **3.16.** $\{z\,|\,\mathrm{Im}\,(1+i)(i+z)=0\}$, es decir, la recta $x+y+1=0$. ● Empléese la igualdad $\arg\frac{-i}{(i+z)^2}=\frac{3\pi}{2}-2\arg(i+z)=0$ y la relación $-\frac{3\pi}{4}=\arg(-1-i)$. **3.17.** El rayo $0<x<+\infty$, $y=-1/2$. **3.18.** El rayo $1<x<+\infty$, $y=0$. **3.19.** La aplicación es conforme. **3.20.** La aplicación no es conforme. **3.21.** La aplicación es conforme. **3.22.** La aplicación es conforme. **3.23.** La aplicación no es conforme. **3.25.** $z_0=-1$, $\alpha=0$, $k=2$. **3.26.** $z_0=2(1+i)$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $k=1$. **3.27.** $z_0=-\frac{i}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{8}$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $k=1$. **3.28.** Para $a\neq 1$ $z_0=\frac{b}{1-a}$, $\alpha=\arg a$, $k=|a|$. **3.29.** La recta $v=-3$. **3.30.** La recta $u-2v=0$. **3.31.** La circunferencia $u^2+v^2-u-v=0$. **3.32.** La circunferencia $u^2+v^2+2u+2v+1=0$. **3.34.** $w=i\,\frac{z-i}{z-1}$. **3.35.** $w=\frac{(i+1)\,z-i}{z}$. **3.36.** $w=\frac{(5-3i)\,z-4}{4z-5-3i}$. **3.37.** $z_{1,2}=\frac{a-d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}$, $z_1=z_2$ para $(a-d)^2+4bc=0$. El punto infinitamente alejado es inmóvil sólo cuando $c=0$, es decir, para la función lineal. 3.38. a) $\frac{1}{2}(1+i)$; b) $4+i$. ● El punto $1+i$ y el centro del círculo i están situados en la recta $y=1$. 3.39. a) $w|_{z=-1+i}=\frac{1+2i}{5}$; b) $w|_{z=1-9i}=$ $=\frac{81-2i}{65}$. 3.40. $\alpha=\frac{1}{2}$, $\theta=\pi$, 3.41. $\alpha=0$, $\theta=-\frac{\pi}{2}$. 3.42. $\alpha=z_0$, $\theta=\frac{3\pi}{2}$. 3.44. $\alpha=i$, $\theta=0$. 3.45. $\alpha=2i$, $\theta=\frac{3\pi}{2}$. 3.46. $\alpha=z_0$, $\theta=\pi$. 3.47. $E=\{w\mid |w|<1,\ \operatorname{Im} w<0\}$ (la semicircunferencia inferior). 3.48. $E=\left\{w\,\middle|\,\left|w-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|>\frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{Im} w<0\right\}$

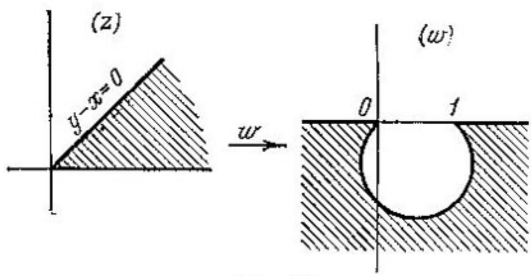


Fig. 98

(fig. 98). ● El rayo $0<x<+\infty$ se transforma en el exterior del segmento $0\leqslant u\leqslant 1$, además los puntos del semiplano superior (z) se aplican en los puntos del semiplano inferior (w). La recta $y-x=0$ se aplica en la circunferencia $w\bar{w}-\frac{1+i}{2}w+\frac{1-i}{2}\bar{w}=0$, es decir, en la circunferencia $\left|w-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ con el centro en el punto $w_0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$. 3.49. $E=\left\{w\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant|w-1|\leqslant 1,\ -\frac{\pi}{4}<\right.$ $\left.<\arg(w-1)\leqslant 0\right\}$. ● La circunferencia $|z|=1$ se aplica en la circunferencia $|w-1|=1$, la circunferencia $|z|=2$ en la circunferencia $|w-1|=\frac{1}{2}$, el segmento $1\leqslant x\leqslant 2$ en el segmento $\frac{3}{2}\leqslant$ $\leqslant u\leqslant 2$ y la recta $y=x$ en la recta $u+v=1$ (fig. 99). 3.50. $E=$ $=\{w\mid \operatorname{Im} w>0,\ \operatorname{Re} w>0\}$. 3.51. $E=\left\{w\,\middle|\,\left|w-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2},\ \left|w-\frac{3}{4}\right|>\right.$ $\left.>\frac{1}{4}\right\}$. 3.52. $E=\left\{w\,\middle|\,-\frac{\pi}{4}<\arg w<\frac{\pi}{4}\right\}$.

3.53.

$$D=\begin{cases} z \mid \left|z+\dfrac{r^2}{1-r^2}\right|<\dfrac{r}{1-r^2} \text{ para } r<1, \\ z \mid \operatorname{Re} z<\dfrac{1}{2} \text{ para } r=1, \\ z \mid \left|z-\dfrac{r^2}{r^2-1}\right|>\dfrac{r}{r^2-1} \text{ para } r>1. \end{cases}$$

◀ Ya que $|w|<r$, entonces de la relación $w(1-z)=z$ obtenemos $|z|<r|1-z|$. Elevando ambos miembros de esta desi-

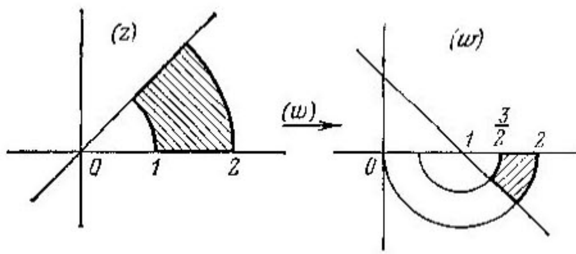


Fig. 99.

gualdad al cuadrado escribimos la desigualdad obtenida en forma de $z\bar{z}<r^2(1-z)(1-\bar{z})$ de donde obtenemos

$$(r^2-1)z\bar{z}-r^2(z+\bar{z})+r^2>0. \qquad (*)$$

Si $r<1$ entonces de (*) tenemos

$$z\bar{z}+\frac{r^2}{1-r^2}(z+\bar{z})<\frac{r^2}{1-r^2}. \qquad (**)$$

Pero $z\bar{z}+\dfrac{r^2}{1-r^2}(z+\bar{z})=\left(z+\dfrac{r^2}{1-r^2}\right)\left(\bar{z}+\dfrac{r^2}{1-r^2}\right)-\dfrac{r^4}{(1-r^2)^2}$. Luego, ya que $\dfrac{r^4}{(1-r^2)^2}+\dfrac{r^2}{1-r^2}=\dfrac{r^2}{(1-r^2)^2}$ entonces de (**) obtenemos $\left|z+\dfrac{r^2}{1-r^2}\right|^2<\left(\dfrac{r}{1-r^2}\right)^2$, es decir, $D=\left\{z \mid \left|z+\dfrac{r^2}{1-r^2}\right|<\dfrac{r}{1-r^2}\right\}$ (el interior del círculo). Análogamente en el caso de $r>1$ hallamos $z\bar{z}-\dfrac{r^2}{r^2-1}(z+\bar{z})>-\dfrac{r^2}{r^2-1}$, es decir, $\left|z-\dfrac{r^2}{r^2-1}\right|^2>\dfrac{r^4}{(r^2-1)^2}-\dfrac{r^2}{r^2-1}=\dfrac{r^2}{(r^2-1)^2}$. Por consiguinte, $D=\left\{z \mid \left|z-\dfrac{r^2}{r^2-1}\right|>\dfrac{r}{r^2-1}\right\}$ (el exterior del círculo). Por fin, si

$r=1$, entonces de (*) obtenemos $z+\bar{z}<1$, es decir, $D=\left\{z \mid \operatorname{Re} z<\right.$ $\left.<\frac{1}{2}\right\}$ (un semiplano). ▶ 3.54. $w=-\frac{(z-z_1)^3}{(z-z_2)^3}$, $z_1=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. 3.55. $w=e^{\frac{\pi i}{3}}\cdot z^{\frac{4}{3}}$. 3.56. $w=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$. 3.57. $w=$ $=-\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$. 3.58. $w=\left(\frac{z^4+16}{z^4-16}\right)^2$. 3.59. $w=-\left(\frac{z^{2/3}+\sqrt[3]{4}}{z^{2/3}+\sqrt[3]{4}}\right)^2$. 3.60. $w=-\left(\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}\right)^3$. 3.61. $w=-\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i}\right)^{3/2}$. 3.62. $w=\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i}\right)^3$. 3.63. $w=-\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^3$. 3.64. $w=\sqrt{\frac{z+i}{i-z}}$. 3.65. $w=\sqrt{\frac{z-1-i}{2+2i-z}}$. 3.66. $w=\sqrt{\frac{z+R}{z-R}}$. 3.67. $w=\sqrt{z^2+h^2}$. 3.68. Tanto el interior del círculo $|z|<R$ para $R<1$, como el exterior del círculo $|z|>R$ para $R>1$, se aplican sobre el exterior de la elipse $\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+$ $+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$. 3.69. El plano con corte por el segmento $[-1, 5/4]$. 3.70. El plano con corte por los rayos $(-\infty, -5/4]$, $[1, +\infty)$. 3.71. Una de las respuestas: $w=\frac{3}{8}\left(z+\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{4}+$ $+\sqrt{\left(\frac{3}{8}\left(z+\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{4}\right)^2-1}$ (con la particularidad de que se elige la rama que pasa el punto $z=0$ al interior del círculo $|w|<$ <1). ● $w_1=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $w_2=\frac{3w_1-1}{3}$, $w_3=\frac{3}{4}w_2$, $w_4=$ $=w_3+\sqrt{w_3^2-1}$, $w=w_4\circ w_3\circ w_2\circ w_1$. 3.72. $w=\frac{1}{2R}\left(z+\frac{R^2}{z}\right)$. ● Realícese la transformación de semejanza $w_1=\frac{z}{R}$ y para la aplicación $w_2=\frac{1}{2}\left(w_1+\frac{1}{w_1}\right)$ obsérvese la transformación de la frontera de la región. 3.73. $w=\frac{1}{a+b}\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)$ donde $c=$ $=\sqrt{a^2-b^2}$. ● Realizando la transformación de semejanza $w_1=$ $=\frac{z}{c}$ y determinando R a partir de la condición $\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)=$

$=\frac{a}{c}$, $\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)=\frac{b}{a}$, hallamos $w_2=w_1+\sqrt{w_1^2-1}$ y $w_3=$ $=\frac{1}{R}w_2$. **3.74.** $E=\{w \mid \operatorname{Im} w<0\}$. **3.75.** $E=\{w \mid \operatorname{Re} w>0\}$. **3.76.** $E=\{w \mid |w|>1,\ w\notin[1,+\infty]\}$. **3.77.** $E=\left\{w \mid |w|>1,\ 0<\arg w<\frac{\pi}{2}\right\}$. **3.78.** $E=\{w \mid 1<|w|<e,\ \operatorname{Im} w>0\}$. **3.79.** Si $w=\rho e^{i\psi}$, entonces la recta $x=C$ se aplica en la circunferencia $\rho=e^C$ por la que pasa un número infinito de veces y la recta $y=C$ en el rayo $\psi=C$. **3.80.** $E=\{w \mid 0<\operatorname{Im} w<\pi\}$. **3.81.** $E=$

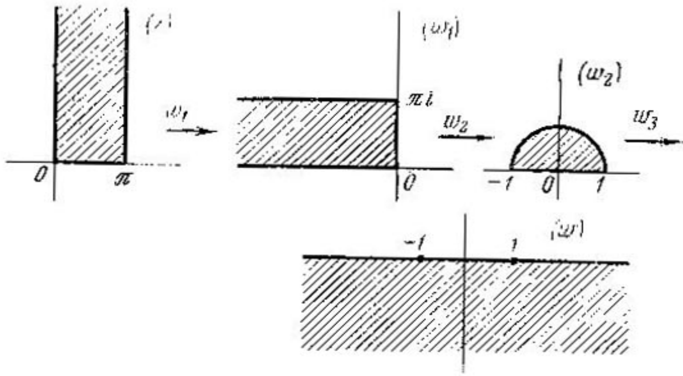


Fig. 100

$=\{w \mid \operatorname{Re} w<0,\ 0<\operatorname{Im} w<\pi\}$. **3.82.** $E=\{w \mid \operatorname{Re} w<0,\ 0<\operatorname{Im} w<2\pi\}$. **3.83.** $E=\{w \mid 0<\operatorname{Im} w<2\pi,\ w\neq u+i\pi$ para $u>0\}$. **3.84.** $E=\{w \mid \operatorname{Im} w<0\}$.

◀ Represéntese $\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$ en forma de composición de las aplicaciones $w_1=iz$, $w_2=e^{w_1}$, $w_3=\frac{1}{2}\left(w_2+\frac{1}{w_2}\right)$ (fig. 100).

▶ **3.85.** Las rectas $x=C$ se transforman en elipses $\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$ donde $a^2=\frac{1}{4}(e^C+e^{-C})^2=(\operatorname{ch} C)^2$, $b^2=\frac{1}{4}(e^C-e^{-C})^2=(\operatorname{sh} C)^2$, y las rectas $y=C$ en las hipérbolas $\frac{u^2}{\cos^2 C}-\frac{v^2}{\operatorname{sen}^2 C}=1$. **3.86.** Puesto que la región D contiene puntos con partes imaginarias simétricas, entonces el campo de valores E será biforme: cada uno de los rectángulos $D_1=\{z \mid -\pi<\operatorname{Re} z<\pi,\ -h<\operatorname{Im} z<0$ y $D_2=$ $=\{z \mid -\pi<\operatorname{Re} z<\pi,\ 0<\operatorname{Im} z<h\}$ se aplicará sobre la mitad infe-

rior del interior de la elipse $\dfrac{u^2}{\frac{1}{4}(e^h+e^{-h})^2}+\dfrac{v^2}{\frac{1}{4}(e^h-e^{-h})^2}=$ $=1$, $v<0$.

4.1. $\dfrac{(2-i)^2}{2}$. 4.5. ● Estímese la suma integral (1) y tomando en consideración que $|\Delta z_k| \leqslant \Delta s_k$, pásese al límite para $\max \Delta s_k \to 0$.
4.6. $\displaystyle\oint_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0 \text{ para } n \neq 1, \\ 2\pi i \text{ para } n=-1. \end{cases}$ ● Realícese el cambio de la variable $z-z_0=Re^{i\theta}$. **4.7.** $\displaystyle\int_{\substack{|z-z_0|=R \\ 0\leqslant \arg(z-z_0)\leqslant\pi}} (z-z_0)^n\,dz=$

$$=\begin{cases} \pi i \text{ para } n=-1, \\ 0 \quad \text{para } n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z},\ k\neq -1, \\ -\dfrac{2R^{2k+1}}{2k+1} \text{ para } n=2k. \end{cases}$$

4.8. $-\dfrac{1+i}{3}$. 4.9. a) 0; b) $-8\pi i$. **4.10.** $-\pi \operatorname{sh} 1$. **4.11.** 0. 4.12. a) $\dfrac{3\pi i}{8}$; b) $-\dfrac{3\pi i}{8}$; c) 0.
4.13. 0. **4.15.** ● Analícese la función $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

CAPITULO 12

SERIES Y SUS APLICACIONES

§ 1. Series numéricas

1. Convergencia de la serie. Criterio de Cauchy. La expresión

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{1}$$

donde $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión numérica dada real o compleja, se llama *serie numérica*. Las sumas finitas

$$\begin{gathered} S_1 = u_1, \; S_2 = u_1 + u_2, \; \ldots, \\ S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \; \ldots \end{gathered} \tag{2}$$

se llaman *sumas parciales* de la serie (1).

Si existe el límite finito de la sucesión de las sumas parciales (2) $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, entonces la serie (1) se llama *convergente* y el número S, *suma de la serie* (1).

CRITERIO DE CAUCHY *Para que la serie numérica* (1) *sea convergente es necesario y suficiente que para todo* $\varepsilon > 0$ *exista* $N = N(\varepsilon)$ *tal, que para todos los* $n >$ *y* $p = 1, 2, \ldots$ *se cumpla la desigualdad*

$$|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

CRITERIO NECESARIO DE CONVERGENCIA. *Si la serie* (1) *converge, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

EJEMPLO 1. Muéstrese que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge y hállese su suma.

◀ Puesto que la fracción $\dfrac{1}{x(x+1)}$ es representable en forma de

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

entonces la suma parcial de la serie puede escribirse del modo siguiente

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\,n}+\frac{1}{n\,(n+1)}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$$

$$=1-\frac{1}{n+1}.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

es decir, la serie dada converge y su suma es igual a 1. ▶

EJEMPLO 2. Investíguese la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ y si converge, hállese su suma.

◀ Tenemos

$$S_n=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}.$$

Si $q=1$, entonces $S_n=n$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$ y por consiguiente, la serie diverge. Sea ahora $q\neq 1$, entonces

$$S_n=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}-\frac{q^n}{1-q}.$$

Pongamos $q=re^{i\varphi}$, entonces $q^n=r^ne^{in\varphi}$. Para $0<r<1$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} q^n=\lim_{n\to\infty} r^ne^{in\varphi}=0,$$

es decir, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}=0$, de donde $\lim\limits_{n\to\infty} S_n\,\frac{1}{1-q}$. Si $r>1$, entonces $r^n\to\infty$, y por consiguiente, no existen el límite finito $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}$, ni el límite de la sucesión de sumas parciales. Por fin, para $r=1$ y $\varphi\not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ el límite

$$\lim_{n\to\infty} e^{in\varphi}=\lim_{n\to\infty}(\cos n\varphi+i\operatorname{sen} n\varphi)$$

(y por eso también el límite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$) tampoco existe.

De este modo, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, llamada **progresión geométrica** infinita, converge para $|q|<1$ y su suma es igual a $\frac{1}{1-q}$, y diverge para $|q|\geqslant 1$. ▶

EJEMPLO 3. Demuéstrese que la serie armónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

diverge, a pesar de que sus términos tienden a cero cuando $n\to\infty$

◀ Analicemos la diferencia de las sumas parciales con números $2n$ y n. Tenemos

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Sustituyendo cada sumando por una magnitud menor $1/2n$ tenemos

$$S_{2n}-S_n>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Esta desigualdad significa que si $p=n$, para la serie armónica no se cumple el criterio de Cauchy y, por consiguiente, la serie diverge. ▶

Muéstrese que las series siguientes convergen y hállense sus sumas:

1.1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1.2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

1.3*. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{3^n}$. **1.4.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^n}$.

Utilizando el criterio de Cauchy o el criterio necesario de convergencia de la serie, establézcase la divergencia de las series siguientes:

1.5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. **1.6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}$.

1.7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. **1.8.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^{10}}$.

1.9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n}{n2^n}$. **1.10.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n}+in}$.

1.11. Demuéstrese que si los términos de la serie convergente se multiplican por un mismo número, entonces su convergencia no se perturbará.

1.12. Demuéstrese que si las series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ convergen y sus sumas son u y v, respectivamente, entonces también converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$, además su suma es igual a $u+v$. Póngase un ejemplo, cuando la afirmación recíproca no es válida.

1.13. Demuéstrese que la omisión de un número finito de los términos de la serie no influye sobre la convergencia de esta serie (¡pero influye sobre la suma!).

2. Convergencia absoluta y condicional. Criterios de convergencia absoluta. La serie (1) se llama *absolutamente convergente*, si converge la serie de módulos de los términos de esta serie, es decir, converge la serie

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \qquad (3)$$

Si la serie (1) converge y la serie (3) diverge, entonces la serie (1) se llama condicionalmente convergente.

CRITERIO DE COMPARACIÓN DE LAS SERIES *Si los términos de la serie* (1) *para todos* $n > N_0$ $(N_0 \geqslant 1)$ *satisfacen la condición* $|u_n| \leqslant b_n$, *además la serie de signo positivo* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *converge, entonces la serie* (1) *absolutamente converge. Si para* $n > N_1$ *los términos de la serie* (1) *son reales y satisfacen la condición* $0 < c_n \leqslant |u_n|$, *además la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *diverge, entonces la serie* (1) *también diverge.*

EJEMPLO 4. Conociendo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, (véase el ejemplo 1) establézcase la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

◀ Ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, entonces, tomando en consideración la desigualdad

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

según el criterio de comparación nos cercioramos de la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. ►

En la práctica resulta más eficaz el siguiente

CRITERIO LÍMITE DE COMPARACIÓN. *Si la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *converge absolutamente y existe el límite finito* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_n}{v_n}\right| = q < +\infty$, *entonces la serie* (1) *también converge absolutamente. Si los términos de las series* u_n *y* v_n *son positivos y*

$$0 < \lim_{v\to\infty} \frac{u_n}{v_n} < +\infty,$$

entonces las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *bien ambas convergen, o bien ambas divergen.*

EJEMPLO 5. Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n}. \tag{4}$$

◄ Puesto que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (véase el ejemplo 4) y ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n} : \frac{1}{n^2} = 3 \neq 0,$$

entonces la serie (4) también converge. ►

EJEMPLO 6 Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n}. \tag{5}$$

◄ Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n} : \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$$

y la serie armónica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (véase el ejemplo 3), entonces a serie (5) también diverge. ►

CRITERIO DE D'ALEMBERT. *Si los términos de la serie (1) son tales, que existe el límite finito*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l,$$

entonces para $0\leqslant l<1$ la serie (1) converge absolutamente, para $l>1$ diverge y para $l=1$ se requiere una investigación complementaria.

EJEMPLO 7. Investíguese la convergencia de la serie ▶

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}. \tag{6}$$

◀ Tenemos $u_n=\frac{n^3}{2^n}$, $u_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$ y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\,2^n}{2^{n+1}n^3}=\frac{1}{2}<1.$$

Así pues, la serie (6) converge.

CRITERIO DE CAUCHY *Sea $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|}=l$ En este caso, si $0\leqslant l<1$, entonces la serie (1) converge absolutamente; si $l>1$, la serie (1) diverge y para $l=1$ se requiere una investigación complementaria.*

EJEMPLO 8. Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}.$$

◀ Tenemos $u_n=\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}$, por eso

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2<1.$$

Por consiguiente, la serie dada converge. ▶

Al aplicar el criterio de Cauchy suele ser útil la siguiente *fórmula de Stirling:*

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}},\quad 0<\theta<1.$$

EJEMPLO 9. Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}.$$

Tenemos:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n\sqrt{2\pi n}}{n^n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}\right)^{1/n}=$$

$$=\frac{2}{e}\lim_{n\to\infty}(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\cdot e^{\frac{0}{12n^2}}=\frac{2}{e}<1,$$

es decir, la serie converge. ▶

CRITERIO INTEGRAL DE CAUCHY. *Sea la función $f(x)$ positiva y monótona para $x\geqslant 1$ y supongamos que para todo $n\in\mathbb{N}$ se cumple la igualdad $f(n)=|u_n|$. Entonces la serie numérica* (3) *converge (es decir, la serie* (1) *converge absolutamente) o diverge simultáneamente con la integral impropia*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \quad a\geqslant 1.$$

EJEMPLO 10. Aclárese para qué valores del parámetro p converge la *serie de Dirichlet* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

▶ Puesto que la función $f(x)=\frac{1}{x^p}$ satisface las condiciones del criterio integral de Cauchy, entonces la investigación de la convergencia de la serie de Dirichlet se reduce a la investigación de la convergencia de la integral $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$.

$$\text{Pero}\quad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^p}=$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{b\to+\infty}\ln b=+\infty & \text{para}\quad p=1,\\ \lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{b^{1-p}}{1-p}-\dfrac{1}{1-p}=+\infty & \text{para}\quad 0<p<1,\\ \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{1}{(p-1)\,b^{p-1}}\right)=\dfrac{1}{p-1} & \text{para}\quad p>1.\end{cases}$$

De aquí deducimos que la serie de Dirichlet converge para $p>1$ y diverge para $p\leqslant 1$ ▶

1.14. Demuéstrese que cualquier serie absolutamente convergente es una serie convergente.

1.15. Demuéstrese que se pueden agrupar los términos de la serie convergente sin alterar su orden, de un modo arbitrario.

1.16. Demuéstrese que se pueden reordenar de un modo arbitrario los términos de la serie absolutamente convergente; en este caso la suma de la serie no cambia.

Empleando el criterio de comparación o el criterio límite de comparación, investíguese la convergencia de las series siguientes:

1.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$. **1.18.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

1.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^3-1}$. **1.20.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

1.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$. **1.22.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{4n^3+5n}$.

Aplicando el criterio de d'Alembert, investíguese la convergencia de las series siguientes:

1.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n}$. **1.24.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

1.25. $\frac{3}{1} + \frac{3\cdot 5}{1\cdot 4} + \ldots + \frac{3\cdot 5 \ldots (2n+1)}{1\cdot 4 \ldots (3n-2)} + \ldots$

1.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n+1}}{n!}$. **1.27.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} in}{3^n}$.

Empleando el criterio de Cauchy, investíguese la convergencia de las series siguientes:

1.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$. **1.29.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1.30. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, donde $u_{2k-1} = \left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$, $u_{2k} = \left(\frac{k}{3k-1}\right)^{k/2}$.

1.31. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2i}{(1+i)\,n+3}\right)^n$.

Empleando el criterio integral de Cauchy, investíguese la convergencia de las series siguientes:

1.32. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. 1.33. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

1.34. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. 1.35. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\,(\ln\ln n)^2}$.

Investíguese la convergencia de las series:

1.36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$. 1.37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

1.38. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. 1.39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

1.40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n-1)^{n-1}}$. 1.41. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

1.42. $100+\frac{100\cdot 103}{1\cdot 5}+\frac{100\cdot 103\cdot 106}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots$
$\ldots+\frac{100\cdot 103\ldots(97+3n)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}+\ldots$

1.43. $1+\frac{1\cdot 11}{3!}+\frac{1\cdot 11\cdot 21}{5!}+\ldots+\frac{1\cdot 11\cdot 21\ldots(10n-9)}{(2n-1)!}+\ldots$

1.44. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 5\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\frac{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}{(4n-2)!!}+\ldots$

1.45. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. 1.46. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n^2}$.

1.47. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. 1.48. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

1.49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$. 1.50*. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\cdot n!}{n^n}$.

1.51. $2+\frac{2\cdot5}{1\cdot5}+\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot5\cdot9}+\ldots+\frac{2\cdot5\cdot8\,\ldots\,(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\,\ldots\,(4n-3)}+\ldots$

1.52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n}$. **1.53.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

1.54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+3}\right)^n$. **1.55.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n$.

1.56. $\frac{1}{100}+\frac{1\cdot4}{100\cdot102}\,\frac{1\cdot4\cdot7}{100\cdot102\cdot104}+\ldots$

$$\ldots+\frac{1\cdot4\cdot7\,\ldots\,(3n-2)}{100\cdot102\,\ldots\,(98+2n)}+\ldots$$

1.57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$. **1.58.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,(\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}$.

1.59. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$. **1.60.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(3n+1)\,(2\sqrt{n}-1)}$.

1.61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+i}$. **1.62.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n\,n}{2^n}$.

1.63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n\cdot n}{2^n}$. **1.64.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$.

1.65. Investíguese la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^{\alpha}}$ para diversos valores reales p y α.

1.66. Investíguese la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^{\alpha}(\ln\ln n)^{\beta}}$ para distintos valores reales p, α y β.

1.67. Cerciórese de que el criterio de d'Alembert no es aplicable a la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, donde $u_{2k-1}=\frac{2^{k-1}}{3^k}$, $u_{2k}=\frac{2^k}{3^k}$, mientras que el criterio de Cauchy muestra que esta serie converge.

3. Criterios de convergencia condicional. CRITERIO DE LEIBNIZ. *Sean reales y monótonamente decrecientes los términos a_n de la serie de signo alterno*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots, \tag{7}$$

es decir,

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots, \tag{8}$$

y sea

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{9}$$

Entonces la serie (7) converge, además para su suma S tenemos la estimación $S < a_1$.

EJEMPLO 11. Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

◀ Ya que $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, quedan cumplidas las condiciones (8) y (9) y la serie dada converge. La serie de magnitudes absolutas de términos, es decir, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Por consiguiente, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ converge condicionalmente. ▶

CRITERIO DE ABEL — DIRICHLET. *Supongamos que los términos de la sucesión (b_n) decrecen monótonamente: $b_1 > b_2 > \ldots > b_n > \ldots$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, mientras que las sumas parciales $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, están acotadas en su conjunto, es decir,*

$$\left| \sum_{n=1}^{n} a_k \right| \leqslant M \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *converge.*

EJEMPLO 12. Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

◀ Es obvio que en los puntos $x = m\pi$ todos los términos de la serie son nulos, es decir, para $x = m\pi$ la serie converge y su suma es igual a cero. Supongamos ahora que $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Calculemos la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{sen} kx =$$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(k - \frac{1}{2}\right) x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) x \right) =$$

$$= \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} .$$

De aquí concluimos que para cualesquiera $n = 1, 2, \ldots$ y $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx \right| \leqslant \frac{2}{2 \left| \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right|} = \frac{1}{\left| \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right|} .$$

Después, la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ decrece monótonamente $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$. Así pues, para $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ se cumplen las condiciones del criterio de Abel—Dirichlet y por eso la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k}$ converge. Por consiguiente, la serie converge para cualquier x. ▶

Investíguese la convergencia absoluta y condicional de las series siguientes:

1.68. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-1}$. **1.69.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt{n}}$.

1.70. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n-2}$.

1.71. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$.

1.72. $\frac{1}{3}-\frac{1\cdot4}{3\cdot5}+\frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot5\cdot7}-\ldots$

$\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot4\cdot7\ \ldots\ (3n-2)}{3\cdot5\cdot7\ \ldots\ (2n+1)}+\ \ldots$

1.73. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

1.74. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2n-1)}$.

1.75. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n\,(\ln\ln n)^3}$.

1.76. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$.

1.77. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{(\ln 3)^n}$. 1.78*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi n}{4}}{n}$.

1.79. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$.

Cerciórese de que no se puede aplicar el criterio de Leibniz a las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ con los términos ($k\in\mathbb{N}$) mencionados más abajo. Investíguese la convergencia de estas series utilizando otros procedimientos.

1.80*. $u_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+1}$, $u_{2k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}-1}$.

1.81. $u_{2k-1}=\frac{1}{3k+2}$, $u_{2k}=-\frac{1}{3k-1}$.

1.82. $u_{2k-1}=\frac{1}{3^k}$, $u_{2k}=-\frac{1}{2^k}$.

1.83. $u_{2k-1}=\frac{1}{2k-1}$, $u_{2k}=-\frac{1}{k^2}$.

1.84*. Demuéstrese que de la convergencia de las series

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ se deduce la convergencia absoluta de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Se llama *producto, según Cauchy*, de las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, cuyos términos se obtienen según las fórmulas

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Investíguese la convergencia del producto, según Cauchy, de las series siguientes:

1.85.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

1.86*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

1.87*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

1.88. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

1.89. Demuéstrese que si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces el producto, según Cauchy, converge.

Sean $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión numérica arbitraria, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, las sumas parciales de la serie convergente $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ y $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$, el resto de esta serie. Verifíquese la validez de las relaciones (llamadas *transformaciones de Abel*):

1.90. $\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) S_k - v_1 S_0 + v_n S_n$.

1.91. $\sum_{k=m+1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m+1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) (S_k - S_m) + v_n \times$
$\times (S_n - S_m)$.

1.92. $\sum_{k=m+1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m+2}^{n} (v_k - v_{k-1}) R_{k-1} +$
$+ v_{m+1} R_m - v_n R_n$.

1.93. Demuéstrese que para el resto R_n de la serie de signo alterno (7) que satisface las condiciones del criterio de Leibniz es válida la desigualdad $|R_n| < a_{n+1}$.

§ 2. Series de funciones

1. Región de convergencia de la serie de funciones. Supongamos que las funciones $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, están definidas en la región D. La expresión

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

se llama *serie de funciones*. Si para $z_0 \in D$ la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ converge, entonces decimos que la serie de funciones (1) *converge en el punto* z_0. Si en cada punto $z \in D_1 \subset D$ las series numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ convergen, la serie (1) lleva el nombre de *convergente en la región* D_1.

CRITERIO DE CAUCHY. *Para que la serie de funciones* (1) *sea convergente en la región* D_1 *es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *y cualquier* $z \in D_1$ *exista* $N = N(\varepsilon, z)$ *tal, que*

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$$

para todos los $n > N(\varepsilon, z)$ *y* $p \in \mathbb{N}$

Para definir la región de la convergencia absoluta de la serie de funciones (1) se debe emplear el criterio de d'Alembert o el criterio de Cauchy. Precisamente, si

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = l(z)$$

ó

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f_n(z)|} = l(z),$$

entonces para determinar la región de la convergencia absoluta de la serie (1) es necesario resolver la desigualdad funcional $l(z) < 1$ y para determinar la región de divergencia, la desigualdad funcional $l(z) > 1$. En este caso, para estudiar el comportamiento de la serie en los puntos de frontera de la región que se obtiene, es decir, en los puntos descritos por la ecuación $l(z) = 1$, se requiere una investigación complementaria.

EJEMPLO 1. Hállese la región de la convergencia para la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n3^n \sqrt{(x+2)^n}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x > -2.$$

◀ Puesto que $|f_n(x)| = \dfrac{1}{n3^n \sqrt{(x+2)^n}}$ y $x > -2$, entonces, empleando el criterio de Cauchy, tenemos

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n3^n \sqrt{(x+2)^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3(x+2)^{1/2}\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3\sqrt{x+2}}.$$

Por consiguiente, la serie converge si $\dfrac{1}{3\sqrt{x+2}} < 1$, es decir, para $x > -\dfrac{17}{9}$. Para $x = -\dfrac{17}{9}$ obtenemos la serie de signo alterno $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ que converge según el criterio de Leibniz. De este modo, la región de convergencia de la serie es un semiintervalo $[-17/9, +\infty)$. ▶

Hállense las regiones de convergencia de las series ($x \in \mathbb{R}$). Investíguense la convergencia absoluta de las series

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}$. **2.2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$.

2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{x^n}$. **2.4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!(x+3)^n}$.

2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^x$. **2.6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \dfrac{1}{n2^n x^n}\right)$.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{e^{nx}}$. **2.8.** $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$.

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x}$. **2.10.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$.

EJEMPLO 2. Hállese la región de convergencia de la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-i)^n}$, $z \in \mathbb{C}$.

◀ Aplicando el criterio de d'Alembert podemos escribir la desigualdad

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(z-i)^n}{(z-i)^{n+1} n} \right| = \frac{1}{|z-i|} < 1,$$

de donde deducimos que la serie converge absolutamente fuera del círculo de radio 1 y con el centro en el punto i, es decir, para $|z-i| > 1$. Sobre la circunferencia $|z-i| = 1$ la serie, obviamente, diverge ▶

Hállense las regiones de convergencia absoluta de las series dadas más abajo ($z \in \mathbb{C}$):

2.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n}$. **2.12.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+1)^n}$.

2.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{(z-3i)^{2n}}$. **2.14.** $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, e^{-nz}$.

2.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-nz^2}$. **2.16.** $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{nz}$.

2.17*. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-z}$. **2.18*.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n$.

2.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-2}{1-2z}\right)^n$. **2.20*.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}$.

2. Convergencia uniforme. La serie de funciones convergente en la región D_1 se llama *uniformemente convergente* en esta región, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal, que para el resto de la serie (1)

$$R_n(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z),$$

cuando todos $n > N$ y $z \in D_1$, tiene lugar la estimación

$$|R_n(z)| < \varepsilon.$$

CRITERIO DE CAUCHY DE LA CONVERGENCIA UNIFORME. *Para que la serie de funciones* (1) *sea uniformemente convergente en la región* D_1, *es necesario y suficiente, que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *exista* $N = N(\varepsilon)$ *tal, que para todos los* $n > N(\varepsilon)$ *y* $z \in D_1$ *se cumplan las desigualdades*

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon, \quad p = 1, 2, \ldots .$$

EJEMPLO 3. Hállense la región de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z^n - z^{n+1}),$$

la suma de la serie y muéstrese que en toda la región de convergencia la serie converge no uniformemente.

◀ Puesto que las sumas parciales de la serie tienen la forma

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n} (z^k - z^{k+1}) = 1 - z^{n+1},$$

podemos concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z)$ existe sólo para $|z| < 1$ y en el punto $z = 1$, es decir, la región de convergencia de la serie es la región

$$D_1 = \{z \mid |z| < 1 \quad \text{y} \quad z = 1\},$$

además la suma de la serie es igual a

$$S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{para } |z| < 1, \\ 0 & \text{para } z = 1. \end{cases}$$

El resto de la serie $R_n(z) = S(z) - S_n(z)$ tiene la forma

$$R_n(z) = \begin{cases} z^{n+1} & \text{para } |z| < 1, \\ 0 & \text{para } z = 1. \end{cases}$$

De aquí llegamos a la conclusión de que existen $\varepsilon_0 > 0$ y $N(\varepsilon_0)$ tales, que para cualquier $n > N(\varepsilon_0)$ haya z_n tal, que $|z_n| < 1$, pero $|R_n(z_n)| > \varepsilon_0$. Así, por ejemplo, tomando $\varepsilon_0 = 1/4$ y $z_n = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{n+1}}} e^{i\varphi_n}$ y elígiendo φ_n arbitrariamente, tenemos $|R_n(z_n)| = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4}$. Esto significa que en toda la región de convergencia D_1 no hay convergencia uniforme. Observemos, sin embargo, que en cualquier región $D_r = \{z \mid |z| \leqslant r < 1\}$ la serie convergirá uniformemente, ya que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $N = N(\varepsilon) = \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln r}$ tal, que para todos los $z \in D_r$ y $n > N(\varepsilon)$ tenemos $|R_n(z)| = |z|^{n+1} \leqslant r^{n+1} < \varepsilon$. ▶

CRITERIO DE WEIERSTRASS. *Supongamos que la serie de funciones* (1) *converge en la región* D_1 *y que existe la serie numérica convergente de signo positivo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *tal, que para todo* $z \in D_1$ *y para* $n > N_0$ *los términos de la serie* (1) *satisfacen la condición*

$$|f_n(z)| \leqslant a_n.$$

Entonces la serie (1) *converge absoluta y uniformemente en la región* D_1.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se llama *mayorante* para la serie (1).

EJEMPLO 4. Hállese la región de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ y muéstrese que en esta región la serie converge uniformemente.

◀ Apliquemos el criterio de d'Alembert. Tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{n+1} n^2}{(n+1)^2 z^n} \right| = |z|.$$

Por consiguiente, en el círculo $|z| < 1$ la serie converge. En la frontera del círculo, es decir, para $|z| = 1$, obtenemos la serie convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

En este caso la serie inicial converge en el círculo cerrado $|z| \leqslant 1$. Pero como para todos los $|z| \leqslant 1$

$$|f_n(z)| = \frac{|z|^n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

la serie converge absoluta y uniformemente. ▶

Hállense la región de convergencia y la región de convergencia uniforme de las series dadas ($x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$):

2.21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}$. **2.22.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n}$.

2.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$. **2.24.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

2.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$. **2.26.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{n^2}$.

2.27. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$. **2.28.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+2)^n}$.

2.29*. Demuéstrese que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$, converge absolutamente en todos los puntos, pero no converge uniformemente en ningún intervalo, dentro o en la frontera del cual se encuentra el punto $x = 0$.

2.30. Demuéstrese, que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$, converge absoluta y uniformemente en todo el eje numérico, mientras que la serie de magnitudes absolutas de los términos de la serie dada (la serie del problema 2.29) en todo el eje numérico converge no uniformemente.

2.31. Empleando el principio de máximo del módulo de la función analítica, demuéstrese que si los términos de la serie (1) son funciones analíticas en la región D y continuas en la región cerrada $\overline{D} = D + \Gamma$, y si la serie (1) converge uniformemente en Γ, entonces converge uniformemente en la región cerrada $\overline{D}$ (*segundo teorema de Weierstrass*).

2.32. Hállense la región de convergencia y la región de convergencia uniforme, así como la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+z^n} - \frac{1}{1+z^{n+1}} \right).$$

3. Propiedades de las series convergentes uniformemente. Enunciemos varias propiedades en forma de problemas.

2.33. Demuéstrese que si los términos de la serie de funciones (1) convergente uniformemente en la región D_1 se multiplican por una misma función $\varphi(z)$ acotada en la región D_1, entonces la convergencia uniforme de la serie no se altera.

2.34. Demuéstrese que si las funciones $f_n(z)$ son continuas en la región D_1 y la serie (1) converge uniformemente en esta región, su suma $f(z)$ es continua en la región D_1.

2.35. Demuéstrese que si las funciones $f_n(z)$ son continuas en la región D_1 y la serie (1) converge uniformemente en esta región, se puede integrar término a término a lo largo de cualquier curva l, situada enteramente en la región

D_1, es decir, tiene lugar la igualdad

$$\int_l \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\eta) \right) d\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_l f_n(\eta)\, d\eta.$$

2.36*. Demuéstrese que si las funciones $f_n(x)$ son diferenciables en el segmento $[a, b]$, la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge y la serie de las derivadas $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge uniformemente, entonces la serie inicial puede diferenciarse término a término, es decir, se cumple la igualdad

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Para las series convergentes uniformemente de las funciones analíticas se verifica el

TEOREMA DE WEIERSTRASS. *Si los términos de la serie de funciones* (1), *es decir, las funciones* $f_n(z)$, *son funciones analíticas en la región* D *y en cualquier subregión cerrada* $\overline{D}_1 \subset D$ *la serie* (1) *converge uniformemente, entonces*

a) *la suma de la serie* (1), *es decir, la función* $f(z)$, *es analítica en la región* D;

b) *la serie* (1) *puede diferenciarse término a término cualquier número de veces, es decir, son válidas las igualdades*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \quad k = 1, 2, \ldots, \; z \in D; \tag{2}$$

c) *en cualquier subregión cerrada* $\overline{D}_1 \subset D$ *las series* (2) *obtenidas como resultado de la diferenciación, convergen uniformemente.*

2.37. Empleando la afirmación de los problemas 2.34, 2.35 y el teorema de Morera (teorema inversa al teorema de Cauchy), demuéstrese la afirmación a) del teorema de Weierstrass.

2.38. Valiéndose de la fórmula de Cauchy para la derivada y de la afirmación del problema 2.35, demuéstrese la afirmación b) del teorema de Weierstrass.

§ 3. Series de potencias

1. Región de convergencia y propiedades de las series de potencias. La serie

$$c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+$$

$$+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \qquad (1)$$

se llama *serie potencial* de potencias $(z-z_0)$. En particular, la serie

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} c_nz^n \qquad (2)$$

es potencial de potencias de z. Sustituyendo $z-z_0=Z$ la serie (1) se reduce a la serie (2).

TEOREMA DE ABEL. *Si la serie de potencias* (2) *converge en el punto* $z=z_1\neq 0$, *converge absolutamente para todos los* z *tales, que* $|z|<|z_1|$, *además la convergencia será uniforme en cualquier círculo cerrado* $|z|\leqslant r<|z_1|$. *Si la serie* (2) *diverge en el punto* $z=z_2$, *también diverge para todos los* z *tales, que* $|z|>|z_2|$.

Del teorema de Abel se deduce que la región de convergencia de la serie potencial es un círculo con el centro en el origen de coordenadas (con el centro en el punto z_0), cuyo radio puede ser definido, aplicando bien sea el criterio de d'Alembert o el criterio de Cauchy, es decir, de las condiciones

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_nz^n}\right|=|z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|<1$$

o

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_nz^n|}=|z|\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}<1.$$

De aquí, para calcular el radio R del círculo de convergencia obtenemos la relación

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|} \quad \text{o} \quad R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

EJEMPLO 1. Investíguese la convergencia de la serie

$$\frac{(z+2)^2}{1\cdot 3}+\frac{(z+2)^4}{4\cdot 3^2}+\ldots+\frac{(z+2)^{2n}}{n^2\cdot 3^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^{2n}}{n^2\cdot 3^n}.$$

◀ Apliquemos el criterio de d'Alembert:

$$u_n=\frac{(z+2)^{2n}}{n^2\cdot 3^n}, \quad u_{n+1}=\frac{(z+2)^{2(n+1)}}{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}}$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z+2)^{2(n+1)}\,n^2\cdot 3^n}{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}\,(z+2)^{2n}}\right|=\frac{|z+2|^2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{|z+2|^2}{3}.$$

De aquí llegamos a la conclusión de que la serie converge en el círculo $|z+2|<\sqrt{3}$. Luego, en la frontera del círculo, es decir, para $|z+2|=\sqrt{3}$ tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(z+2)^{2n}}{n^2\cdot 3^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

lo que significa que la serie converge absolutamente en el círculo cerrado $|z+2|\leqslant\sqrt{3}$, además, la convergencia en este círculo es uniforme. ▶

3.1. Enúnciese el teorema de Abel para la serie (1).

3.2*. Determínese que la serie potencial **(1)** posee las propiedades siguientes:

a) en el círculo de convergencia $|z-z_0|<R$ la suma de la serie potencial $f(z)$ es una función analítica;

b) en el círculo de convergencia $|z-z_0|<R$ la serie potencial se puede diferenciar término a término cualquier número de veces, además, las series diferenciables tienen el mismo círculo de convergencia $|z-z_0|<R$;

c) la serie (1) puede ser integrada término a término sobre cualquier curva situada en el círculo de convergencia, con la particularidad de que la integral depende sólo de los extremos de la curva de integración y la serie, obtenida de la serie (1) como resultado de la integración desde z_0 hasta z, tiene el mismo círculo de convergencia $|z-z_0|<R$.

3.3*. Supongamos que la serie de potencias (1) converge en el círculo $|z-z_0|<R$, $R>0$, y que $f(z)$ es la suma de esta serie. Muéstrese que los valores de las derivadas $f^{(n)}(z)$ en el punto z_0 pueden expresarse mediante los coeficientes de la serie (1) según las fórmulas

$$f^{(n)}(z_0)=n!c_n,\ n=0,1,\ldots$$

Hállense las regiones de convergencia absoluta y las regiones de convergencia uniforme de las series siguientes ($z\in\mathbb{C}$). Sustituyendo en estas series z por $x\in\mathbb{R}$, investíguese la convergencia absoluta y uniforme de ellas.

3.4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n^2\cdot 2^n}$. **3.5.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n\cdot 2^n\sqrt{2n+1}}$.

3.6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+2)^{2n}}{n}$.

3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n+1}(z-4)^n}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(z-2)^{2n}}{n}$. **3.9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-3)^{2n}}{(2n+1)\,3^n}$.

3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nz^n$. **3.11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nz^n}{3n-2}$.

3.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)\,z^n}{n!}$.

3.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n-1}\right)^{2n+1}2^n(z-1)^n$.

3.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\,(z-i)^n$.

3.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-3)^{2n+1}}{3^n(2n+1)}$. **3.16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{n^n}$.

3.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n+1)(z-1)^n$.

3.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-3)^n}{(2n+1)4^n}$.

3.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2z^n}{n!}$. **3.20.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n2^n\cdot\ln n}$.

3.21. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{z^{3n-1}}{8^{n+1}n\ln^3 n}$. **3.22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{2n+1}(z-1)^n$.

3.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$. **3.24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n(z-3)^{2n-1}}{n(n+1)}$.

3.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+3)^n}{n\sqrt{n}}$. **3.26.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(z-3)^{2n}}{n2^n\ln^2 n}$.

3.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n-1} (z+3)^n$.

3.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, z^{n!}$. **3.29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (z-5)^n}{(3n+1)^{10}}$.

3.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n!\, 2^n}$. **3.31.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} z^{n^2}$.

3 32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^{n^n}}{n^n}$.

2. Desarrollo de las funciones en serie de Taylor. Tiene lugar el siguiente

TEOREMA DE TAYLOR *La función $f(z)$ analítica en el círculo $|z-z_0| < R$ se representa univocamente en este círculo por su serie de Taylor*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

cuyos coeficientes se determinan por las fórmulas [1])

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|\eta - z_0| = r \\ r<R}} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}}\, d\eta,$$

$$n = 0,\ 1,\ \ldots$$

COROLARIO. Si la función $f(z)$ es analítica en la región D y $z_0 \in D$, entonces en el círculo $|z-z_0| < R(z_0, D)$, donde $R(z_0, D)$ es la distancia mínima del punto z_0 hasta la frontera de la región D o hasta el punto más próximo z', en que $f(z)$ no es analítica, $f(z)$ puede representarse en forma de una serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)(z-z_0)^n \tag{3}$$

cuyos coeficientes se determinan según las fórmulas

$$c_n(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|\eta - z_0| = r \\ r<R(z_0,\, D)}} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}}\, d\eta,$$

$$n = 0,\ 1,\ \ldots$$

---

[1]) Aquí y en adelante para anotar las integrales curvilíneas a lo largo de un contorno cerrado (integrales de contorno) empleamos el signo ordinario de la integral.

Si $z_0 = 0$, la serie de Taylor se llama también *serie de Maclaurin*.

EJEMPLO 2. Desarróllese la función $f(z) = \operatorname{sh} z$ en serie de potencias de z (es decir, en serie de Maclaurin).

◀ Ya que $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ es analítica en todo el plano, entonces según el teorema de Taylor su serie de Maclaurin convergirá a ella en todo el plano. Tenemos

$$(\operatorname{sh} z)^{(2n+1)} = \operatorname{ch} z, \quad n = 0, 1,$$

y

$$(\operatorname{sh} z)^{(2n)} = \operatorname{sh} z, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por consiguiente, $c_{2n} = \dfrac{f^{2n}(0)}{(2n)!} = 0$ y $c_{2n+1} = \dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} =$ $= \dfrac{1}{(2n+1)!}$, y el desarrollo buscado tiene la forma

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}. \ ▶$$

OBSERVACION. Si se examina la serie de Taylor de la función $f(x)$ de variable real, es decir, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

entonces, para que la igualdad (3) sea justa (cuando $z = x$ y $z_0 = x_0$) es necesario y suficiente que el término residual de la fórmula de Taylor $R_n(x)$ tienda hacia el cero para $n \to \infty$. El término residual puede ser anotado, por ejemplo, en la forma de Lagrange

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

$$\text{donde } 0 \leqslant \theta \leqslant 1$$

o en la forma de Cauchy

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

o en cualquier forma arbitraria.

EJEMPLO 3. Desarróllese la función e^x en serie de Taylor de potencias de x.

◀ La función $f(x) = e^x$ es infinitamente diferenciable y $(e^x)^{(n)} = e^x$. Por consiguiente, $f^{(n)}(0) = 1$. La fórmula de Taylor con el término residual en la forma de Lagrange tiene la forma

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

En cualquier segmento finito $x \in [-a, a]$, $a > 0$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \leqslant e^a \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

y por eso para todo $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} . \blacktriangleright$$

Para resolver varios problemas se recomienda emplear los siguientes desarrollos de las funciones elementales:

a) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.

b) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times$
$\times \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.

c) $\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times$
$\times \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.

d) $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \times$
$\times \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$.

e) $\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times$
$\times \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z| < 1$.

f) $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \ldots +$
$+ \frac{\alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots = 1 +$
$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha-n+1)}{n!} z^n$, $|z| < 1$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

(en el caso cuando $\alpha = m \in \mathbb{N}$ la función $(1 + z)^m$ se desarrolla según el binomio de Newton en polinomio, además el desarrollo se realiza en todo el plano).

g) para $\alpha = -1$ de f) obtenemos una progresión geométrica infinita con denominador $-z$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots,$$
$$|z| < 1.$$

EJEMPLO 4. Desarróllese la función $\ln(2-5z)$ en serie de potencias de $(z+3)$.

◀ Transformemos el argumento de nuestra función formando la expresión $(z+3)$ con cierto coeficiente. Tenemos:

$$\ln(2-5z) = \ln(2-5(z+3)+15) = \ln 17\left(1 - \frac{5}{17}(z+3)\right) =$$
$$= \ln 17 + \ln\left(1 - \frac{5(z+3)}{17}\right).$$

Apliquemos el desarrollo d) para $\ln(1+u)$, poniendo $u = -\frac{5}{17}(z+3)$. Ya que el desarrollo d) se verifica para $|u| < 1$, entonces nuestro desarrollo se cumplirá para $\frac{5}{17}|z+3| < 1$. De este modo,

$$\ln(2-5z) = \ln 17 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(-\frac{5}{17}(z+3)\right)^n \frac{1}{n} =$$
$$= \ln 17 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{17}\right)^n \frac{(z+3)^n}{n}, \quad |z+3| < \frac{17}{5}.$$

Señalemos que en el eje real en el punto $x = 2/5$ la serie diverge (serie armónica) y en el punto $x = -32/5$, según el criterio de Leibniz, converge. Por consiguiente, $[-32/5, 2/5)$ es el intervalo de convergencia en el eje real. ▶

A menudo para desarrollar la función en serie es cómodo diferenciar o integrar los desarrollos conocidos y para desarrollar las fracciones racionales es conveniente desarrollarlas en fracciones simples.

EJEMPLO 5. Obténgase el desarrollo d) para la función $f(z) = \ln(1+z)$.

◀ Tenemos

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta},$$

donde el camino de integración no rodea el punto $z = -1$. Señalemos que la función $\frac{1}{1+\eta}$ para $|\eta| < 1$ es la suma de la progresión geométrica con denominador $(-\eta)$, es decir,

$$\frac{1}{1+\eta}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\eta)^n,$$

además, si $|\eta|\leqslant|z|<1$, la serie converge uniformemente y se puede integrar término a término. Por eso para z tales, que $|z|<1$, tenemos:

$$\ln(1+z)=\int_0^z\frac{d\eta}{1+\eta}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(-\eta)^n\,d\eta=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}. \quad ►$$

EJEMPLO 6. Desarróllese la función

$$f(z)=\frac{z^2-2z+19}{(z-3)^2(2z+5)}$$

en serie de potencias de z.

◄ Desarrollemos $f(z)$ en fracciones simples. Tenemos

$$f(z)=\frac{1}{2z+5}+\frac{2}{(z-3)^2}.$$

Según la fórmula de la suma de la progresión geométrica

$$\frac{1}{2z+5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{2z}{5}}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2z}{5}\right)^n,\quad |z|<\frac{5}{2},$$

y

$$\frac{2}{z-3}=-\frac{2}{3}\,\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n,\quad |z|<3.$$

Teniendo presente que

$$\left(\frac{2}{z-3}\right)'=-\frac{2}{(z-3)^2}$$

y considerando la afirmación b) del problema 3 2, obtenemos

$$\frac{2}{(z-3)^2}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{3^n}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\,z^n}{3^{n+1}},\quad |z|<3.$$

Sumando las series para $\frac{1}{2z+5}$ y $\frac{2}{(z-3)^2}$ tenemos

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}}+\frac{2(n+1)}{3^{n+2}}\right)z^n, \quad |z|<\frac{5}{2}. ▶$$

EJEMPLO 7. Desarróllese la función

$$f(x)=\int_0^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du$$

en serie de potencias de x ($x\in\mathbb{R}$).

◀ Conociendo el desarrollo de la función $\operatorname{sen} u=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\times$ $\times\frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}$ (véase el desarrollo c)), tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} u}{u}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{u^{2k}}{(2k+1)!}, \quad u\in\mathbb{R}$$

y por eso, utilizando la propiedad c) del problema 3.2, obtendremos

$$\int_0^x\frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_0^x\frac{u^{2k}}{(2k+1)!}\,du=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!\,(2k+1)}, \quad x\in\mathbb{R}. ▶$$

Recurriendo al teorema de Taylor (a la fórmula de Taylor con término residual en una forma cualquiera para la función de variable real) desarróllense en series de potencias de z las siguientes funciones, verificando de este modo la validez de las relaciones respectivas de a) — f):

3.33. e^z. **3.34.** $\cos z$. **3.35.** $\operatorname{sen} z$. **3.36.** $(1+z)^\alpha$.

3.37. 2^z. **3.38.** $\operatorname{sen}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)$. **3.39.** $\cos^2 z$.

Escríbanse los primeros tres términos no nulos del desarrollo en serie de potencias de z de las siguientes funciones:

3.40*. $\operatorname{tg} z$. **3.41.** $\frac{1}{\cos z}$. **3.42.** $\operatorname{th} z$. **3.43.** $e^z\cos z$.

Empleando los desarrollos de las principales funciones elementales a) — g), así como la posibilidad de diferenciar e integrar término a término las series potenciales, desarróllense las funciones en series de potencias de z o indíquense las regiones de convergencia de las series obtenidas [1]:

3.44. e^{-z^2}. **3.45.** $\operatorname{tg}^2 z$. **3.46.** $\frac{z}{4+z^2}$.

3.47. $\frac{z}{3+4z}$. **3.48.** $\sqrt[3]{27-z}$. **3.49.** $\frac{1}{\sqrt{9+z^2}}$.

3.50*. $\frac{3z+1}{(z-2)^2}$. **3.51.** $\frac{3}{1+z-2z^2}$.

3.52. $(1-z)\,e^{-2z}$. **3.53.** $\operatorname{ch} z$.
3.54. $\operatorname{sen} 2z + 2z\cos 2z$. **3.55.** $\operatorname{sen} 2z \cos 2z$.
3.56. $\ln(1+z-2z^2)$. **3.57.** $\ln(z^2+3z+2)$.

3.58. $\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$. **3.59.** $\operatorname{arctg} z$.

3.60. $\operatorname{arcsen} z$. **3.61.** $\int\limits_0^z e^{-\eta^2/2}\,d\eta$.

3.62. $\int\limits_0^z \frac{\operatorname{sen}\eta^2}{\eta}\,d\eta$. **3.63*.** $\frac{z\cos z-\operatorname{sen} z}{z^2}$.

3.64*. $\frac{z\operatorname{sen} z-1+\cos z}{z^2}$.

Desarróllense las funciones en series de potencias de $(z-z_0)$ y determínense las regiones de convergencia de las series obtenidas:

3.65. z^3-2z^2-5z-2, $z_0=-4$.

3.66. $\frac{1}{1-z}$, $z_0=2$. **3.67.** $\frac{1}{1-z}$, $z_0=3i$.

3.68. $\frac{1}{z^2-6z+5}$, $z_0=3$. **3.69.** $\frac{1}{z^2+3z+2}$, $z_0=-4$.

3.70. $\sqrt[3]{z}$, $z_0=1$ **3.71*.** $\frac{1}{z^2}$, $z_0=2$.

3.72. e^{z^2-4z+1}, $z_0=2$. **3.73.** e^{2z-z^2}, $z_0=1$.
3.74. $\operatorname{sen}(z^2+4z)$, $z_0=-2$.
3.75*. $\ln(5z+3)$, $z_0=1$.
3.76. $\ln(z^2+6z+12)$, $z_0=-3$.

[1]) Véanse también los problemas 4.31.—4.36

Hállense las regiones de convergencia de las series indicadas y sus sumas:

3.77. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)z^n.$

3.78. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(z+1)^n.$ **3.79.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{n+1}.$

3.80. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{-2n-2}z^{2n}, \quad a\neq 0.$

3.81. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{2n}.$

3. Teorema de unicidad. Prolongación analítica. Enunciemos *el teorema de unicidad*:

Si las funciones $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en la región D y en el conjunto de distintos puntos $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tiene el punto límite $a\in D$, se cumplen las igualdades $f(z_n)=g(z_n)$, $n\in\mathbb{N}$, entonces

$f(z)=g(z)$ en todos los puntos de D.

Supongamos que la función $f(z)$ es analítica en la región D y la función $g(z)$ es analítica en la región D_1 tal, que la intersección $D\cap D_1=D_2$ contiene una sucesión de distintos puntos $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tiene por lo menos un punto límite $a\in D_2$. Sea, además, $f(z)=g(z)$ para $z\in D_2$. Entonces la función

$$F(z)=\begin{cases} f(z) & \text{para } z\in D,\\ g(z) & \text{para } z\in D_1\setminus D_2\end{cases}$$

se llama *prolongación analítica* de la función $f(z)$ de la región D a la región $D_1\setminus D_2$.

EJEMPLO 8. Demuéstrese que si la función $f(z)$ es continua en la región D que contiene el punto $z=0$, y si $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{(-1)^n}{n}$ para $n=n_0+1, n_0+2, \ldots$, entonces $f(z)$ no es analítica en la región D ($n_0\geqslant 1$ es entero).

◀ Puesto que $f(z)$ es continua en D, es también continua en el segmento del eje real, mientras que en los puntos vecinos $x=\frac{1}{n}$ y $x=\frac{1}{n+1}$, $n>n_0$, ella toma los valores de los signos opuestos. Por eso existen los puntos $x_n\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$ en los cuales $f(x_n)=0$ y, además, $x_n\to 0$. Por consiguiente, en los puntos $x_n\in D$ la función $f(z)$ coincide con la función analítica $g(z)\equiv 0$; ya que $f(z)\not\equiv 0$, $f(z)$ no puede ser una función analítica. ▶

EJEMPLO 9. Demuéstrese que la función

$$g(z)=\frac{1}{1-z}+\frac{z}{(1-z)^2}+\ldots+\frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}+\ldots$$

es prolongación analítica de la función

$$f(z) = 1 + 2z + 2^2z^2 + \ldots + 2^nz^n + \ldots$$

◀ Determinemos la región de convergencia de las series para $g(z)$ y $f(z)$. Tenemos:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{|1-z|^{n+1}}} = \left|\frac{z}{1-z}\right| < 1$$

y

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|2^nz^n|} = 2|z| < 1,$$

es decir, la serie para $g(z)$ converge en la región $D_1 = \{z \mid \operatorname{Re} z < 1/2\}$ (véase el problema (2.20)), mientras que la serie para $f(z)$ converge en la región $D_2 = \{z \mid |z| < 1/2\}$.

Determinemos las sumas de estas series en las regiones indicadas:

$$g(z) = \frac{z}{1-z}\left(1 + \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{(1-z)^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{1-z} \frac{1}{1 - \frac{1}{1-z}} = \frac{1}{1-2z}$$

y

$$f(z) = \frac{1}{1-2z}.$$

Ya que $D_2 \subset D_1$ y en la región D_2 se verifica la identidad $f(z) = g(z)$, la función $g(z)$ es una prolongación analítica de la función $f(z)$ de la región D_2 a la región D_1. ▶

3.82. Demuéstrese que para todo $a \neq 0$ y $|a| \neq 1$ la ecuación funcional $f(z) = f(az)$ no tiene solución, que sea analítica en el punto $z = 0$ y su entorno, y distinta de $f(z) \equiv \text{const}$.

3.83*. Demuéstrese el teorema de unicidad en el caso cuando $\forall z \in D$ $(g(z) = 0)$, es decir, demuéstrese el teorema siguiente: si la función $f(z)$ analítica en la región D se reduce a cero en los puntos $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ situados en la región D y tales, que $\lim_{k\to\infty} z_k = a \in D$, entonces $\forall z \in D$ $(f(z) = 0)$.

3.84. ¿Será analítica la función $f(z)$ en el punto $z = 0$ y su entorno, si para todos los $n > n_0$ enteros satisface la relación $f\left(\frac{1}{n}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi n}{2}$?

3.85. Hállense las funciones analíticas $f(z)$ en el entorno del punto $z = 0$, que satisfacen las condiciones:

a) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n+1}, \quad n\in\mathbb{N};$

b) $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}, \quad n\in\mathbb{N}.$

3.86. Muéstrese que la función

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$$

es prolongación analítica de la función

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

Hállese la expresión analítica de estas funciones en la parte común de las regiones de convergencia de las series.

3.87. Muéstrese que la función

$$g(z)=\ln(2+2i)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-1-2i)^n}{n(2+2i)^n}$$

es prolongación analítica de la función

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}.$$

Hállese la expresión analítica de estas funciones en la parte común de las regiones de convergencia de las series.

§ 4. Aplicación de las series de potencias

1. Cálculo de los valores de las funciones. Los desarrollos a) – g) del § 3 permiten obtener los valores de las funciones correspondientes en los puntos dados con cualquier exactitud.

EJEMPLO 1. Hállese el número e con exactitud hasta 0,00001.

◀ Sustituyendo $x = 1$ en el desarrollo de la función e^x tenemos

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Estimemos el resto

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\dots k} <$$

$$< \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\,n}.$$

Por consiguiente, la igualdad $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ tiene un error absoluto límite igual a $\frac{1}{n!\,n}$. Hallemos n para el cual $\frac{1}{n!\,n} < 0{,}00001$ ó $n!\,n > 100\,000$. Obtenemos $n \geqslant 8$. Calculando $2 + \sum_{k=2}^{8} \frac{1}{k!}$ y redondeando, hallamos la respuesta con la exactitud requerida de $e = 2{,}71828$. ▶

4.1. Determínese el número de términos que hay que tomar en el desarrollo de la función $\ln(1+x)$, para calcular $\ln 2$ con exactitud de hasta 0,0001.

4.2. Determínese el número de términos de la serie que hay que tomar en el desarrollo de la función $\cos x$, para calcular el $\cos 10°$ con exactitud hasta 0,0001.

4.3. ¿Con qué error absoluto límite se puede calcular

$$\sqrt[5]{36}\,(32+4)^{1/5} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{1/5}$$

tomando tres términos de la serie binomial?

4.4. ¿Para qué x el polinomio $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ da el valor de la función $\operatorname{sen} x$ con exactitud hasta 0,0001?

4.5. ¿Cuál es el error absoluto límite de la igualdad

$$\sqrt{a^2+x} = a + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^3}$$

al calcular la $\sqrt{5}$?

Empleando los desarrollos correspondientes, calcúlense los valores indicados de la función con exactitud hasta 0,0001:

4.6. $\sqrt{e}$ **4.7.** $\frac{1}{e}$. **4.8.** $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$.

4.9. $\operatorname{sen} 12^\circ$. 4.10. $\cos 1$. 4.11*. $\operatorname{sen} 1000$.

4.12*. $\sqrt[3]{520}$. 4.13*. $\sqrt{15}$. 4.14*. $\sqrt[4]{700}$.

4.15*. $\ln 2$. 4.16. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

4.17. $I_0(0{,}5)$, donde $I_0(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$.

4.18. $\operatorname{sh} 1$. 4.19. $\operatorname{ch} 1$.

En los problemas 4.20—4.29, empleando los desarrollos en series potenciales, se requiere formar en Fortran los subprogramas-funciones para calcular los valores de las funciones indicadas, con el error absoluto límite dado. Utilícense los parámetros X, EPS, donde X es el argumento y EPS es el error absoluto límite. Se debe escoger los nombres de los subprogramas que no coinciden con los nombres de los subprogramas funciones estándares correspondientes.

4.20*. $y = \operatorname{sen} x$. 4.21. $y = \cos x$.

4.22*. $y = e^x$. 4.23*. $y = (1 + x)^\alpha$.

4.24. $y = \ln(1 + x)$. 4.25*. $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$,

4.26. $y = \operatorname{arctg} x$.

4.27. $y = I_0(x)$ (véase el problema 4.17).

4.28. $y = \operatorname{sh} x$. 4.29. $y = \operatorname{ch} x$.

4.30. Compóngase en Fortran el programa de la resolución de uno de los problemas 4.6—4.19, aplicando los subprogramas-funciones recibidos al resolver los problemas 4.20—4.29. En el programa es necesario prever la comparación de los resultados calculados por medio de la composición de un subprograma-función y empleando el subprograma-función estándar que entra en la biblioteca de los subprogramas obligatorios.

2. Integración de funciones. Desarrollando la función subintegral $f(t)$ en serie potencial, se puede, aplicando el teorema de la integración de las series potenciales, representar la integral $\int_0^x f(t)\,dt$ en forma de serie potencial y calcular el valor de esta integral con exactitud prefijada para cualquier valor de x, a partir de la integral de convergencia de la serie obtenida

EJEMPLO 2. Desarróllese la función $\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ en serie potencial de potencias de x.

◀ Empleando el desarrollo $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ obtenemos

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}$$

en todo el eje numérico. Haciendo uso de la integración término a término, hallamos

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,k!}\,. \text{ ▶}$$

Desarróllense las funciones dadas en series de potencias de x:

4.31. $\int\limits_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t}\,dt$. **4.32.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}\int\limits_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\,dt$.

4.33. $\int\limits_0^x \cos t^2\,dt$. **4.34.** $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$.

4.35. $\int\limits_0^x I_0(t)\,t\,dt$ (véase el problema 4.17).

4.36. $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$.

Calcúlense las integrales con exactitud hasta 0,0001:

4.37. $\int\limits_0^{0,3} \frac{\ln(1+t)}{d}\,dt$. **4.38.** $\int\limits_0^{0,2} \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$.

4.39. $\int\limits_0^{0,5} e^{-t^2}\,dt$. **4.40.** $\int\limits_0^{0,6} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

4.41. $\int\limits_0^{0,8} \frac{dx}{1-x^5}$. **4.42.** $\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

En los problemas 4.43—4.47, empleando los desarrollos en series potenciales, fórmese en Fortran el subprograma-función para calcular las integrales dadas con el error absoluto límite prefijado. Los parámetros son X y EPS, donde X es el límite superior de integración y EPS es el error absoluto límite.

4.43. $\operatorname{Si}(x)=\int\limits_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$ **4.44.** $\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt.$

4.45. $\int\limits_0^x (1+t^s)^\alpha\,dt \quad (s>0,\ \alpha\neq 0).$

4.46. $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt.$ **4.47.** $\int\limits_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt.$

4.48. Empleando los subprogramas-funciones obtenidas, resolviendo los problemas 4.43—4.47, fórmese en Fortran el programa de resolución de uno de los problemas 4.37—4.42.

3. Obtención de las sumas de series numéricas. Aceleración de la convergencia. Determinando la suma de una serie numérica se calcula su suma parcial, para la cual la magnitud del resto de la serie no sobrepasa el error absoluto prefijado. Aplicando los desarrollos en series potenciales conocidos, se puede expresar, en algunos casos, la suma de la serie numérica en forma del valor de la función en un punto determinado.

Demuéstrense las igualdades indicadas:

4.49. $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)}=\frac{1}{\alpha+n}.$

4.50*. $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)}=\frac{1}{2(\alpha+n)(\alpha+n+1)}.$

4.51*. $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)\ldots(\alpha+k+p)}=$

$$=\frac{1}{p(\alpha+n)\ldots(\alpha+n+p-1)}\ (p\in\mathbb{N}).$$

4.52*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\ln 2.$

4.53*. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.

Hállense las sumas de las series sin calcular las sumas parciales:

4.54. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$. **4.55.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}$.

4.56. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

4.57. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}$. **4.58.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}$.

4.59. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n\cdot(2n)!}$. **4.60.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

Cuando se determina la suma de una serie numérica se requiere tomar un número grande de términos, si el resto de esta serie tiende lentamente a cero. Esta serie debe ser transformada en serie, cuyo resto tiende a cero más rápidamente. Esta transformación se llama *aceleración de convergencia* de la serie. Uno de los métodos de aceleración de convergencia es *el método de Kummer*. La suma desconocida A de la serie convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k \tag{1}$$

se calcula según la fórmula

$$A=qB+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-qb_k), \tag{2}$$

donde B es la suma conocida de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ tal, que existe el límite

$$q=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}\neq 0.$$

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-qb_k) \tag{3}$$

converge más rápidamente, que la serie inicial (1), es decir, el resto de la serie (3) es un infinitésimo de orden más elevado, que el resto de la serie (1).

EJEMPLO 3. Hállese la suma de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ con exactitud hasta 0,001.

◀ Aclaremos cuántos términos de la serie dada hay que tomar para alcanzar la exactitud requerida. Estimando el resto (véase el problema 4.49) obtenemos

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} < 0{,}001,$$

de donde se deduce que $n > 1000$, es decir, para obtener la exactitud indicada se requiere tomar 1001 términos de la serie inicial.

Mejoremos la convergencia de la serie. Poniendo en la fórmula (2)

$$a_k = \frac{1}{k^2}, \quad b_k = \frac{1}{k(k+1)}, \quad q = 1, \quad a_k - qb_k = \frac{1}{k^2(k+1)},$$

hallamos (véase el problema 4.49 para $\alpha = 0$ y $n = 1$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)}. \qquad (4)$$

Apliquemos la fórmula (2) para transformar la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \times$ $\times \frac{1}{k^2(k+1)}$, poniendo ahora $a_k = \frac{1}{k^2(k+1)}$, $b_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, $q = 1$ y $a_k - qb_k = \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}$. Entonces, considerando (4), tenemos (véase el problema 4.50 para $\alpha = 0$ y $n = 1$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}.$$

El cálculo de la suma de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ se redujo al cálculo de la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}.$$

Estimando el resto

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k(k+1)(k+2)} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3n(n+1)(n+2)},$$

obtenemos $\frac{1}{3n^3} < 0{,}001 \cdot 2$, de donde $n^3 > \frac{1}{3} \cdot 2000 \approx 666{,}7$ ó $n \geqslant 9$, es decir, la exactitud requerida se obtiene para $n=9$. Por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + 2 \sum_{k=1}^{9} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)} = 1 + 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}1975 = 1{,}645.$$

Aplicando una vez más la transformación a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \times$ $\times \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}$ se podría mejorar más la convergencia. ▶

En los problemas 4.61—4.65, aplicando la transformación de Kummer, hállense las sumas de las series indicadas con exactitud hasta 0,0001, tomando con este fin no más de 10 términos de la serie obtenida. Utilícense las relaciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \zeta(p) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) \zeta(p) \qquad (p > 1).$$

Los valores de la función zeta $\zeta(p)$ se toman de la tabla

p	ζp
2	1,6449340668
3	1,2020569032
4	1,0823232337
5	1,0369277551
6	1,0173430620
7	1,0083492774
8	1,0040773562

4.61*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. **4.62*.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}$.

4.63*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2}$. **4.64*.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(5n+3)}$.

4.65*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n+2}$.

4.66. Fórmese en Fortran el programa para resolver uno de los problemas 4.61—4.65.

4. Integración de las ecuaciones diferenciales aplicando las series. Las series potenciales se emplean ampliamente en la resolución de ecuaciones diferenciales. Para una serie de ecuaciones diferenciales se ha mostrado, que la solución $y(x)$ es representable en forma de la serie potencial

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \tag{5}$$

cuyos coeficientes se pueden determinar de distintos modos, teniendo en cuenta la igualdad dada.

a) Sea que se requiere hallar la solución de la ecuación $y'' = f(x, y, y')$, que satisfaga las condiciones $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, además, la función $f(x, y, y')$ en el punto (x_0, y_0, y_1) tiene derivadas parciales de cualquier orden. En este caso los coeficientes $y^{(k)}(x_0)$ de la serie (5) se determinan diferenciando sucesivamente la ecuación inicial y sustituyendo en ella x_0 y los valores ya hallados de $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, . . .

EJEMPLO 5. Hállese la solución de la ecuación $y'' = x^2 y$, que satisface las condiciones $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

◀ Tenemos $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ y a partir de la ecuación dada hallamos $y''(0) = 0$. Luego, diferenciando la ecuación, tenemos

$$y''' = x^2 y' + 2xy,$$

$$y^{\mathrm{IV}} = x^2 y'' + 4xy' + 2y,$$

$$y^{\mathrm{V}} = x^2 y''' + 6xy'' + 6y',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(k+2)} = x^2 y^{(k)} + 2kxy^{(k-1)} + k(k-1)\, y^{(k-2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

y para $x = 0$ recibimos de aquí

$$y^{(k+2)}(0) = k(k-1)\, y^{(k-2)}(0), \quad k = 2, 3, \ldots$$

Puesto que $y(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, entonces

$$y^{(4n)}(0) = y^{(4n+2)}(0) = y^{(4n+3)}(0) = 0$$

e

$$y^{(4n+5)}(0) = (4n+2)(4n+3)\, y^{(4n+1)}(0) =$$
$$= 2\cdot 3\cdot 6\cdot 7 \ldots (4n+2)(4n+3), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por consiguiente,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\cdot 3\cdot 6\cdot 7 \ldots (4n+2)(4n+3)}{(4n+1)!}\, x^{4n+1}.$$

Según el criterio de d'Alembert la serie obtenida converge para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir, la función $y(x)$ definida por esta serie es la solución de la ecuación dada para cualquier x. ▶

Hállense las soluciones de las ecuaciones que satisfacen las condiciones dadas:

4.67. $y'' = x^2 y$, $y(0) = y'(0) = 1$.

4.68. $y'' = -x^2 y' - 2xy + 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Hállense los cinco primeros términos del desarrollo de la solución de la ecuación diferencial en serie potencial:

4.69. $y' = 2\cos x - xy^2$, $y(0) = 1$.

4.70. $y'' = -2xy$, $y(0) = y'(0) = 1$.

4.71. $y'' = y\cos x + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

b) Si la ecuación diferencial inicial es lineal respecto a la función buscada y sus derivadas, además el coeficiente de la derivada de alto orden en el punto x_0 es diferente de cero, entonces es necesario buscar la solución en forma de la serie (5) con coeficientes indeterminados a_k, $k = 0, 1, \ldots$ El carácter legítimo de este método se deduce de la afirmación que se demuestra en la teoría analítica de ecuaciones diferenciales, que citamos para la ecuación de segundo orden.

TEOREMA 1. *Si en la ecuación diferencial*

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = f(x) \tag{6}$$

las funciones $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ y $f(x)$ son analíticas en el entorno del punto x_0 y $p_0(x_0) \neq 0$, existe una solución de la ecuación (6), que es representable en la forma de la serie potencial $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$.

EJEMPLO 6. Hállese la solución (en la forma de la serie potencial) de la ecuación

$$y'' - xy' + y = 1,$$

que satisface las condiciones $y(0) = y'(0) = 0$.

◀ Buscamos la solución en forma de la serie $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, en la cual, en virtud de las condiciones $y(0) = y'(0) = 0$, tenemos $a_0 = a_1 = 0$. Por consiguiente, $y(x) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k x^k$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación, obtenemos

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = 1.$$

De aquí hallamos que $2 \cdot 1 \cdot a_2 = 1$, es decir, $a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2}$, y

$$(k+1)(k+2)\,a_{k+2} = (k-1)\,a_k \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Ya que $a_1 = 0$, entonces $a_{2m+1} = 0$ para todos los $m = 0, 1, \ldots$ y para $k = 2m$, $m = 1, 2, \ldots$, obtenemos la fórmula recurrente

$$a_{2(m+1)} = \frac{(2m-1)\,a_{2m}}{(2m+1)(2m+2)}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

de la cual deducimos las igualdades

$$a_{2(m+1)} = \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!}.$$

Por consiguiente, la solución buscada tiene la forma

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!}\, x^{2m+2},$$

con la particularidad de que la serie obtenida converge para cualquier $x \in \mathbb{R}$. ▶

Empleando las series potenciales, intégrense las siguientes ecuaciones diferenciales:

4.72. $y'' + xy' + y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

4.73. $y'' - xy' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

4.74. $y'' + xy' + y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

c) Si el coeficiente de la derivada mayor en la ecuación lineal en el punto x_0 se reduce a cero, es necesario aplicar el siguiente teorema.

TEOREMA 2. *Si en la ecuación diferencial*

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0 \tag{7}$$

las funciones $p_0(x)$, $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son analíticas en el entorno del punto x_0, además el punto x_0 es cero de orden s de la función $p_0(x)$, cero de orden no inferior a $s-1$ de la función $p_1(x)$ y cero de orden no inferior a $s-2$ de la función $p_2(x)$, entonces la solución de la ecuación (7) en el entorno del punto x_0 existe y puede representarse en la forma de la serie potencial generalizada

$$y(x) = (x-x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k,$$

donde $a_0 \neq 0$ y $r \in \mathbb{R}$.

EJEMPLO 7. Hállese la solución (en la forma de la serie potencial generalizada) de la ecuación

$$xy'' + y' + xy = 0,$$

que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

◀ Los coeficientes de la ecuación satisfacen las condiciones del teorema 2, por eso buscamos la solución en forma de serie potencial generalizada

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}, \quad a_0 \neq 0.$$

Tenemos

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)\,a_k x^{k+r-1},$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)\,a_k x^{k+r-2}$$

Sustituyendo estas series en la ecuación tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)\,a_k x^{k+r-1} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)\,a_k x^{k+r-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+1} = 0,$$

es decir,

$$r^2 a_0 x^{r-1} + (r+1)^2 a_1 x^r + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+r)^2 a_k + a_{k-2})\,x^{k+r-1} = 0.$$

De aquí siguen las igualdades

$$r^2 a_0 = 0, \quad (r+1)^2 a_1 = 0, \quad (k+r)^2 a_k + a_{k-2} = 0.$$

Según la condición $a_0 \neq 0$. Por consiguiente, $r = 0$ y entonces

$$a_1 = 0 \quad \text{y} \quad k^2 a_k = -a_{k-2}, \quad k = 3, 4, \ldots$$

A partir de estas igualdades concluimos que $a_{2m+1} = 0$ para todo $m = 0, 1, \dots$ Teniendo presente la condición inicial $y(0) = 1$ hacemos la conclusión de que $a_0 = 1$ y tenemos la fórmula recurrente

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m)^2}$$

de la cual obtenemos

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{((2m)!!)^2} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m}(m!)^2}.$$

Por lo tanto, la solución buscada se escribe en la forma de

$$y(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2^{2m}(m!)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Hállese la solución general de la ecuación diferencial en forma de la serie potencial generalizada:

4.75*. $xy'' + 2y' + xy = 0$. **4.76.** $4xy'' + 2y' + y = 0$.

5. Ecuación y funciones de Bessel. El caso particular de la ecuación (6), cuyos coeficientes satisfacen las condiciones del teorema 2, es la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y = 0. \tag{8}$$

Sus soluciones son las funciones cilíndricas de Bessel de primer orden

$$I_\nu(x) = a_0^{(\nu)} x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)} \tag{9}$$

y para los ν no enteros

$$I_{-\nu}(x) = a_0^{(\nu)} x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,(1-\nu)(2-\nu)\dots(k-\nu)}. \tag{10}$$

Si ν es un número entero, $\nu = n$, entonces la segunda solución particular de la ecuación de Bessel (8) es la función de Neumann (o de Weber), que se determina de la relación

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{I_\nu(x)\cos\nu\pi - I_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}\nu\pi}$$

y que es la función cilíndrica de segundo género de orden n. En las fórmulas (9) y (10) suele tomarse la siguiente constante $a_0^{(\nu)}$:

$$a_0^{(\nu)} = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}, \tag{11}$$

donde $\Gamma(\nu) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}x^{\nu-1}\,dx$ es la función gamma de Euler.

4.77. Empleando la representación (9) para $I_\nu(x)$ demuéstrense las relaciones siguientes:

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu I_\nu(x)\right) = x^\nu I_{\nu-1}(x), \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{I_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{I_{\nu+1}(x)}{x^\nu}. \tag{13}$$

4.78. Partiendo de las relaciones (12) y (13) dedúzcanse las relaciones

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x),$$

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x).$$

4.79*. Empleando la representación (9) y el valor $a_0^{(\nu)}$ de (11), exprésense $I_{-1/2}(x)$ e $I_{1/2}(x)$ mediante las funciones elementales.

4.80. Demuéstrese que si $I_\nu(s)$ es la solución de la ecuación (8), entonces $I_\nu(\alpha x)$ es la solución de la ecuación

$$x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - \nu^2)\,y = 0. \tag{14}$$

Escríbase la solución general de la ecuación (14).

Utilizando el resultado del problema 4.80, hállese la solución general de la ecuación:

4.81. $xy'' + y' + 4xy = 0.$

4.82. $9x^2y'' + 9xy' + (36x^2 - 1)\,y = 0.$

4.83. $x^2y'' + xy' + (3x^2 - 4)\,y = 0.$

4.84. $x^2y'' + xy' + \left(9x^2 - \frac{1}{25}\right)y = 0.$

§ 5. Series de Laurent

1. **Series de Laurent. Teorema de Laurent.** Se llama *serie de Laurent* la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n, \tag{1}$$

además, la serie

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n\,(z-z_0)^n$$

se denomina *parte principal* de la serie de Laurent y la serie

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

parte regular. Si

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}=r<R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

la región de convergencia de la serie (1) es un anillo $K=\{z \mid 0\leqslant r<|z-z_0|<R\}$. En este anillo K, la suma de la serie $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ es una función analítica, además los coeficientes de la serie c_n están relacionados con la función $f(z)$ mediante las fórmulas

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta-z_0|=r'} \frac{f(\eta)}{(\eta-z)^{n+1}}\,d\eta, \quad n=0, \pm 1, \ldots, \tag{2}$$

donde $r<r'<R$.

EJEMPLO 1. Hállense la región de convergencia y la suma de la serie de Laurent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n (z-1)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}.$$

◀ Aplicando el criterio de Cauchy a cada uno de estos sumandos tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n |z-1|^{n+1}}}=\frac{1}{2|z-1|}<1$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n|z-1|^{n-1}}{3^n}}=\frac{|z-1|}{3}<1.$$

De aquí concluimos que la región de convergencia de la serie inicial es un anillo

$$K=\left\{z \,\middle|\, \frac{1}{2}<|z-1|<3\right\}.$$

Observando que los sumandos son derivadas de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^n (z-1)^n} \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n},$$

podemos escribir que en el anillo K

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}=$$

$$=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(z-1)^n}\right)'+\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^n}\right)'=$$

$$=-\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{2(z-1)}}\right)'+\left(\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{3}}\right)'=$$

$$=-2\left(\frac{z-1}{2z-3}\right)'+\left(\frac{3}{4-z}\right)'=\frac{3}{(4-z)^2}+\frac{2}{(2z-3)^2}.$$

De este modo, la suma de la serie dada es la función

$$f(z)=\frac{3}{(4-z)^2}+\frac{2}{(2z-3)^2},\quad \frac{1}{2}<|z-1|<3. \blacktriangleright$$

TEOREMA DE LAURENT. *Si la función $f(z)$ es analítica en el anillo $0\leqslant r<|z-z_0|<R$, entonces en este anillo es representable de modo único en la forma de serie de Laurent*

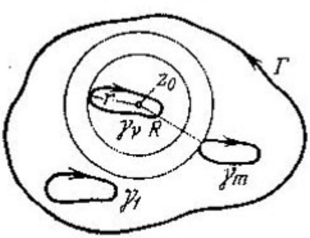


Fig. 101

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

cuyos coeficientes se calculan según las fórmulas (2)

COROLARIO. Sea $f(z)$ analítica en la región multiplemente conexa D, limitada por el contorno Γ y los contornos interiores $\gamma_1^-, \gamma_2^-, \ldots, \gamma_m^-$ (fig. 101). Si el punto z_0 está situado en el interior (o en la frontera) de uno de los contornos interiores γ_ν y la magnitud $r=\max\limits_{\eta\in\gamma_\nu}|z_0-\eta|$ es menor que la distancia R de z_0 hasta la parte restante de la frontera de la región D o hasta el punto en el cual $f(z)$ no es analítica, es decir,

$$0\leqslant r=\max_{\eta\in\gamma_\nu}|z_0-\eta|<R=$$

$$\min_{\eta\in\Gamma\cup\gamma_1\cup\ldots\cup\gamma_{\nu-1}\cup\gamma_{\nu+1}\cup\ldots\cup\gamma_m}|z_0-\eta|,$$

entonces en el anillo $r < |z - z_0| < R$ la función $f(z)$ puede ser representada por su serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z_0)(z-z_0)^n, \quad r < |z-z_0| < R,$$

cuyos coeficientes $c_n(z_0)$ se determinan según las fórmulas (2).

Se llama serie de Laurent para la función $f(z)$ *en el entorno del punto* $z = \infty$ la serie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \left(\text{ó} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n\right), \tag{3}$$

que converge en cierto anillo $r < |z| < \infty$ $(r < |z-a| < \infty$, respectivamente), además, la parte principal de la serie de Laurent es $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n\right)$ y la parte regular es la serie $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_n z^n \times$ $\times \left(\sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_n (z-a)^n\right)$.

EJEMPLO 2. Desarróllese en serie de Laurent de potencias de z la función $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$.

◀ Ya que la analiticidad de la función se altera en los puntos $z = 0$ y $z = 1$, la región de convergencia de la serie de Laurent será el anillo $0 < |z| < 1$. Señalando que para $n \leqslant -2$ la función $\dfrac{1}{z^{n+2}(1-z)}$ es analítica en el círculo $|z| \leqslant \rho < 1$, podemos escribir que

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} \frac{1}{z^{n+2}(1-z)}\, dz = 0$$

$$\text{para } n = -2, -3, \ldots$$

Luego, aplicando la fórmula de Cauchy para la función $\varphi(z) = \dfrac{1}{1-z}$ y sus derivadas, para $n \geqslant -1$ podemos escribir

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} \frac{\varphi(z)}{z^{n+2}}\, dz = \frac{\varphi^{n+1}(0)}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \left.\frac{(n+1)!}{(1-z)^{n+2}}\right|_{z=0} = 1.$$

De este modo, para $0 < |z| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \tag{4}$$

es decir, la parte principal contiene un término y la parte regular, un número infinito de términos. ▶

El cálculo de las integrales de contorno (2), como regla general, es bastante difícil. Por eso, para desarrollar las funciones en las series de Laurent se emplean procedimientos artificiales. Así pues, en el ejemplo 2 se podría representar la función $f(z)$ en forma de la suma de fracciones, es decir,

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z},$$

con la particularidad de que el primer sumando es ya el desarrollo en serie de Laurent de potencias de z y el segundo sumando es la suma de la progresión geométrica con denominador z, es decir, tenemos el desarrollo (4).

Hállense las regiones de convergencia y las sumas de las series siguientes:

5.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^n}$. **5.2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{ni^n2^n}{(z+i)^{n+1}}$.

5.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n+3}}{n!}$.

5.4. $\sum\limits_{n=-\infty}^{-2}(n+1)\,i^{n+2}(z-1)^n$.

Hállense todos los desarrollos de las funciones indicadas en series de Laurent de potencias de $z-z_0$ y determínense las regiones de convergencia de los desarrollos obtenidos:

5.5. $\frac{1}{z(z-1)}$, $z_0=1$. **5.6*.** $\frac{1}{z(z-1)}$, $z_0=\infty$.

5.7*. $\frac{z}{(z^2+1)^2}$, $z_0=i$.

5.8*. $\frac{1}{(z^2+1)^2}$, $z_0=\infty$.

5.9. $\frac{\cos z}{z^3}$, $z_0=0$. **5.10.** $\frac{\cos z}{z^3}$, $z_0=\infty$.

5.11. $\operatorname{sen}\frac{1}{z-2}$, $z_0=2$. **5.12.** $z^2e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=0$.

5.13. $z^2e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=\infty$. **5.14.** $\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z_0=2$.

5.15. Hállense los tres primeros términos del desarrollo de la función $f(z)=\operatorname{sen}\frac{1}{1-z}$ en serie de Laurent en el entorno del punto $z_0 = \infty$. ¿Cuál es la región de convergencia de esta serie?

2. Carácter de los puntos singulares aislados. El punto z_0 se llama *regular* para la función $f(z)$ analítica en la región D, si existe tal serie potencial $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)(z-z_0)^n$ con el radio de convergencia $r(z_0) > 0$ tal, que en la parte común del círculo de convergencia $|z-z_0| < r(z_0)$ y la región D la suma de esta serie $\varphi_{z_0}(z)$ coincide con $f(z)$. Los puntos que no son regulares se llaman *singulares*.

El punto z_0 se llama punto singular *aislado* de la función $f(z)$, si $f(z)$ es una función uniforme analítica en el anillo $0 < |z-z_0| < R$ y z_0 es un punto singular.

Análogamente el punto $z_0 = \infty$ se llama punto singular aislado de la función $f(z)$, si $f(z)$ es una función uniforme analítica en el anillo $r < |z| < \infty$ y $z = \infty$ es un punto singular.

El punto singular aislado z_0 de la función $f(z)$ se llama:

punto singular evitable, si existe el límite finito

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = a \neq \infty;$$

polo de orden $m \geqslant 1$, si para la función $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ el punto z_0 es un cero de orden m, es decir, $g(z)$ tiene el aspecto $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$ (es evidente que si z_0 es polo, entonces $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$);

punto singular esencial, si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ no existe

Es cómodo investigar el carácter del punto singular infinitamente alejado, sustituyendo $z = \frac{1}{\eta}$; esta sustitución hace pasar el punto infinitamente alejado $z = \infty$ al punto $\eta = 0$.

EJEMPLO 3. Hállense todos los puntos singulares de la función $f(z) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{z}}+1}$ y determínese su carácter.

Los puntos singulares son el punto $z = 0$ y los puntos en los que el denominador se reduce a cero.

Tenemos $e^{\frac{1}{z}} + 1 = 0$ ó $e^{\frac{1}{z}} = -1 = e^{2\pi mi + \pi i}$, es decir, $e^{\frac{1}{z}} + 1 = 0$, si $\frac{1}{z_m} = (2m+1)\pi i$, $m \in \mathbb{Z}$, además estos puntos son ceros de primer orden. Por consiguiente, en los puntos $z_m = \frac{1}{(2m+1)\pi i}$, $m \in \mathbb{Z}$, la función $f(z)$ tiene polos de primer orden. El punto $z = 0$ no es un punto singular aislado, ya que es el límite de los polos, pues $\lim_{m\to\infty} z_m = 0$. ▶

5.16*. Demuéstrese, que si en el desarrollo (1) falta la parte principal, es decir, todos los coeficientes c_n con números negativos ($n = -1, -2, \ldots$) son nulos, entonces esto hecho es una condición necesaria y suficiente, de que el punto z_0 es un punto singular evitable de la función $f(z)$.

5.17*. Demuéstrese que la existencia en la parte principal del desarrollo (1) de no más que $m \geqslant 1$ términos, además $c_{-m} \neq 0$ y $c_{-n} = 0$ para $n \geqslant m + 1$, es una condición necesaria y suficiente de que el punto z_0 es el polo de orden m para la función $f(z)$.

5.18*. Demuéstrese que si z_0 es un punto singular esencial de la función $f(z)$, entonces existe la sucesión de puntos (z_n), $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, tal, que $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$.

5.19*. Apoyándose en el resultado del problema 5.18 demuéstrese, que si z_0 es un punto singular esencial de la función $f(z)$, entonces para cualquier número complejo $A \neq \infty$ existe la sucesión de puntos $(z_n(A))$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(A) = z_0$ tal, que $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n(A)) = A$.

5.20. Determínese la región de convergencia de las partes regular y principal del desarrollo de Laurent (3) en el entorno del punto infinitamente alejado.

Indíquense todos los puntos singulares finitos de las funciones dadas más abajo y determínese su carácter:

5.21. $\dfrac{1}{(z^2+i)^3}$. **5.22.** $\dfrac{z+2}{z(z+1)(z-1)^3}$.

5.23. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$. **5.24.** $\operatorname{tg}^2 z$.

5.25. $e^{\frac{1}{z-3i}}$. **5.26.** $\cos\dfrac{1}{z+2i}$.

5.27. $\operatorname{tg}\dfrac{1}{z-1}$. **5.28.** $\dfrac{\operatorname{tg}(z-1)}{z-1}$.

5.29. $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$ **5.30.** $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^5}$.

5.31. $\dfrac{1}{e^z-3}$.

Para las funciones dadas más abajo aclárese el carácter del punto singular infinitamente alejado (considérese regular el punto singular evitable):

5.32. $\dfrac{z^2}{5-2z^2}$. **5.33.** $\dfrac{3z^5-5z+2}{z^2+z-4}$.

5.34. $\frac{z}{1-3z^4}$. 5.35. $1-z+2z^2$.

5.36. e^{-z}. 5.37. $\cos z$.

5.38. $e^{\frac{1}{z}}+2z^2-5$. 5.39. $e^{\frac{1}{z^2}}$.

5.40. $e^{\frac{1}{3-2z}}$. 5.41. $e^{-2z}+3z^3-z+8$.

§ 6. Residuos y sus aplicaciones

1. Residuo de la función y su cálculo. Si la función $f(z)$ es analítica en cierto entorno del punto z_0, excepto, quizás, el mismo punto z_0, entonces se llama *residuo* de la función $f(z)$ respecto al punto z_0, designado por res $[f(z);\ z_0]$, el número igual al valor de la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(\eta)\,d\eta$, donde C es un contorno cerrado simple, situado en la región de analiticidad de $f(z)$, que contiene en su interior sólo un punto singular z_0. En calidad de C es cómodo tomar la circunferencia $|\eta-z_0|=\rho$ de radio bastante pequeño ρ.

El residuo de la función coincide con el coeficiente c_{-1} del desarrollo de $f(z)$ en la serie de Laurent según las potencias de $(z-z_0)$, es decir,

$$\text{res}\,[f(z);\ z_0]=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta-z_0|=\rho} f(\eta)\,d\eta.$$

Si $z_0=\infty$ es un punto singular aislado de la función $f(z)$, entonces

$$\text{res}\,[f(z);\ \infty]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R^-} f(\eta)\,d\eta,$$

donde $C_R^-=\{\eta\mid|\eta|=R\}$, R es bastante grande y el recorrido del contorno se realiza en sentido horario. Señalemos que si

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,\qquad r<|z|<\infty,$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=\rho>r}\frac{f(\eta)}{\eta^{n+1}}\,d\eta,\quad n=0,\ \pm1,\ \ldots,$$

entonces

$$\text{res}\,[f(z);\ \infty]=-c_{-1}.$$

Si z_0 es un polo de primer orden de la función $f(z)$, entonces

$$\text{res}\,[f(z);\ z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\,f(z).$$

además, si $f(z)$ es representable en la forma de $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, donde $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, entonces

$$\operatorname{res}[f(z),\ z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Si z_0 es un polo de orden $m \geqslant 2$ de la función $f(z)$, entonces

$$\operatorname{res}[f(z);\ z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}((z-z_0)^m f(z))}{\partial z^{m-1}}.$$

EJEMPLO 1. Hállese $\operatorname{res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+9};\ 3i\right]$.

◀ Puesto que el punto $z_0 = 3i$ es un polo de primer orden, entonces

$$\operatorname{res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+9};\ 3i\right] = \lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{e^{iz}}{(z+3i)(z-3i)} =$$

$$= \frac{e^{i\cdot 3i}}{6i} = -\frac{i}{6e^3}. \ ▶$$

EJEMPLO 2. Hállese $\operatorname{res}\left[\frac{\cos 2z}{(z-1)^3};\ 1\right]$.

◀ El punto $z_0 = 1$ es un polo de tercer orden, por eso

$$\operatorname{res}\left[\frac{\cos 2z}{(z-1)^3};\ 1\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-1)^3\frac{\cos 2z}{(z-1)^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}(-2^2\cos 2z) = -2\cos 2. \ ▶$$

EJEMPLO 3. Hállese $\operatorname{res}[e^{\frac{3}{z-2}};\ 2]$.

◀ El punto $z_0 = 2$ es esencialmente singular, por eso para hallar el residuo determinemos el coeficiente c_{-1} del desarrollo $e^{\frac{3}{z-2}}$ en la serie de Laurent de potencias de $(z-2)$. Ya que

$$e^{\frac{3}{z-2}} = 1 + \frac{3}{z-2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{3}{z-2}\right)^2 + \ldots,\quad 0 < |z-2| < \infty,$$

entonces $c_{-1} = 3$. Por consiguiente,

$$\operatorname{res}[e^{\frac{3}{z-2}};\ 2] = 3. \ ▶$$

Hállense los residuos de las funciones dadas más abajo respecto a cada uno de sus polos distintos de ∞:

6.1. $\frac{z^2+1}{z-2}$. **6.2.** $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$. **6.3.** $\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

6.4. $\frac{\operatorname{sen} 2z}{(z+1)^3}$. **6.5.** $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$. **6.6.** $\operatorname{tg} z$.

6.7. $\operatorname{ctg}^2 z$. **6.8.** $\frac{\cos^3 z}{z^3}$. **6.9.** $\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$.

6.10. $\frac{1}{z(1-z^2)}$. **6.11.** $\frac{1}{z^2-z^5}$. **6.12.** $\frac{\cos 4z}{(z-2)^6}$.

Hállense los residuos de las funciones respecto al punto $z_0 = 0$:

6.13. $e^{\frac{1}{z}}$. **6.14.** $\cos\frac{1}{z}$. **6.15.** $\operatorname{sen}\frac{1}{z}$.

Hállense los residuos de las funciones respecto al punto $z_0 = \infty$:

6.16. $\operatorname{sen}\frac{1}{z}$. **6.17.** $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$.

6.18*. $\frac{\operatorname{sen} z}{z^2+9}$. **6.19.** $\frac{z^4+z}{z^6-1}$. **6.20.** $z\cos^2\frac{\pi}{4}$.

6.21. $\frac{z^2}{z-1}\operatorname{sen}\frac{1}{z}$.

2. Teoremas sobre los residuos y sus aplicaciones al cálculo de las integrales de contorno.

PRIMER TEOREMA SOBRE LOS RESIDUOS. *Si la función $f(z)$ es analítica en la región D, excepto los puntos singulares aislados $z_1, z_2, \ldots, z_N$ situados en esta región, entonces para cualquier contorno cerrado simple $C \subset D$ que abarca los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_N$, se tiene*

$$\int_{C^+} f(\eta)\,d\eta = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z);\ z_k].$$

SEGUNDO TEOREMA SOBRE LOS RESIDUOS. *Si $f(z)$ es analítica en todo el plano complejo, excepto los puntos singulares aislados $z_1, z_2, \ldots, z_{N-1}$ y $z_N = \infty$, entonces*

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z);\ z_k] = 0.$$

EJEMPLO 4. Calcúlese la integral $\int_{C^+} \frac{e^z}{z^2+4}\,dz$, donde $C = \{z \mid |z| = 3\}$.

◀ Puesto que en el interior del contorno C se encuentran dos puntos singulares de la función subintegral, los polos de primer orden $z_{1,2} = \pm 2i$, entonces, aplicando el primer teorema sobre los residuos, podemos escribir

$$\int_C \frac{e^z}{z^2+4}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2+4};\ 2i\right] + \operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2+4};\ -2i\right]\right) =$$

$$=2\pi i\left(\frac{e^z}{2z}\bigg|_{z=2i}+\frac{e^z}{2z}\bigg|_{z=-2i}\right)=2\pi i\left(\frac{e^{2i}}{4i}-\frac{e^{-2i}}{4i}\right)=$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(e^{2i}-e^{-2i}\right)=\pi i \operatorname{sen} 2=\pi \operatorname{sh} 2i. ▶$$

Ejemplo 5. Calcúlese la integral

$$I=\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^{10}+1}.$$

◀ La función subintegral $f(z)=\frac{1}{z^{10}+1}$ tiene diez puntos singulares $z_k=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}$, $k=0, 1, \ldots, 9$, que son polos simples situados en la circunferencia unitaria. Ya que el desarrollo de la función en el entorno del punto infinitamente alejado tiene la forma

$$\frac{1}{z^{10}+1}=\frac{1}{z^{10}\left(1+\frac{1}{z^{10}}\right)}=\frac{1}{z^{10}}\left(1-\frac{1}{z^{10}}+\frac{1}{z^{20}}-\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{z^{10}}-\frac{1}{z^{20}}+\frac{1}{z^{30}}-\ldots,\quad 1<|z|<\infty,$$

entonces $-c_{-1}=\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^{10}+1};\ \infty\right]=0$. Por eso, aplicando el segundo teorema sobre los residuos podemos escribir que

$$\sum_{k=0}^{9}\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^{10}+1};\ e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}\right]=-\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^{10}+1};\ \infty\right]=0.$$

De este modo,

$$I=2\pi i\sum_{k=0}^{9}\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^{10}+1};\ e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}\right]=0. ▶$$

Empleando los teoremas sobre los residuos, calcúlense las siguientes integrales:

6.22. $\int\limits_{C^+}\frac{dz}{z^4+1}$, donde $C=\{z \mid |z-1|=1\}$.

6.23. $\int\limits_{C^-}\frac{dz}{z^4+1}$, donde $C=\{z \mid |z-1|=1\}$.

6.24. $\int\limits_{C^+}\frac{z\,dz}{(z-1)(z-1)}$, donde $C=\{z \mid |z-2|=2\}$.

6.25. $\displaystyle\int_{C+} \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)}$, donde $C=\left\{z \mid |z-2|=\frac{1}{2}\right\}$.

6.26. $\displaystyle\int_{C-} \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)}$, donde $C=\left\{z \mid |z-2|=\frac{1}{2}\right\}$.

6.27. $\displaystyle\int_{C+} \frac{e^z\,dz}{z^2(z^2+9)}$, donde $C=\{z \mid |z|=1\}$.

6.28*. $\displaystyle\int_{C+} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2+9}\,dz$, donde $C=\{z \mid |z|=4\}$.

6.29. $\displaystyle\int_{C+} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$, donde $C=\{z \mid |z|=1\}$,

n es un número natural y $0\leqslant |a|<1<|b|$.

6.30*. $\displaystyle\int_{C+} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$, donde $C=\{z \mid |z|=1\}$,

n es un número natural y $0\leqslant |a|<|b|<1$.

6.31. $\displaystyle\int_{C+} \operatorname{sen}\frac{1}{z}\,dz$, donde $C=\{z \mid |z|=r>0\}$.

6.32. $\displaystyle\int_{C+} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, donde $C=\{z \mid |z|=R<1\}$.

6.33. $\displaystyle\int_{C+} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, donde $C=\{z \mid |z|=R>1\}$.

6.34. $\displaystyle\int_{C+} \frac{z+1}{e^z+1}\,dz$, donde $C=\{z \mid |z|=2\}$.

6.35. $\displaystyle\int_{C+} \frac{z+1}{e^z+1}\,dz$, donde $C=\{z \mid |z|=4\}$.

3. Aplicación de los residuos al cálculo de las integrales definidas.

a) Las integrales de tipo $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$, donde R es el símbolo de la función racional se reduce, sustituyendo $z=e^{ix}$, a las integrales de contorno de las funciones racionales respecto a z.

EJEMPLO 6. Calcúlese la integral de Poisson

$$I(p)=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-2p\cos x+p^2},\quad |p|\neq 1.$$

◀ Sustituyendo $z=e^{ix}$, $dz=ie^{ix}\,dx=iz\,dx$,

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},$$

obtenemos

$$I(p)=\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(1-p\frac{z^2+1}{z}+p^2\right)}=$$

$$=i\int_{|z|=1}\frac{dz}{-pz^2+p^2z+z-p}=i\int_{|z|=1}\frac{dz}{p(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)}.$$

Puesto que para todo p, $|p|\neq 1$, dentro del círculo $|z|<1$ se encuentra sólo una raíz del denominador de la función subintegral, para $|p|<1$ tenemos:

$$I(p)=\frac{2\pi i^2}{p}\operatorname{res}\left[\frac{1}{(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)};\ p\right]=\frac{2\pi}{1-p^2},$$

y si $|p|>1$, entonces

$$I(p)=\frac{2\pi i^2}{p}\operatorname{res}\left[\frac{1}{(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)};\ \frac{1}{p}\right]=\frac{2\pi}{p^2-1}.$$

De este modo,

$$I(p)=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{1-p^2} & \text{para}\quad |p|<1,\\[2mm] \dfrac{2\pi}{p^2-1} & \text{para}\quad |p|>1.\ ▶\end{cases}$$

b) Las integrales de tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, donde $f(x)$ es una función continua en $(-\infty, +\infty)$, analítica en el semiplano superior, excepto un número finito de puntos singulares $z_1, z_2, \ldots, z_N$, situados en la parte finita del semiplano superior, y que satisface, para $|z|$ suficientemente grandes la condición

$$|f(z)|\leqslant\frac{M}{|z|^{1+\delta}},\quad M>0,\quad \delta>0.$$

En este caso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}\,[f(z);\ z_k]. \qquad (1)$$

EJEMPLO 7. Calcúlese la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2}$.

◀ En el semiplano superior la función $f(z) = \frac{1}{(z^2+9)^2}$ tiene un polo de segundo orden en el punto $z_0 = 3i$ y $|f(z)| \leqslant \frac{M}{|z|^4}$ para z suficientemente grandes. Por eso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2} = 2\pi i \operatorname{res}\left[\frac{1}{(z^2+9)^2};\ 3i\right] =$$

$$= 2\pi i \frac{d}{dz}\left((z-3i)^2 \frac{1}{(z^2+9)^2}\right)\Big|_{z=3i} =$$

$$= 2\pi i \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+3i)^2}\right)\Big|_{z=3i} = -\frac{4\pi i}{(z+3i)^3}\Big|_{z=3i} =$$

$$= -\frac{4\pi i}{(6i)^3} = \frac{\pi}{54}.\ ▶$$

OBSERVACIÓN. La fórmula (1) es válida también en el caso, cuando la función $f(z)$ tiene la forma $f(z) = e^{i\alpha z} F(z)$, donde $\alpha > 0$ y la función $F(z)$ es analítica en el eje real; en el semiplano superior tiene sólo el número finito de los puntos singulares $z_1, z_2, \ldots, z_N$ y $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$.

EJEMPLO 8. Calcúlese la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2-2x+10}\,dx$.

◀ La función subintegral es la parte imaginaria de la función $\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}$, cuyos valores coinciden con los valores de la función $f(z) = \frac{z}{z^2-2z+10} e^{iz}$ en el eje real. La función $F(z) = \frac{z}{z^2-2z+10}$ tiene en el semiplano superior el polo de primer orden en el punto $z_0 = 1+3i$ y $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$, es decir, están cumplidas las condiciones enunciadas en la observación y por eso podemos escribir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\,dx = 2\pi i \operatorname{res}\left[\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10};\ 1+3i\right] =$$

$$=2\pi i\,\frac{(1+3i)\,e^{i(1+3i)}}{2(1+3i-1)}=\frac{\pi}{3}(1+3i)\,e^{-3+i}=$$

$$=\frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1-3\operatorname{sen} 1+i(3\cos 1+\operatorname{sen} 1)).$$

De este modo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\operatorname{sen} x}{x^2-2x+10}\,dx=\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\,dx=$$

$$=\frac{\pi e^{-3}}{3}(3\cos 1+\operatorname{sen} 1).$$

Señalemos que simultáneamente calculamos la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\,dx=$$

$$=\frac{\pi e^{-3}}{3}(\cos 1-3\operatorname{sen} 1).\ \blacktriangleright$$

Aplicando uno de los métodos estudiados más arriba calcúlense las integrales definidas.

6.36. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x},\ a>1.$

6.37. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)^2},\ a>b>0.$

6.38. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$

6.39. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n},\quad n\in\mathbb{N}.$

6.40. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},\ a>0,\ b>0.$

6.41. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2},\ a>0.$

6.42. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+4x+20}\, dx.$

6.43. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2+x+1}\, dx.$

6.44. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^2+b^2}\, dx,\ a>0,\ b>0.$

6.45. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}\, dx.$ **6.46.** $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4+5x^2+4}\, dx.$

4. Principio del argumento. Supongamos que la función $f(z)$ en la región D acotada por el contorno cerrado simple C, tiene un número finito N de ceros y un número finito P de polos, donde cada cero y cada polo se cuentan tantas veces, cuanta es su multiplicidad, con la particularidad de que no tienen ceros ni polos en el contorno C. Entonces la diferencia $\omega = N - P$ es igual al número de revoluciones del radio vector $w = f(z)$, cuando el punto z recorre el contorno C.

Si $f(z)$ es analítica en D, $P = 0$ y $\omega = N$.

EJEMPLO 9. Hállese el número de ceros del polinomio $p(z) = z^3 - 3z + 1$ situado en el semiplano derecho.

◀ Examinemos el contorno C que consta de la semicircunferencia C_R de radio R, situada en el semiplano derecho y del segmento del eje imaginario $[-iR, iR]$, y apliquemos a este contorno para R suficientemente grande, el principio del argumento.

Ya que

$$p(z) = z^3\left(1 - \frac{3}{z^3}\ \frac{1}{z^3}\right),$$

entonces es evidente, que cuando el punto z recorre el contorno C_R en sentido antihorario, arg z adquiere el incremento π y por eso arg (z^3) recibe el incremento 3π $\left(C_R \text{ se aplica en la curva } w = R^3 e^{i\varphi},\ -\frac{3\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{3\pi}{2}\right)$. Puesto que el segundo factor en (2) para R suficientemente grande es próximo a 1, entonces el incremento del argumento de este factor es también pequeño. Sea ahora $z = it$, es decir, el punto z se mueve por el eje imaginario desde el punto iR hasta el punto $-iR$. En este caso se tiene

$$p(it) = u + iv = 1 - i(t^3 + 3t), \quad \text{es decir,} \quad u = 1,$$
$$v = -t^3 - 3t.$$

Esto significa, que al variar t desde R hasta $-R$ para $R \to +\infty$, arg $p(it)$ varía en π $\left(\text{desde } -\frac{\pi}{2} \text{ hasta } +\frac{\pi}{2}\right)$. Así pues el incremento total arg $p(z)$ al recorrer el contorno es igual a 4π, lo que significa que $N = 2$, es decir, en el semiplano derecho el polinomio $p(z) = z^3 - 3z + 1$ tiene dos ceros. ▶

Para los polinomios dados hállese la cantidad de raíces situadas en el semiplano derecho:

6.47*. $p(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2$.
6.48. $p(z) = 2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1$.
6.49. $p(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3$.

6.50*. Demuéstrese que si las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ son analíticas en la región cerrada $\bar{D} = D + \Gamma$ y para los puntos $\eta \in \Gamma$ es válida la desigualdad $|\varphi(\eta)| < |f(\eta)|$, entonces el número de ceros de la función $F(z) = f(z) + \varphi(z)$, situados en la región D, coincide con el número de ceros de la función $f(z)$ (*teorema de Rouchè*).

6.51*. Demuéstrese el teorema fundamental del álgebra superior: el polinomio $p_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ del grado n tiene en el plano (z) exactamente n ceros.

Apoyándose sobre el teorema de Rouchè (problema 6.50), hállese el número de ceros de las funciones dadas en las regiones indicadas:

6.52. $F(z) = z^5 + 2z^2 + 8z + 1$: a) en el círculo $|z| < 1$; b) en el anillo $1 \leqslant |z| < 2$.

6.53. $F(z) = z^8 - 5z + 1$: a) en el círculo $|z| < 1$; b) en el anillo $1 \leqslant |z| < 2$; c) en el anillo $2 \leqslant |z| < 3$.

§ 7. Series de Fourier. Integral de Fourier

1. Desarrollo de las funciones en series trigonométricas de Fourier. Sistema trigonométrico de funciones.

1, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos 2x$, $\operatorname{sen} 2x$, ..., $\cos nx$, $\operatorname{sen} nx$, ... es *ortogonal* en el segmento $[-\pi, \pi]$ (como, además, en cualquier segmento de 2π de longitud), es decir, la integral respecto a este segmento, del producto de dos cualesquiera funciones distintas de este sistema, es igual a cero.

$$\text{Si } f(x) \in L(-\pi, \pi) \left(\text{es decir, } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx < \infty\right),$$

entonces existen los números

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx\, dx,$$

$$k = 0, 1, \ldots,$$

que se llaman *coeficientes de Fourier* de la función $f(x)$; la serie

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen} kx) \tag{1}$$

se denomina *serie de Fourier* de la función $f(x)$. Los términos de la serie (1) pueden ser anotados en forma de armónicas

$$a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen} kx=A_k\cos(kx-\varphi_k)$$

con una *amplitud* $A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$, *frecuencia* $\omega_k=k$ y *fase* $\varphi_k=$ $=\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k}$.

Para la función $f(x)$ tal, que $f^2(x)\in L(-\pi,\pi)$ es válida la *igualdad de Parseval*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

Si es que $f(x)\in L\left(-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right)$ el coeficiente de Fourier se escribe en la forma

$$\alpha_k=\frac{2}{l}\int_{-l/2}^{l/2}f(x)\cos\frac{2\pi kx}{l}\,dx,\quad \beta_k=\frac{2}{l}\int_{-l/2}^{l/2}f(x)\times$$
$$\times\operatorname{sen}\frac{2\pi kx}{l}\,dx, \tag{2}$$

y la serie de Fourier, en la forma

$$S(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\cos\frac{2\pi kx}{l}+\beta_k\operatorname{sen}\frac{2\pi kx}{l}\right)=$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i\frac{2\pi kx}{l}}. \tag{3}$$

La última serie se llama *serie de Fourier en forma compleja*. Aquí

$$c_k=\frac{1}{l}\int_{-l/2}^{l/2}f(x)e^{-i\frac{2\pi kx}{l}}\,dx,\quad k=0,1,\ldots,$$

y para $k\geqslant 0$

$$c_k=\frac{\alpha_k-i\beta_k}{2},\qquad c_{-k}=\frac{\alpha_k+i\beta_k}{2}=\bar{c}_k.$$

Las sumas de las series (1) y (3) tienen los períodos 2π y l, respectivamente.

La función $f(x)$ se llama *suave a trozos* en el segmento $[a, b]$, si la misma función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ tienen en $[a, b]$ un número finito de puntos de descontinuidad de primer género.

TEOREMA. *Si la función periódica $f(x)$ con período l es suave a trozos en el segmento $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$, entonces la serie de Fourier* (3) *converge hacia el valor de $f(x)$ en cada punto de continuidad suyo y hacia el valor $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$ en los puntos de descontinuidad, es decir,*

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kx}{l}}. \tag{4}$$

Si, adicionalmente, $f(x)$ es continua en todo el eje, la serie (4) *converge hacia $f(x)$ uniformemente.*

EJEMPLO 1. Desarróllese en serie de Fourier la función

$$f(x) = \operatorname{sign} x, \quad -\pi < x < \pi,$$

y empleando el desarrollo, hállese la suma de la serie de Leibniz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

◀ Puesto que la función es impar, entonces (véase el problema 7.2)

$$a_k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sign} x \operatorname{sen} nx\, dx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{x=0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}(1-\cos n\pi)=\begin{cases} \dfrac{4}{\pi(2m-1)} & \text{para } n=2m-1, \\ 0 & \text{para } n=2m, \end{cases} \quad m\in\mathbb{N}.$$

Por consiguiente, para $-\pi<x<\pi$

$$\operatorname{sign} x=\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2m-1)x}{2m-1}$$

de donde para $x=\pi/2$ obtendremos

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1},$$

es decir,

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}=\frac{\pi}{4}. \ ▶$$

7.1. Demuéstrese que si $f(x)$ tiene el período l, entonces para todo $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+l} f(x)\,dx = \int_0^l f(x)\,dx = \int_{-l/2}^{l/2} f(x)\,dx.$$

7.2. Anótense las expresiones de los coeficientes de Fourier (2) para las funciones par e impar en $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$.

Desarróllese la función periódica con el período l en serie de Fourier, constrúyanse las gráficas de sus primeras sumas parciales $S_0(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ y hállese el valor de $S(x_0)$ de la suma de la serie obtenida en el punto dado x_0:

7.3. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{para } -\pi < x < 0, \end{cases}$ $l = 2\pi$, $x_0 = \pi$.

7.4. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ para $0 < x < 2\pi$, $l = 2\pi$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

7.5. $f(x) = |x|$ para $x \in (-1, 1)$, $l = 2$, $x_0 = 1$.

En los problemas 7.6—7.10, definiendo complementariamente de un modo determinado la función $f(x)$ dada en el intervalo $(0, a)$ hasta la periódica, obténgase para ella la serie de Fourier requerida.

7.6. $f(x) = e^x$ para $x \in (0, \ln 2)$. Desarróllese en serie de cosenos.

7.7. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < x < \pi/2, \\ 0 & \text{para } \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$

Desarróllese en serie de senos.

7.8. $f(x) = x^2$ para $0 \leqslant x < 1$. Desarróllese en serie de cosenos.

7.9. $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leqslant x < 1, \\ 2 - x & \text{para } 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$

Desarróllese en serie de senos.

7.10. $f(x) = x \operatorname{sen} x$ para $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Desarróllese en serie de senos.

7.11. Empleando la serie de Fourier, obtenida en el problema 7.5, hállense las sumas de las series siguientes:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$; b)* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(4k+1)^2 (4k+3)^2}$.

7.12. Empleando la serie de Fourier, obtenida en el problema 7.8, hállese la suma de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2}$.

7.13. Empleando la igualdad de Parseval para la función del problema 7.4, hállese la suma de serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

7.14*. Conociendo la expresión del *núcleo de Dirichlet*

$$\mathscr{D}_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}},$$

hállese la expresión del *núcleo de Fejer* $\mathscr{F}_n(x)$:

$$\mathscr{F}_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathscr{D}_k(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kx.$$

2. Series dobles de Fourier. Si la función $f(x, y)$ tiene un período l respecto a la variable x, período h respecto a la variable y, es continua y tiene las derivadas parciales continuas $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en el cuadrado $K = \left\{(x, y) \mid -\frac{l}{2} \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}, -\frac{h}{2} \leqslant y \leqslant \frac{h}{2}\right\}$, entonces $f(x, y)$ es representable por la serie doble de Fourier

$$f(x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} \left(a_{m,n} \cos \frac{2\pi mx}{l} \cos \frac{2\pi ny}{h} + \right.$$

$$+ b_{m,n} \operatorname{sen} \frac{2\pi mx}{l} \cos \frac{2\pi ny}{h} + c_{m,n} \cos \frac{2\pi mx}{l} \operatorname{sen} \frac{2\pi ny}{h} +$$

$$\left. + d_{mn} \operatorname{sen} \frac{2\pi mx}{l} \operatorname{sen} \frac{2\pi ny}{h} \right),$$

donde

$$\lambda_{m,n} = \begin{cases} 1/4 & \text{para } m + n = 0, \\ 1/2 & \text{para } m > 0,\ y = 0 \text{ ó } m = 0,\ n > 0, \\ 1 & \text{para } m > 0,\ n > 0 \end{cases}$$

y para $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$

$$a_{m,n} = \frac{4}{lh} \iint_K f(x, y) \cos \frac{2\pi mx}{l} \cos \frac{2\pi ny}{h}\, dx\, dy,$$

$$b_{m,\,n}=\frac{4}{lh}\iint\limits_K f(x,\ y)\operatorname{sen}\frac{2\pi mx}{l}\cos\frac{2\pi ny}{h}\,dx\,dy,$$

$$c_{m,\,n}=\frac{4}{lh}\iint\limits_K f(x,\ y)\cos\frac{2\pi mx}{l}\operatorname{sen}\frac{2\pi ny}{h}\,dx\,dy,$$

$$d_{m,\,n}=\frac{4}{lh}\iint\limits_K f(x,\ y)\operatorname{sen}\frac{2\pi mx}{l}\operatorname{sen}\frac{2\pi ny}{h}\,dx\,dy$$

En la forma compleja la serie de Fourier para $f(x,\ y)$ se anota en la forma siguiente

$$f(x,\ y)=\sum_{m,\,n=-\infty}^{\infty} c_{m,\,n}e^{2\pi i\left(\frac{mx}{l}+\frac{ny}{h}\right)},$$

donde

$$c_{m,\,n}=\frac{1}{lh}\iint\limits_K f(x,\ y)\,e^{-2\pi i\left(\frac{mx}{l}+\frac{ny}{h}\right)}dx\,dy,\quad m,\ n\in\mathbb{Z}.$$

EJEMPLO 2. Desarróllese en serie doble de Fourier la función $f(x,\ y)=xy$ en el cuadrado $-\pi<x<\pi$, $-\pi<y<\pi$.

◀ Tomando en consideración la paridad o imparidad de las funciones subintegrales, hallamos

$$a_{m,\,n}=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_K xy\cos mx\cos ny\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}y\cos ny\,dy\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\cos mx\,dx=0,\quad m,\ n\geqslant 0;$$

$$b_{m,\,n}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}y\cos ny\,dy\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\operatorname{sen} mx\,dx=0,\quad m,\ n\geqslant 0;$$

$$c_{m,\,n}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}y\operatorname{sen} ny\,dy\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\cos mx\,dx=0,\quad m,\ n\geqslant 0;$$

$$d_{m,\,n}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}y\operatorname{sen} ny\,dy\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\operatorname{sen} mx\,dx=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{0}^{\pi}y\operatorname{sen} ny\,dy\int\limits_{0}^{\pi}x\operatorname{sen} mx\,dx=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{y}{n}\cos ny\Big|_0^\pi+\frac{\operatorname{sen} ny}{n^2}\Big|_0^\pi\right)\left(-x\,\frac{\cos mx}{m}\Big|_0^\pi+\right.$$
$$\left.+\frac{\operatorname{sen} mx}{m^2}\Big|_0^\pi\right)=\frac{4}{\pi^2}\,\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{\pi(-1)^{m+1}}{m}=(-1)^{m+n}\frac{4}{mn},$$
$$m,\ n\geqslant 1.$$

Por consiguiente, para $x\in(-\pi,\ \pi)$, $y\in(-\pi,\ \pi)$

$$xy=4\sum_{m,\,n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\,\frac{\operatorname{sen} mx\,\operatorname{sen} ny}{mn}. \ ►$$

Desarróllense en serie doble de Fourier las funciones siguientes:

7.15. $f(x,\ y)=xy$ para $0<x<2\pi$, $0<y<2\pi$, $l=h=2\pi$.

7.16. $f(x,\ y)=\frac{\pi-x}{2}\cdot\frac{\pi-y}{2}$ para $-\pi<x<\pi$, $-\pi<y<\pi$, $l=h=2\pi$.

7.17. $f(x,\ y)=x^2y$ para $-1<x<1$, $-2<y<2$, $l=2$, $h=4$.

7.18. $f(x,\ y)=x\left(\frac{\pi-y}{2}\right)^2$ para $-1<x<1$, $-\pi<y<\pi$, $l=2$, $h=2\pi$.

3. **Integral de Fourier.** Si la función $f(t)$ es absolutamente integrable en $(-\infty,\ +\infty)$, es decir, $f(t)\in L(-\infty,\ +\infty)$ y es suave a trozos en cada segmento finito del eje real, entonces es representable en forma de la integral de Fourier

$$f(t)=\frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))=\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}\hat f(\nu)\times$$
$$\times e^{2\pi i\nu t}\,d\nu=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat f(\nu)\,e^{2\pi i\nu t}\,d\nu, \tag{5}$$

donde

$$\hat f(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-2\pi i\nu t}\,dt. \tag{6}$$

La transformación (6), que se designará por $\mathfrak{F}[f]$, se llama *directa* y la (5), *transformación inversa de Fourier*, expresada en la forma compleja. En la forma real estas transformaciones se anotan así

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt,\quad b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{sen}\,\omega t\,dt \tag{7}$$

(directa) y

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}(a(\omega)\cos\omega t+b(\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega t)\,d\omega \tag{8}$$

(inversa), $\omega=2\pi\nu$.

Si la función $f(t)$ es par, (7) y (8) se escriben en la siguiente forma simétrica:

$$\mathfrak{F}_c[f]=\hat{f}_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt \tag{9}$$

y

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\hat{f}_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega \tag{10}$$

y se llaman par de *coseno-transformaciones de Fourier*. Si la función $f(t)$ es impar, tenemos un par de *seno-transformaciones de Fourier*

$$\mathfrak{F}_s[f]=\hat{f}_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{sen}\,\omega t\,dt$$

y

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\hat{f}_s(\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega t\,d\omega.$$

EJEMPLO 3. Hállese la transformación de Fourier para la función $f(t)=e^{-\alpha|t|}$, $\alpha>0$.

◀ Sustituyendo $f(t)$ dada en (6), obtenemos

$$\hat{f}(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}e^{-2\pi i\nu t}dt=\int_{-\infty}^{0} e^{-(2\pi i\nu-\alpha)t}\,dt+$$

$$+\int_{0}^{+\infty} e^{-(2\pi i\nu+\alpha)t}\,dt=\frac{1}{\alpha-2\pi i\nu}\,e^{(\alpha-2\pi i\nu)t}\Big|_{-\infty}^{0}-$$

$$-\frac{1}{\alpha+2\pi i\nu}\,e^{-(2\pi i\nu+\alpha)t}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{\alpha-2\pi i\nu}+\frac{1}{\alpha+2\pi i\nu}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2\nu^2},$$

es decir,

$$\mathfrak{F}\,[e^{-\alpha|t|}] = \frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2\nu^2}, \quad \alpha > 0.$$

Sustituyendo esta expresión en (5) obtenemos

$$e^{-\alpha|t|} = 2\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i\nu t}}{\alpha^2+4\pi^2\nu^2}\,d\nu = \frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\alpha^2+\omega^2}\times$$

$$\times\, d\omega = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega.$$

La última igualdad se deriva de que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega = \lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega = 0. \;\blacktriangleright$$

EJEMPLO 4. Hállese la transformación de Fourier para la función

$$f(t) = e^{-\alpha t^2}, \quad \alpha > 0.$$

◀ Ya que la función $f(t)$ es par, obtendremos un par de coseno-transformaciones de Fourier. Por lo tanto, valgámonos de las fórmulas (9) y (10). Utilizando el resultado del problema 4.28 del cap. 8, obtendremos

$$\mathfrak{F}_c\,[e^{-\alpha t^2}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\cos\omega t\,dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

y

$$e^{-\alpha t^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}\cos\omega t\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}\cos\omega t\,d\omega. \;\blacktriangleright$$

Hállense las transformaciones de Fourier en forma compleja para las funciones:

7.19. $f(t) = \operatorname{sing}(t-a) - \operatorname{sing}(t-b)$, $b > a$.

7.20. $f(t) = \begin{cases} h\left(1-\frac{|t|}{a}\right) & \text{para } |t| < a, \\ 0 & \text{para } |t| > a. \end{cases}$

7.21. $f(t)=\begin{cases}\cos at & \text{para } |t|<\pi/a,\\ 0 & \text{para } |t|>\pi/a,\end{cases}\quad a>0,$

7.22. $f(t)=\begin{cases}\operatorname{sign} t & \text{para } |t|<1,\\ 0 & \text{para } |t|<1.\end{cases}$

Hállese el par de coseno-transformación o seno-transformación de Fourier de las funciones indicadas:

7.23*. $f(t)=\dfrac{1}{a^2+t^2}$, $a>0$.

7.24*. $f(t)=\dfrac{t}{a^2+t^2}$, $a>0$.

7.25. $f(t)=te^{-t^2}$.

7.26. $f(t)=e^{-\alpha|t|}\cos\beta t$, $\alpha>0$.

7.27. Demuéstrese que la transformación (6) es una función continua, además $\lim\limits_{\nu\to\pm\infty}\widehat{f}(\nu)=0$.

4. Características espectrales de la serie y de la integral de Fourier. Se llama *función espectral* $S(\nu_k)$ de la serie de Fourier o *densidad espectral*, la relación entre el coeficiente de Fourier de la función $f(x)$ de período l

$$c_k=c(\nu_k)=\frac{1}{l}\int_{-l/2}^{l/2} f(u)\,e^{-2\pi i\nu_k u}\,du,$$

$\nu_k=\dfrac{k}{l}$, $k\in\mathbb{Z}$, y el incremento de la frecuencia $\Delta\nu_k=\dfrac{k+1}{l}-\dfrac{k}{l}=$ $=\dfrac{1}{l}$, es decir,

$$S(\nu_k)=\frac{c(\nu_k)}{\Delta\nu_k}=\int_{-l/2}^{l/2} f(u)\,e^{-2\pi i\nu_k u}\,du.$$

Llamamos *espectro de amplitud* $\rho(\nu_k)$ al módulo de la función espectral y *espectro de fase* $\Phi(\nu_k)$, al argumento de la función espectral tomado con el signo inverso, es decir,

$$\rho(\nu_k)=|S(\nu_k)|=l\,|c(\nu_k)|$$

y

$$\Phi(\nu_k)=-\arg S(\nu_k).$$

En las gráficas de $\rho(\nu_k)$ y $\Phi(\nu_k)$ por lo común se construyen sólo las ordenadas ρ y Φ en los puntos ν_k y el espectro se llama reglado.

EJEMPLO 5. Hállese la función espectral de la serie de Fourier y constrúyanse los espectros de amplitud y de fase para la función

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ para } x\in(-2,\ -1), \\ 1 \text{ para } x\in(-1,\ 1), \\ 0 \text{ para } x\in(1,\ 2), \end{cases} \qquad f(x+4)=f(x).$$

◀ Tenemos $\nu_k=k/4$ y

$$S(\nu_k)=\int_{-2}^{2} f(x)\, e^{-2\pi i\nu_k x}\, dx=\int_{-1}^{1} 1\cdot e^{-2\pi i\nu_k x}\, dx=$$

$$=\frac{e^{-2\pi i\nu_k x}}{-2\pi i\nu_k}\bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{\pi\nu_k}\,\frac{e^{2\pi i\nu_k}-e^{-2\pi i\nu_k}}{2i}=\frac{\operatorname{sen} 2\pi\nu_k}{\pi\nu_k}.$$

Por consiguiente,

$$\rho(\nu_k)=|S(\nu_k)|=\frac{|\operatorname{sen} 2\pi\nu_k|}{\pi|\nu_k|},$$

$$\Phi(\nu_k)=-\arg S(\nu_k)=\begin{cases} 0, \text{ si } \operatorname{sen} 2\pi\nu_k\geqslant 0, \\ -\pi, \text{ si } \operatorname{sen} 2\pi\nu_k<0. \end{cases}$$

Las gráficas $\rho(\nu_k)$ y $\Phi(\nu_k)$ están representadas en la fig. 102. ▶

Llamamos *función espectral* de la integral de Fourier la transformación directa de Fourier

$$S(\nu)=\hat{f}(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi i\nu t}\, dt. \tag{11}$$

La magnitud $\rho(\nu)=|S(\nu)|$ lleva el nombre de *espéctro de amplitud* y la magnitud $\Phi(\nu)=-\arg S(\nu)$, *espectro de fase*.

Hállense las funciones espectrales $S(\nu_k)$ ó $S(\nu)$ y constrúyanse los espectros de amplitud y de fase de las funciones siguientes:

7.28. $f(t)=\begin{cases} 0 \text{ para } t\in(-2T,\ -T), \\ -1 \text{ para } t\in(-T,\ 0), \\ 1 \text{ para } t\in(0,\ T), \\ 0 \text{ para } t\in(T,\ 2T), \end{cases} \qquad f(t+4T)=f(t).$

7.29. $f(t)=\begin{cases} 2 \text{ para } t\in(0,\ 1), \\ 0 \text{ para } t\in(1,\ 3), \end{cases} \qquad f(t+3)=f(t).$

7.30. $f(t)=\begin{cases} 1 \text{ para } |t|<a, \\ 0 \text{ para } |t|>a, \end{cases} \qquad a>0.$

7.31*. $f(t)=\begin{cases} \cos \pi t & \text{para } |t| \leqslant 1/2, \\ 0 & \text{para } |t| > 1/2. \end{cases}$

7.32. $f(t)=\begin{cases} 1+t & \text{para } t \in (-1, 0), \\ 1-t & \text{para } t \in (0, 1), \\ 0 & \text{para } |t| > 1. \end{cases}$

7.33. $f(t)=\begin{cases} 2 & \text{para } t \in (0, 2), \\ 0 & \text{para } t \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty). \end{cases}$

5. Transformación discreta de Fourier (TDF). El cálculo analítico de la transformación de Fourier (de la función espectral) (11) y de la transformación inversa (5) provoca como regla, grandes dificultades. Están elaborados los métodos de su realización numérica. Uno de estos métodos es la así llamada *transformación discreta de Fourier*:

$$\widetilde{S}(\nu_n)=y_n=\frac{T}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1} \times$$

$$\times f(t_k)\, e^{-i\frac{\pi k n}{N}}, \quad n=0,\ 1,\ \ldots,\ 2N-1, \tag{12}$$

donde $t_k=k\dfrac{T}{2N}$ (T es longitud del intervalo prefijado) y $\nu_n=n\dfrac{1}{T}$. La transformación inversa a (12) tiene la forma

$$f(t_k)=x_k=\frac{1}{T}\sum_{n=0}^{2N-1} y_n e^{i\frac{\pi k n}{N}},$$

$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2N-1. \tag{13}$$

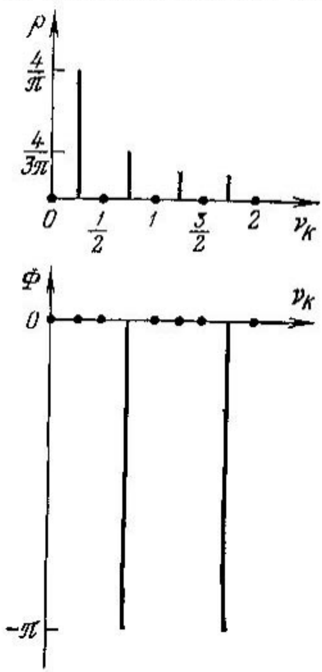


Fig. 102

Las transformaciones (12) y (13) se realizan con ayuda de los así llamados *algoritmos rápidos* (TAR), que consisten en que, si $2N = r_1 r_2 \ldots r_n$, r_ν son enteros $\geqslant 2$, entonces la matriz de la transformación (12) (ó (13))

$$W=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & q & q^2 & \dots & q^{2N-1} \\ 1 & q^2 & q^4 & \dots & q^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & q^{2N-1} & q^{2(2N-1)} & \dots & q^{(2N-1)^2} \end{pmatrix},$$

donde $q=e^{-i\frac{\pi}{N}}$ ($q=e^{i\frac{\pi}{N}}$ para (13)), se representa en forma del producto de n matrices cuadradas W_ν de orden $2N$,

$$W=W_nW_{n-1}\dots W_2W_1, \tag{14}$$

cada una de las cuales tiene $r_\nu\cdot 2N$ elementos distintos de cero. La multiplicación de la matriz W_ν ($\nu=1, 2, \dots, n$) por el vector columna $Z=(z_0, z_1, \dots, z_{2N-1})^\top$ eliminando la multiplicación por ceros, puede ser realizada mediante $r_\nu\cdot 2N$ operaciones de la multiplicación compleja por los factores q^k y mediante la sumación. Toda la transformación discreta de Fourier se calcula, entonces, por $(r_1+ + r_2+\dots+r_n)\,2N$ operaciones de este tipo y por la multiplicación del resultado final por el factor $T/2N$.

Si $2N=2^n$ ($r_1=r_2=\dots=r_n=2$), en calidad de matriz $W_m=(c_{k,j}^{(m)})$, $k, j=1, 2, \dots, 2^n$, se puede tomar para el desarrollo (14) la matriz, cuyos elementos se expresan del modo siguiente ($q= =e^{-i\frac{\pi}{2^{n-1}}}$): sea $\nu=0, 1, \dots, 2^{n-m}-1$ y $\mu=1, 2, \dots, 2^{m-1}$, entonces

$$c^{(m)}_{\nu\cdot 2^m+\mu,\ \nu\cdot 2^{m-1}+\mu}=c^{(m)}_{\nu\cdot 2^m+2^{m-1}+\mu,\ \nu\cdot 2^{m-1}+\mu}=1,$$

$$c^{(m)}_{\nu\cdot 2^m+\mu,\ 2^{n-1}+\nu\cdot 2^{m-1}+\mu}=$$

$$=-c^{(m)}_{\nu\cdot 2^m+2^{m-1}+\mu,\ 2^{n-1}+\nu\cdot 2^{m-1}+\mu}=q^{(\mu-1)2^{n-m}}, \tag{15}$$

$c^{(m)}_{k,j}=0$ para los pares restantes (k, j).

7.34. Escríbanse las matrices W_1, W_2 y W_3 correspondientes a las fórmulas (15) para $2N=2^3=8$.

7.35. Sea $X=(x_0, x_1, \dots, x_7)^\top$. Fórmense los productos $Z^{(1)}=W_1X$, $Z^{(2)}=W_2Z^{(1)}=W_2(W_1X)$ y $Z^{(3)}= =W_3Z^{(2)}=W_3(W_2W_1X)$. Compárese el resultado obtenido con el producto WX.

Para la sucesión finita de los números complejos $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$, TDF según la fórmula (12) se puede representar en la forma

$$y_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x_ke^{-\frac{2\pi ink}{N}}\quad (n=0, 1, \dots, N-1)$$

y TDF inversa (TDFI) en la forma

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{\frac{2\pi ink}{N}} \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1).$$

Designemos brevemente TDF y TDFI, respectivamente,

$$Y = \mathfrak{F}[X] \quad \text{y} \quad X = \mathfrak{F}^{-1}[Y],$$

donde $X = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})^{\mathsf{T}}$, $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})^{\mathsf{T}}$.

7.36. Fórmese en Fortran el subprograma para calcular las transformaciones de Fourier directa e inversa valiéndose el algoritmo rápido. Los parámetros son: N, N1, KIND, A, B, AA, BB, donde N1 es el número de elementos de la sucesión inicial (y de la transformación), N es el exponente de la potencia en la igualdad $N1 = 2^N$, KIND es el cero ó el 1 (cero cuando se calcula TDF y 1 cuando se calcula TDFI), A y B son tablas de entrada de dimensión N1 para las partes real e imaginaria de la sucesión inicial, AA y BB son tablas de salida de dimensión N1 para las partes real e imaginaria de la transformación obtenida.

En los problemas 7.37—7.41 fórmese en Fortran el subprograma para obtener la sucesión compleja $(x_1, x_2, \ldots, x_{128})$, poniendo $x_k = x(t_k) + i \cdot 0$ para las funciones indicadas $x = x(t)$, $t \in [1, 128]$, $t_k = k = 1, 2, \ldots, 128$. Los parámetros son A, B, donde A y B son tablas de 128 elementos para las partes real e imaginaria de la sucesión.

7.37. $x = 25$. **7.38.** $x = \begin{cases} 0, & t \in [1, 32] \cup [97, 128], \\ 20, & t \in [33, 96]. \end{cases}$

7.39. $x = \frac{1}{32} t (128 - t)$.

7.40. $x = \begin{cases} t, & t \in [1, 64], \\ 128 - t, & t \in [65, 128]. \end{cases}$

7.41. $x = t$.

7.42. Empleando los subprogramas obtenidos en la resolución de los problemas 7.36 y 7.37—7.41 para una de las sucesiones $(x_1, x_2, \ldots, x_{128})$, fórmese en Fortran el programa de las transformaciones siguientes:

a) hállese $Y = \mathfrak{F}[X]$;

b) para $m = 24, 32, 40$ de la sucesión $(y_n \mid n = 1, \ldots, 128)$ obténgase la sucesión $(\tilde{y}_n \mid n = 1, \ldots, 128)$, cuyos elementos se determinan por las igualdades

$$\tilde{y}_n = \begin{cases} y_n, & n = 1, 2, \ldots, 64 - m, 65 + m, \ldots, 128, \\ 0, & n = 64 - m + 1, \ldots, 65 + m - 1; \end{cases}$$

c) hállese $\tilde{X} = \mathfrak{F}^{-1}[\tilde{Y}]$;

d) compárense las sucesiones (x_k) y $(\tilde{x}_k)$ hallando sus diferencias.

RESPUESTAS

1.1. $\frac{1}{4}$. 1.2. $\frac{1}{2}$. 1.3. $\frac{3}{2}\frac{6e-e^2-1}{(3e-1)(3-e)}$. ● Empléese la fórmula de Euler $\cos in = \frac{e^{-n}+e^n}{2}$. **1.4.** $1+i$. **1.17.** Diverge. **1.18.** Converge. **1.19.** Converge. **1.20.** Converge. **1.21.** Diverge. **1.22.** Diverge. **1.23.** Converge. **1.24.** Diverge. **1.25.** Converge. **1.26.** Converge. **1.27.** Converge absolutamente. **1.28.** Converge. **1.29.** Diverge. **1.30.** Converge. **1.31.** Converge absolutamente. **1.32.** Converge. **1.33.** Diverge. **1.34.** Diverge. **1.35.** Converge. **1.36.** Converge. **1.37.** Converge. **1.38.** Diverge. **1.39.** Converge. **1.40.** Converge. **1.41.** Converge. **1.42.** Converge. **1.43.** Converge. **1.44.** Converge. **1.45.** Converge. **1.46.** Converge. **1.47.** Converge. **1.48.** Diverge. **1.49.** Diverge. **1.50.** Diverge. ● $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. **1.51.** Converge. **1.52.** Converge. **1.53.** Diverge. **1.54.** Converge. **1.55.** Diverge. **1.56.** Diverge. **1.57.** Converge. **1.58.** Converge. **1.59.** Converge. **1.60.** Diverge. **1.61.** Diverge. **1.62.** Converge absolutamente. **1.63.** Diverge. **1.64.** Converge absolutamente. **1.65.** Si $p > 1$, la serie converge para todo α; si $p < 1$, diverge. Si $p = 1$, la serie converge para $\alpha > 1$ y diverge para $\alpha \leqslant 1$. **1.66.** Si $p > 1$, la serie converge para cualesquiera α y β; si $p < 1$, diverge. Si $p = 1$; la serie converge para $\alpha > 1$ y cualesquiera β y diverge para $\alpha < 1$. Si es que $p = \alpha = 1$, la serie converge para $\beta > 1$ y diverge para $\beta \leqslant 1$. **1.68.** Converge condicionalmente. **1.69.** Converge absolutamente. **1.70.** Diverge. **1.71.** Converge absolutamente. **1.72.** Diverge. **1.73.** Converge condicionalmente. **1.74.** Converge absolutamente. **1.75.** Converge absolutamente. **1.76.** Converge condicionalmente. **1.77.** Converge absolutamente. **1.78.** Converge condicionalmente. ● Analícense las sumas parciales con los números $8n$, en las que hay que agrupar los términos con los números $8k+1$ y $8k+5$, $8k+2$ y $8k+6$, $8k+3$ y $8k+7$. Cerciórese de que existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} S_{8n}$. Luego, así como al demostrar el criterio de Leibniz, válganse de la correlación $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{4} = 0$. **1.79.** Converge condicionalmente. **1.80.** Diverge. ● Analícense las sumas parciales con números pares. **1.81.** Converge condicionalmente. **1.82.** Converge absolutamente. **1.83.** Diverge.

1.84. ● Válganse de la desigualdad $|a \cdot b| \leqslant \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$.

1.85. Converge. ◀ Estimemos c_n. Tenemos $c_n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{2^{n-k+1}} +$

$$+ \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \frac{1}{k^2 \cdot 2^{n-k+1}} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \left(2^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^2} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} 2^k \right) \leqslant$$

$\leqslant \frac{A_1}{2^{\frac{n}{2}}} + \frac{A_2}{n^2}$. Los sumandos obtenidos son términos de las series convergentes $A_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}}$ y $A_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. ▶ 1.86. Converge. ● Para estimar $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k+1}}{k^2(n-k+1)}$ aplíquese el desarrollo de la fracción en simples $\frac{1}{k^2(n-k+1)} = \frac{1}{(n+1)k^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k}\right)$ y muéstrese que los números $b_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ decrecen monótonamente respecto a la magnitud absoluta. 1.87. Diverge. ● Aprovéchese el desarrollo de la fracción en simples, obtenido en el problema anterior, y estímense los términos $d_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ por abajo. 1.88. Diverge. ● $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k(n-k+1)} > \frac{1}{n}$ para $n \geqslant 2$.

2.1. $(0, +\infty)$; converge absolutamente para $x \in (1, +\infty)$. 2.2. $\mathbb{R}$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.3. Diverge en todos los puntos. 2.4. $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.5. $(-\infty, -1)$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.6. $(-1, -1/2] \cup (1/2, 1)$; converge absolutamente para $x \in (-1, -1/2) \cup (1/2, 1)$. 2.7. $[0, +\infty) \cup \{k\pi \mid k = -1, -2, \ldots\}$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.8. $(-2, 2)$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.9. $(0, +\infty)$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.10. $[1/e, e)$; converge absolutamente para $x \in (1/e,\ e)$. **2.11.** $|z-2|>1$. **2.12.** $|z+1|>1$. **2.13.** $|z-3i|>\sqrt{2}$. **2.14.** El semiplano $\operatorname{Re} z>0$. **2.15.** $\{z \mid -\pi/4<\arg z<\pi/4$ y $3\pi/4<\arg z<5\pi/4\}$. **2.16.** $\operatorname{Re} z<0$. **2.17.** $\operatorname{Re} z>1$. ● Compárese la expresión $|(-1)^n n^{-z}|$ con el término n^{-p} de la serie de Dirichlet. **2.18.** $\operatorname{Im} z>0$. ● Aprovéchese el hecho de que la función lineal fraccional $w=e^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ aplica el semiplano superior en el interior del círculo unitario. **2.19.** $|z|>1$. ● Para $|a|>1$ la función $w=e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ aplica el exterior del círculo unitario ($|z|>1$) en el interior ($|w|<1$). **2.20.** $|z/(1-z)|<1$, es decir, $\operatorname{Re} z<1/2$. ● Véase el problema 3.53. del cap. 11. **2.21.** Converge para $x \in (0,+\infty)$, converge uniformemente si $x\in[\alpha,+\infty)$ para cualquier $\alpha>0$. **2.22.** Converge para $x\in(-\infty,-3)\cup[-1,+\infty)$, converge uniformemente si $x\in(-\infty,-3-\delta]\cup[-1,+\infty)$ para todo $\delta>0$. **2.23.** Converge uniformemente en todo el eje. **2.24.** Converge en todo el eje, excepto en los puntos $x=-1,-2,\ldots$ Converge uniformemente en el conjunto obtenido del eje, después de la eliminación de los intervalos $(-\delta_k-k,\ -k+\delta_k')$, $k=1,2,\ldots$, donde δ_k y δ_k' son tan pequeños como se quiera. **2.25.** $\operatorname{Re} z\leqslant 0$; la convergencia uniforme en todos los puntos. **2.26.** $|z-1|\leqslant 1$; la convergencia es uniforme en todos los puntos. **2.27.** Converge para $\operatorname{Re} z>1$, converge uniformemente para $\operatorname{Re} z\geqslant\alpha>1$. **2.28.** Converge fuera del círculo $|z+2|>1$, converge uniformemente fuera de cualquier círculo $|z+2|\geqslant\alpha>1$.

2.29. ● Calcúlese $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^k}$ y muéstrese que $\lim\limits_{x\to 0} R_n(x)=1\neq R_n(0)=0$. **2.32.** La serie converge en la región que consta del interior del círculo unitario $|z|<1$, del punto $z=1$ y del exterior del círculo unitario $|z|>1$; la serie converge uniformemente en la unión del círculo cerrado $|z|\leqslant 1-\gamma$ y del exterior cerrado del círculo $|z|\geqslant 1+\delta$ para cualesquiera $\gamma,\delta>0$. La suma de la serie

$$S(z)=\begin{cases} 1/2 \text{ para } |z|>1,\\ -1/2 \text{ para } |z|<1,\\ 0 \text{ para } z=1.\end{cases}$$

2.36. ● Empléese la afirmación del problema 2.35.

3.1. Si la serie potencial (1) converge en el punto $z=z_1\neq z_0$, entonces converge absolutamente en el círculo $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ y converge uniformemente en todo círculo cerrado $|z-z_0|\leqslant r<|z_1-z_0|$. Si la serie (1) diverge en el punto $z=z_2$, diverge también fuera del círculo $|z-z_0|>|z_2-z_0|$. **3.2.** ● Para demostrar las afirmaciones a) y b) aplíquense el teorema de Abel y el teorema de Weierstrass, y para demostrar la afirmación c), el teorema de Abel, con la afirmación del problema 2.35, tomando en consideración que

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n+1}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$. **3.3.** ● Aprovéchese la afirmación b) del problema 3.2. **3.4.** Converge absoluta y uniformemente en la región $|z-1| \leqslant 2$. **3.5.** Converge absoluta y uniformemente en la región $|z+1| \leqslant 2$. **3.6.** Converge absolutamente si $|z+2| < 1$; converge uniformemente si $|z+2| \leqslant r < 1$. En los puntos $x=-3$ y $x=-1$ converge condicionalmente. En el segmento $-3 \leqslant x \leqslant -1$ converge uniformemente. **3.7.** Converge absolutamente en la región $|z-4| < 1/2$; converge uniformemente en la región $|z-4| \leqslant \leqslant r < 1/2$. En el punto $x = 9/2$ converge condicionalmente, en el punto $7/2$ diverge. En cualquier segmento $7/2 < r \leqslant x \leqslant 9/2$ converge uniformemente. **3.8.** Converge absolutamente en la región $|z-2| \leqslant 1/\sqrt{2}$; converge uniformemente en la región $|z-2| \leqslant \leqslant r < 1/\sqrt{2}$. En los puntos $2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ diverge. **3.9.** Converge absolutamente en la región $|z-3| < \sqrt{3}$; converge uniformemente en la región $|z-3| \leqslant r < \sqrt{3}$. En los puntos $x = 3 \pm \sqrt{3}$ converge condicionalmente y en el segmento $3-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant 3+\sqrt{3}$, uniformemente. **3.10.** Converge absolutamente en la región $|z| < 1$. Converge uniformemente en la regiòn $|z| \leqslant r < 1$; diverge en la circunferencia $|z| = 1$. **3.11.** Converge absolutamente en la región $|z| < 1$; converge uniformemente en la región $|z| \leqslant \sqrt{r} < 1$ diverge en la circunferencia $|z| = 1$. **3.12.** Converge absolutamente en todo el plano y uniformemente en cualquier región limitada. **3.13.** Converge absolutamente en la región $|z-1| < 8$; converge uniformemente en la región $|z-1| \leqslant r < 8$; en los puntos $x = -7$ y $x = 9$ diverge. **3.14.** Diverge en todos los puntos, excepto el punto $z_0 = i$. **3.15.** Converge absolutamente en la región $|z-3| < \sqrt{3}$; converge uniformemente en la región $|z-3| \leqslant r < \sqrt{3}$ En los puntos $x = 3 \pm \sqrt{3}$ diverge. Converge uniformemente en cualquier segmento $3-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant r < 3+\sqrt{3}$. **3.16.** Converge absolutamente en todo el plano y uniformemente en cualquier región limitada. **3.17.** Converge absolutamente en la región $|z-1| < 1$; converge uniformemente en la región $|z-1| \leqslant r < 1$; en la circunferencia $|z-1| = 1$ diverge. **3.18.** Converge absolutamente en la región $|z-3| < 4$; converge uniformemente en la región $|z-3| \leqslant r < 4$; en el punto $x = 7$ converge condicionalmente, en el punto $x = -1$ diverge. En cualquier segmento $-1 < l \leqslant x \leqslant 7$ converge uniformemente. **3.19.** Converge absolutamente en todo en plano, converge uniformemente en toda región limitada. **3.20.** Converge absolutamente en la región $|z| < 2$; converge uniformemente en la región $|z| \leqslant r < 2$. En el punto $x = -2$ diverge, en el pnto $x = 2$ converge condicionalmente. En todo segmento $-2 < l \leqslant x \leqslant 2$ converge uniformemente. **3.21.** Converge absoluta y uniformemente en la región $|z| \leqslant 2$. **3.22.** Converge absolutamente en la región $|z-1| < 9/4$; converge uniformemente en la región $|z-1| \leqslant r < 9/4$; en los puntos $x = -5/4$ y $x = 13/4$ diverge. **3.23.** Converge absolutamente en la región $|z| < 1/e$; converge uniformemente en la región $|z| \leqslant r < 1/e$; en los puntos $x = \pm 1/e$ diverge. **3.24.** Converge absoluta y uniforme mente en la región $|z-3| \leqslant 1/\sqrt{2}$. 3.25. Converge absoluta y uniformemente en la región $|z+3| \leqslant 1$. 3.26. Converge absoluta y uniformemente en la región $|z-3| \leqslant \sqrt{2}$. 3.27. Converge absolutamente en la región $|z+3|<1$; converge uniformemente en la región $|z+3| \leqslant r<1$; en los puntos $z=-2$ y $z=-4$ diverge. 3.28. Converge absolutamente en la región $|z|<1$; converge uniformemente en la región $|z| \leqslant r<1$; diverge en la circunferencia $|z|=1$. 3.29. Converge sólo en el punto $z=5$. 3.30. Converge absoluta y uniformemente en la región $|z| \leqslant 1$. 3.31. Converge absolutamente en la región $|z|<1/2$; converge uniformemente en la región $|z| \leqslant r<1/2$; diverge en la circunferencia $|z|=1/2$. 3.32. Converge absoluta y uniformemente en la región $|z-2| \leqslant 1$.

3.37. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z \ln 2)^n$, $|z|<\infty$. 3.38. $\frac{\sqrt{2}}{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+1} \frac{z^n}{n!}$, $|z|<\infty$. 3.39. $1+\frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$. 3.40. $z+\frac{2}{3!} z^3+\frac{16}{5!} z^5+\ldots$ $|z|<\frac{\pi}{2}$. ● El radio de convergencia de esta serie se determina aplicando el corolario del teorema de Taylor. 3.41. $1+\frac{z^2}{2!}+\frac{5}{4!} z^4+\ldots$, $|z|<\frac{\pi}{2}$. 3.42. $z-\frac{2}{3!} z^3+\frac{16}{5!} z^5+\ldots$, $|z|<\frac{\pi}{2}$. 3.43. $1+z-\frac{2}{3!} z^3-\frac{4}{4!} z^4+\ldots$, $|z|<\infty$. 3.44. $1-z^2+\frac{z^4}{2!}-\ldots+(-1)^n \frac{z^{2n}}{n!}+\ldots$, $|z|<\infty$. 3.45. $\frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$. 3.46. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{4^{n+1}}$, $|z|<2$. 3.47. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n z^{n+1}}{3^{n+1}}$, $|z|<\frac{3}{4}$. 3.48. $3-\frac{z}{27}-\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots(3n-4)}{n!\, 3^{4n-1}} z^n$, $|z|<27$.

3.49. $\frac{1}{3}\left(1-\frac{z^2}{18}+\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 18^2} z^4+\ldots+(-1)^n \frac{1 \cdot 3 \ldots(2n-1)}{n!\, 18^n} z^{2n}+\ldots\right)$, $|z|<3$. 3.50. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{7n+1}{2^{n+2}} z^n$, $|z|<2$. ● $\frac{3z+1}{(z-2)^2}=-(3z+1) \times \left(\frac{1}{z-2}\right)'$. 3.51. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n 2^{n+1}\right) z^n$, $|z|<\frac{1}{2}$.

3.52. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n-1}(n+2)}{n!}z^n$, $|z|<\infty$. **3.53.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$.

3.54. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $|z|<\infty$. **3.55.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times$
$\times\frac{2^{4n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1}$, $|z|<\infty$. **3.56.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n-1}{n}z^n$, $|z|<\frac{1}{2}$;
cuando $x=\frac{1}{2}$ converge condicionalmente. **3.57.** $\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\times$
$\times(1+2^{-n})\frac{z^n}{n}$, $|z|<1$; para $x=1$ converge condicionalmente.

3.58. $z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z|<1$; si $x=\pm 1$ converge absolutamente. **3.59.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z|<1$; para $x=\pm 1$ converge condicionalmente. **3.60.** $z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z|<1$,
cuando $x=\pm 1$ converge absolutamente. **3.61.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2^n n!\,(2n+1)}$,
$|z|<\infty$. **3.62.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{4n+2}}{2\,(2n+1)!\,(2n+1)}$, $|z|<\infty$.

3.63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n\cdot z^{2n-1}}{(2n+1)!}$, $|z|<\infty$. ● $\frac{z\cos z-\operatorname{sen} z}{z^2}=\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right)'$.

3.64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)\,z^{2n-2}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$. ● $\frac{z\operatorname{sen} z-1+\cos z}{z^2}=$
$=\left(\frac{1-\cos z}{z}\right)'$. **3.65.** $-78+59(z+4)-14(z+4)^2+(z+4)^3$.

3.66. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n$, $|z-2|<1$. **3.67.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3i)^n}{(1-3i)^{n+1}}$,

$|z-3i|<|1-3i|=\sqrt{10}$. **3.68.** $-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(z-3)^{2k}}{4^{k+1}}$, $|z-3|<2$.

3.69. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^{-n-1}-3^{-n-1})(z+4)^n$, $|z+4|<2$. **3.70.** $1+\frac{1}{3}(z-1)+$

$+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\cdot5\,\ldots\,(3n-4)}{3^n n!}(z-1)^n$, $|z-1|<1$.

3.71. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(z-2)^{n-1}}{2^{n+1}}$, $|z-2|<2$. ● $\frac{1}{z^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}\right)'$.

3.72. $e^{-3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^{2n}}{n!}$, $|z|<\infty$. **3.73.** $e\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}((z-1)^{2n}+$

$+(z-1)^{2n+1})$ $|z|<\infty$. **3.74.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{\operatorname{sen}4}{(2n)!}(z+2)^{4n}+\right.$

$\left.+\frac{\cos 4}{(2n+1)!}(z+2)^{4n+2}\right)$, $|z|<\infty$. **3.75.** $3\ln2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\times$

$\times\frac{5^n(z-1)^n}{n\cdot8^n}$, $|z-1|<\frac{8}{5}$. ● $\ln(5z+3)=\ln8+\ln\left(1+\frac{5}{8}(z-1)\right)$.

3.76. $\ln4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z+3)^{2n}}{n\cdot4^n}$, $|z+3|<2$. **3.77.** $|z|<1$; $\frac{2}{(1+z)^3}$. **3.78.** $|z+1|<1$; $\frac{z+1}{z^2}$. **3.79.** $|z-3|<1$; $-\frac{\ln(4-z)}{z-3}$ para $z\neq3$, 0 para $z=3$. **3.80.** $|z|<|a|$; $\frac{1}{a^2+z^2}$. **3.81.** $|z|<1$; $\frac{1}{(1+z^2)^2}$. **3.83.** ● Representando $f(z)$ en la forma de serie, según las potencias $(z-a)$, es decir, en forma de $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$, de la continuidad de $f(z)$ en el punto $z=a$, convénzase de que $c_0=0$. Esto significa que $f(z)=(z-a)\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(z-a)^{n-1}=(z-a)f_1(z)$ donde $f_1(z)$ es una función analítica en el círculo $|z-a|<R$ y $f_1(z_k)=0$, $k=1, 2, \ldots$ De aquí conclúyanse que $c_1=0$, etc. **3.84.** No. **3.85.** a) $f(z)=z/(z+2)$; b) $f(z)=z^2$. **3.86.** $g(z)=f(z)=1/(2-z)$ en la

parte común de los círculos $|z|<2$ y $|z-i|<\sqrt{5}$. **3.87.** $g(z)=f(z)=\ln(1+z)$ en la parte común de los círculos $|z|<1$ y $|z-1-2i|<2\sqrt{2}$.

4.1. 10 000 para $x=1$ ó 10 para $x=-0,5$. **4.2.** Dos términos, el error absoluto límite $\varepsilon<\frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4=0,0000386<0,0001$. **4.3.** 0,0002. **4.4.** $|x|<0,9067$. **4.5.** 0,002. **4.6.** 1,6487. **4.7.** 0,3679. **4.8.** 0,5878. **4.9.** 0,2094. **4.10.** 0,5403. **4.11.** 0,8269. ● Teniendo en cuenta que $1000=318\times 3,1415926+1,5707963-0,5971963$, reducimos el argumento a la magnitud $0,5971963\in[0,\ \pi/4]$ y hallamos que $\operatorname{sen} 1000=\operatorname{sen}(1,15707963-0,5971963)=\cos 0,5971963$. **4.12.** 8,0411.

● $\sqrt[3]{520}=(512+8)^{1/3}=8\left(1+\frac{1}{64}\right)^{1/3}$. **4.13.** 3,8730. ● $\sqrt{15}=\sqrt{16-1}=4\left(1-\frac{1}{16}\right)^{1/2}$. **4.14.** 5,1437. ● $\sqrt[4]{700}=(625+75)^{1/4}=5\left(1+\frac{3}{25}\right)^{1/4}$. **4.15.** 0,6931. Utilícese el desarrollo $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ para $x=\frac{1}{3}$. **4.16.** 0,5236. **4.17.** 0,9385.

4.18. 1,1752. **4.19.** 1,1276.

4.20.
```
      FUNCTION S(Y,EPS)
      PI = 3.141593
      PI2 = 1.570796
      X = Y
      FACT = 1.
      SX = 1.
      IF(X.LT.0) SX = -1.
      X = ABS(X)
      IF(X.LE.PI) GO TO 1
      X1 = X/PI
      N = X1
      N1 = N/2
      M = N - N1*2
      IF (M.NE.0) FACT = -1.
      X11 = N
      X = X - X11*PI
    1 IF (X.GT.PI2) X = PI - X
      S = 0
```

```
      SM = X
      T = -1.
    2 T = T + 1.
      A = 2*T
      A = (A + 2.)*(A + 3.)
      S = S + SM
      S = S*(-1.)*(X*X)/A
      IF(ABS(SM).GT.EPS) GO TO 2
      S = (S + SM)*SX*FACT
      RETURN
      END
```

● Ya que sen x = sign $(x)\cdot$sen $|x|$, se puede considerar que $x \geqslant 0$. Sea $x = \pi n + x_1$, donde $n = \left[\frac{x}{\pi}\right]$ y $x_1 \in [0, \pi)$, entonces sen $x =$ sen $(\pi n + x_1) = \cos \pi n$ sen $x_1 = (-1)^n$ sen x_1. En este caso, si $x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, suponemos que sen $x = (-1)^n$ sen $(\pi - x_1) = (-1)^n \times$ $\times$ sen x_2, donde $x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4.21.
```
      FUNCTION C(X,EPS)
      PI2 = 6.283185
      Y = X
      IF(ABS(X).LE.PI2) GO TO 1
      N = Y/PI2
      A = N
      FACT = 1.
      IF(X.LT.0) FACT = -1.
      Y = Y - FACT*PI2*A
    1 Y = Y + 1.570796
      C = S(Y,EPS)
      RETURN
      END
```

4.22.
```
      FUNCTION E(Y,EPS)
      REAL* 8 E1/2.7182818284590/,E2/0,3678794411714/,E3,E4
      X = Y
      IX = X
      X1 = IX
```

```
      X = X - X1
      E4 = 1.
      E = 1.
      B = ABS(X)
      JX = IABS(IX)
      IF(JX.LT.1) GO TO 3
      E3 = E1
      IF(IX.LT.0) E3 = E2
      DO 1 I = 1, JX
    1 E4 = E4*E3.
    3 EM = 1.
      T = 0.
    2 T = T + 1.
      EM = EM*X/T
      E = E + EM
      EPSI = ABS(EM)*B/T
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 2
      EM = EM4
      E = E*EM
      RETURN
      END
```

La estimación del resto es

$$| R_n(x) | < \frac{| x |^{n+1}}{n!\,n} .$$

El número $e^x = e^{[x]} \cdot e^{x_1}$, $| x_1 | < 1$, donde $e^{[x]} = \underbrace{e \cdot e \ldots e}_{[x] \text{ veces}}$ para $[x] \geqslant 0$, $e^{[x]} = \dfrac{1}{\underbrace{e \cdot e \ldots e}_{[x] \text{ veces}}}$ para $[x] < 0$.

4.23.

```
      FUNCTION BINOM (X,ALFA,EPS)
      IF(X.GT.1) GO TO 2
      BINOM = 1.
      B = 1
      T = 0.
```

```
 1 A = ALFA - T
   T = T + 1
   B = B*A*X/T
   BINOM = BINOM + B
   IF(B.GT.1) GO TO 1
   EPS1 = ABS(B)/(1-ABS(A)*ABS(X)/T)
   IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 1
   RETURN
 2 WRITE (3,3)
 3 FORMAT ('X.GT.1 ')
   RETURN
   END
```

● La estimacion del resto es $|R_n(x)| \leqslant \left| \binom{\alpha}{n} x^n \right| \times$

$$\times \frac{1}{1-\dfrac{|\alpha-n+1|}{n}|x|}.$$

4.24.

```
      FUNCTION ALN(X,EPS)
      T = 0.
      ALN = 0.
      A = -1.
    1 T = T + 1
      A = (-1.)*X*A
      ALN = ALN + A/T
      IF(ABS(A/T).GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.25.

```
      FUNCTION ALN1(X,EPS)
      IF(X.GE.1) GO TO 2
      T = 0.
      ALN1 = X
      A = X
    1 T = T + 1.
      X2 = X**2
      A = A*X2
```

```
      T2 = T*2
      B = A/(T2 + 1.)
      ALN1 = ALN1 + B
      EPS1 = ABS(B)/(1.—X**2)
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
    2 WRITE (3.3)
    3 FORMAT (9h X.GE.1)
      RETURN
      END
```

● La estimación del resto es

$$| R_n(x) | \leqslant \frac{| x |^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}.$$

4.26.

```
      FUNCTION ARCTG(X,EPS)
      IF(X.GT.1) GO TO 2
      T = 0.
      ARCTG = X
      A = X
    1 T = T + 1.
      X2 = (—1.)*X**2
      A = A*X2
      T2 = T*2.
      ARCTG = ARCTG + A/(T2 + 1.)
      EPS1 = ABS(A**X2/(T2 + 3.))
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
    2 WRITE (3,3)
      FORMAT ('X.GT.1 ')
      RETURN
      END
```

4.27.

```
      FUNCTION B0(Y,EPS)
      X = Y/2
      B0 = 1.
```

```
      A = 1.
      T = 0.
    1 T = T + 1.
      A = A*(-1.)*(X*X)/T**2
      B0 = B0 + A
      IF(ABS(A).GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.28. Uno de los dos subprogramas:

```
      FUNCTION  SH(X,EPS)
      SH = (E(X,EPS) - E((-1.)*X,EPS))/2.
      RETURN
      END
      FUNCTION SH(X,EPS)
      T = 0.
      SH = 0
      A = X
    1 T = T + 1.
      T2 = T*2.
      FA = (X**2)/T2*(T2 + 1.)
      A = A*FA
      SH = SH + A
      IF(FA.GT.1) GO TO 1
      EPS1 = A*FA/(1 - FA)
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 2
      RETURN
      END
```

4.29.

```
      FUNCTION CH(X,EPS)
      CH = (E(X,EPS) + E((-1.)*X,EPS))/2.
      RETURN
      END
```

4.30. Tarea para el ordenador referente al problema 4.10:

a) subprograma

```
      FUNCTION S(X,EPS)
```

b) subprograma

```
FUNCTION C(X,EPS)
c) programa  principal
R = C(1.,0.0001)
R1 = COS(1.)
WRITE (3,1) R,R1
1 FORMAT ( 'COS1 ', 2F8.4)
STOP
END
```

Tarea para el ordenador referente al problema 4.15:

```
a) programa  principal
R1 = ALN1(0.333333, 0.0001)
R2 = ALOG(2.)
WRITE (3,1) R1,R2
1 FORMAT ( 'LN(2) = ', 2F8.4)
STOP
END
b) subprograma
FUNCTION ALN1(X,EPS)
```

Tarea para el ordenador referente al programa 4.14:

```
a) subprograma
FUNCTION BINOM(X,EPS)
b) programa  principal
R = BINOM(0.12,0.25,0.0001)
R = 0,2*R
R1 = SQRT(700.)
R1 = SQRT(R1)
WRITE (3.1)R,R1
FORMAT ('700**(1/4) = ', 2F8.4)
STOP
END
```

4.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n^2}$. **4.32.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(4n+3)}$.

4.33. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!\,(4n+1)}$. **4.34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!!\,x^{3n+1}}{2^n \cdot n!\,(3n+1)}$.

4.35.
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2^{2k+1}(k+1)!\,k!}.\quad 4.36.\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

4.37. 0,2800. **4.38.** 0,1991. **4.39.** 0,4802. **4.40.** 0,6225. **4.41.** 0,7714. **4.42.** 0,9461.

4.43.
```
      FUNCTION SI(X,EPS)
      SI = X
      X2 = X*X
      SM = X
      T = 0.
    1 T = T + 1.
      T2 = T*2
      SM = SM*(-1.)*X2/(T2 + 2.)*(T2 + 3.)
      A = SM/(T2 + 3.)
      SI = SI + A
      IF(ABS(A). GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```
4.44.
```
      FUNCTION ERF(X,EPS)
      ERF = X
      X2 = X*X
      AM = X
      T = 1.
    1 T = T + 1.
      T2 = T*2.
      AM = AM*(-1.)*X2/T
      A = AM/(T2 - 1.)
      ERF = ERF + A
      IF(ABS(A).GT.EPS) GO TO 1
      ERF = 1.128379*ERF
      RETURN
      END
```
4.45.
```
      FUNCTION BINT(X,S,ALFA,EPS)
```

```
      XS = X**S
      BINT = X
      B = X
      T = 0
    1 T = T + 1
      TS = T*S + 1.
      C = XS*(ALFA + 1.-T)/T
      B = B*C
      A = C/TS
      BINT = BINT + B/TS
      IF(ABS(A).GT.1) GO TO 1
      A = B/(1. - A)
      EPS1 = ABS(A)
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.46.

```
      FUNCTION ATG(X,EPS)
      X2 = (-1.)*X*X
      A = X
      ATG = X
      T = 0.
    1 T = T + 1.
      T2 = (T*2. + 1.)**2
      A = A*X2
      B = A/T2
      ATG = ATG + B.
      IF(ABS(B).GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.47.

```
      FUNCTION ALIN(X,EPS)
      A = -1.
      ALIN = 0.
      T = 0.
    1 T = T + 1.
```

```
T2 = T*T
A = A*X*(-1.)
B = A/T2
ALIN = ALIN + B
IF(ABS(B).GT.EPS) GO TO 1
RETURN
END
```

4.48. Tarea para el ordenador referente al problema 4.39:

a) programa principal

```
  R = 0.886227*ERF(0.5,0.0001)
  WRITE (3.1) R
1 FORMAT ('', F8.4)
  STOP
  END
```

b) subprograma función

```
FUNCTION ERF(X,EPS)
```

Tarea para el ordenador referente al problema 4.40:

a) programa principal

```
  R = BINT(0.6,2.,0.333333,0.0001)
  WRITE (3.1) R
1 FORMAT (' INTEGRAL = ', F8.4)
  STOP
  END
```

b) subprograma función

```
FUNCTION BINT(X,S,ALFA,EPS)
```

4.50. ● $\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)} - \frac{1}{(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)}\right)$. 4.51. ● Véase el problema 4.50. 4.52. ● El desarrollo en la serie potencial de la función $\ln(1+x)$ para $x=1$. 4.53. ● El desarrollo en serie potencial de la función $\operatorname{arctg} x$ para $x=1$. 4.54. $\ln 2$. 4.55. $I_0(2)$. 4.56. $e-1$. 4.57. $\frac{1}{2}\ln 2$. 4.58. $\operatorname{sen} 1$. 4.59. $\cos\frac{\sqrt{3}}{3}$. 4.60. e^2. 4.61. 1,0767. ● $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = \zeta(2) -$

$-\zeta(4)+\zeta(6)-\zeta(8)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8(n^2+1)}$. 4.62. 4,3226. ●

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}=\pi^2\zeta(2)-\frac{\pi^4}{3}\zeta(4)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}-\frac{\pi^2}{n^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi^4}{n^4}\right).$$

4.63. 0,5071. ● $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+2}=\zeta(3)-2\zeta(6)+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6(n^3+2)}$.

4.64. 0,0939. ● $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(5n+3)}=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2}\right)\zeta(2)-\frac{3}{25}\times$

$\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\zeta(3)+\frac{9}{125}\left(1-\frac{1}{8}\right)\zeta(4)-\frac{27}{125}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^4(5n+3)}$.

4.65. 0,1249. ● $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n+2}=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{2}{9}\left(1-\frac{1}{2}\right)\zeta(2)+$

$+\frac{4}{27}\left(1-\frac{1}{4}\right)\zeta(3)-\frac{8}{81}\left(1-\frac{1}{8}\right)\zeta(4)+\frac{16}{81}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\times$

$\times\frac{1}{n^4(3n+2)}$. 4.66. El programa para el problema 4.64 (empléese la igualdad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(an+b)}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{2}\right)\zeta(2)-\frac{b}{a^2}\times$

$\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\zeta(3)+\frac{b^2}{a^3}\left(1-\frac{1}{8}\right)\zeta(4)-\frac{b^3}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^4(an+b)}$

para $a=5$, $b=3$):

```
A = 5.
B = 3.
EPS = 0.0002
S = 0.822467/A - B*0.901543/A**2 + B**2*0.947033/A**3
D = 1.
C = 0.
T = 0.
```

```
1 T = T + 1
  D = D*(-1.)
  SM = 1./(T**4)*(A*T + B)
  C = C + D*SM
  IF(SM.GT.EPS) GO TO 1
  S = S + (B**3)*C/(A**3)
  WRITE (3,2) S
2 FORMAT (' SUMA DE LA SERIE = ', F8.4)
  STOP
  END
```

4.67. $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 6\ \dots\ (4n+1)(4n+2)}{(4n)!}x^{4n}+\frac{2\cdot 3\cdot 6\cdot 7\ \dots\ (4n+2)(4n+3)}{(4n+1)!}x^{4n+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$. **4.68.** $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(1\cdot 4\cdot 7\ \dots\ (3n+1))^2}{(3n+2)!}(3n+4)x^{3n+2}$, $x\in\mathbb{R}$. **4.69.** $y(x)=1+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{5x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\dots$ **4.70.** $y(x)=1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+\frac{x^6}{45}+\dots$ **4.71.** $y(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{5x^6}{6!}+\dots$ **4.72.** $y(x)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2^m\cdot m!}x^{2m}=1-e^{-x^2/2}$, $x\in\mathbb{R}$. **4.73.** $y(x)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{2^{m-1}(m-1)!}{(2m+1)!}x^{2m+1}$, $x\in\mathbb{R}$. **4.74.** $y(x)=x+\frac{1}{2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\times\frac{(-1)^m}{(2m+1)!!}x^{2m+1}$, $x\in\mathbb{R}$. **4.75.** $y(x)=C_1\frac{\operatorname{sen} x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}$. ● La solución general debe contener dos constantes arbitrarias, por eso de las igualdades $r(r+1)a_0=0$ y $(r+1)(r+2)a_1=0$ escogemos $r=-1$, entonces $a_0\neq 0$ y $a_1\neq 0$. **4.74.** $y(x)=C_1\cos\sqrt{x}+C_2\operatorname{sen}\sqrt{x}$. **4.79.** $I_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen} x$, $I_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$. ● Utilícese la igualdad $\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)=\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$. **4.80.** $y(x)=C_1I_\nu(\alpha x)+C_2I_{-\nu}(\alpha x)$ si ν es un número no entero e $y(x)=C_1I_n(\alpha x)+C_2N_n(\alpha x)$ si $\nu=n$ es un número entero. **4.81.** $y(x)=$

$= C_1 I_0\,(2x) + C_2 N_0\,(2x)$. **4.82.** $\sqrt{y(x)} = C_1 I_{1/3}\,(2x) + C_2 I_{-1/3}\,(2x)$. **4.83.** $y\,(x) = C_1 I_2\,(x\sqrt{3}) + C_2 N_2\,(x\sqrt{3})$. **4.84.** $y\,(x) = C_1 I_{1/5}\,(3x) + C_2 I_{-1/5}\,(3x)$.

5.1. $|z-2|>1$; $\dfrac{z-2}{z-3}$. **5.2.** $|z+i|>2$; $\dfrac{2i}{(z-i)^2}$. **5.3.** $0<|z|<\infty$; $z^3e^{1/z}$. **5.4.** $1<|z-i|<\infty$; $\dfrac{1}{z^2}$. **5.5.** $\dfrac{1}{z-1} - \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$, $0<|z-1|<1$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(z-1)^{n+1}}$, $1<|z-1|<\infty$. **5.6.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}$, $|z|>1$. ● Sustitúyase $z=1/\eta$ y desarróllese según las potencias η. **5.7.** $-\dfrac{i}{4(z-i)^2}-\dfrac{1}{8}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\times$ $\times\dfrac{ki^k(z-i)^{k-1}}{2^k}$, $0<|z-i|<2$; $-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+2)(-i)^k\dfrac{2^k}{(z-i)^{k+4}}$, $2<|z-i|<\infty$. ● $\dfrac{z}{(z^2+1)^2}=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z^2+1}\right)'$. Para el segundo desarrollo válganse de la sustitución $z-i=\dfrac{1}{\eta}$. **5.8.** $\dfrac{1}{z^4}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\times$ $\times(-1)^k\dfrac{k+1}{z^{2k}}$, $1<|z|<\infty$. ● $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}=-\dfrac{1}{2z}\left(\dfrac{1}{z^2+1}\right)'$.

5.9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n-3}}{(2n)!}$, $0<|z|<\infty$. **5.10.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n-3}}{(2n)!}$, $0<|z|<\infty$. **5.11.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!\,(z-2)^{2n+1}}$, $0<|z-2|<\infty$.

5.12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!\,z^{n-3}}$, $0<|z|<\infty$. **5.13.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!\,z^{n-2}}$, $0<|z|<\infty$. **5.14.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{4^{2n}}{(2n)!}\left(\dfrac{\cos 1}{(z-2)^{4n}}+\dfrac{4\,\mathrm{sen}\,1}{(2n+1)}\times\right.$

$\times \frac{1}{(z-2)^{1n+2}}\Big)$, $0<|z-2|<\infty$. **5.15.** $\operatorname{sen}\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-$ $-\frac{5}{6}\frac{1}{z^3}+\ldots,\ 1<|z|<\infty$.

5.16. ● Examínese la integral $\int\limits_{|\eta-z_0|=\rho}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}$ y válganse de la acotación $f(z)$, que desprende de la existencia del límite $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. **5.17.** ● Empléese la siguiente afirmación: si $g(z)=$ $=(z-z_0)^m\varphi(z)$, $m\geqslant 1$, $\varphi(z_0)\neq 0$ y $\varphi(z)$ es una función analítica en el entorno del punto z_0, entonces en cierto entorno del punto z_0 es válido el desarrollo $\frac{1}{\varphi(z)}=b_0+b_1(z-z_0)+\ldots$, donde $b_0=$ $=\frac{1}{\varphi(z_0)}\neq 0$. **5.18.** ● Demuéstrese por reducción al absurdo, es decir, supóngase que $f(z)$ está acotada en el entorno del punto z_0 y dedúzcase de esta suposición que z_0 es un punto singular evitable. **5.19.** ● Analícese la función $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-A}$; demuéstrese que z_0 es un punto esencialmente singular para $\varphi(z)$ y aprovéchese la afirmación del problema 5.18. **5.20.** $\sum\limits_{n=1}^{0} c_nz^n$ converge en todo el plano y la serie $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_nz^n$ converge fuera del círculo $|z|\geqslant R$. **5.21.** Los puntos $z_1=e^{-i\frac{\pi}{4}}$ y $z_2=e^{-i\frac{\pi}{4}+\pi i}$ son polos de tercer orden. **5.22.** Los puntos $z_1=0$ y $z_2=-1$ son polos de primer orden y el punto $z_3=1$ es un polo de tercer orden. **5.23.** Los puntos $z_k=k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$, son polos de primer orden. **5.24.** Los puntos $z_k=\pi(2k+1)/2$, $k=0,$ $\pm 1, \ldots$, son polos de segundo orden. **5.25.** El punto $z_0=3i$ es un punto esencialmente singular. **5.26.** El punto $z_0=-2i$ es esencialmente singular. **5.27.** Los puntos $z_k=1+\frac{2}{\pi(2k+1)}$, $k=0, \pm 1, \ldots$, son polos de primer orden y el punto $z=1$ es un punto límite para los polos. **5.28.** En el punto $z=1$ tenemos una singularidad evitable y en los puntos $z_k=1+\frac{\pi(2k+1)}{2}$, $k=0, \pm 1, \ldots$, polos de primer orden. **5.29.** En el punto $z_0=0$ tenemos una singularidad evitable. **5.30.** En el punto $z_0=0$ tenemos un polo de cuarto orden. **5.31.** En los puntos $z_k=\ln 3+2k\pi i$, $k=0, \pm 1, \ldots$, tenemos polos de primer orden. **5.32.** Un punto regular. **5.33.** Un polo de tercer orden. **5.34.** Un punto regular (cero de tercer orden). **5.35.** Un polo de segundo orden. **5.36.** Un punto esencialmente singular. **5.37.** Un punto esencialmente singular. **5.38.** Un polo de segundo orden. **5.39.** Un punto regular. 5.40. Un punto regular. 5.41. Un punto esencialmente singular.

6.1. $\operatorname{res}\left[\frac{z^2+1}{z-2};\ 2\right]=5$. **6.2.** $\operatorname{res}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2};\ i\right]=-\frac{1}{4}i$, $\operatorname{res}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2};\ -i\right]=\frac{1}{4}i$. **6.3.** $\operatorname{res}\left[\frac{z^{2n}}{(z-1)^n};\ 1\right]=\frac{2n(2n-1)\ldots(n+2)}{(n-1)!}$. **6.4.** $\operatorname{res}\left[\frac{\operatorname{sen} 2z}{(z+1)^3};\ -1\right]=-\frac{4\cos 2}{3}$. **6.5.** $\operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)};\ 0\right]=\frac{1}{9}$, $\operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)};\ 3i\right]=\frac{ie^{3i}}{54}$, $\operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)};\ -3i\right]=-\frac{ie^{-3i}}{54}$. **6.6.** $\operatorname{res}\left[\operatorname{tg} z;\ \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]=-1$, $k\in\mathbb{Z}$. **6.7.** $\operatorname{res}[\operatorname{ctg}^2 z;\ k\pi]=0$, $k\in\mathbb{Z}$. **6.8.** $\operatorname{res}\left[\frac{\cos^3 z}{z^3};\ 0\right]=-\frac{3}{2}$. **6.9.** $\operatorname{res}\left[\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)};\ 0\right]=0$, $\operatorname{res}\left[\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)};\ 1\right]=1$. **6.10.** $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z(1-z^2)};\ 0\right]=1$, $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z(1-z^2)};\ 1\right]=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z(1-z^2)};\ -1\right]=-\frac{1}{2}$. **6.11.** $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2-z^5};\ 0\right]=0$, $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2-z^5};\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{1+i\sqrt{3}}{6}$, $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2-z^5},\ 1\right]=-\frac{1}{3}$, $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2-z^5};\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{1-i\sqrt{3}}{6}$. **6.12.** $\left[\frac{\cos 4z}{(z-2)^6};\ 2\right]=-\frac{128}{15}\operatorname{sen} 8$. **6.13.** 1. **6.14.** 0. **6.15.** 1. **6.16.** -1. **6.17.** 0. **6.18.** $-\frac{1}{3}\operatorname{sh} 3$. ● Empléese el segundo teorema sobre los residuos. **6.19.** 0. **6.20.** π^2. **6.21.** -1. **6.22.** $\frac{\pi i\sqrt{2}}{2}$. **6.23.** $\frac{\pi i\sqrt{2}}{2}$. **6.24.** $2\pi i$. **6.25.** $4\pi i$. **6.26.** $-4\pi i$. **6.27.** $\frac{2\pi i}{9}$. **6.28.** $\frac{2\pi i}{3}\operatorname{sh} 3$. ● Válganse del segundo teorema sobre los residuos y del resultado del problema 6.18. **6.29.** $(-1)^n\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{(n-1)!}\frac{2\pi i}{(b-a)^{2n-1}}$. **6.30.** 0. ● Empléense el segundo teorema sobre los residuos y la relación $\operatorname{res}[f(z);\ \infty]=0$. **6.31.** $2\pi i$. **6.32.** 0. **6.33.** 0. **6.34.** 0. **6.35.** $-4\pi i$. **6.36.** $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. **6.37.** $\frac{2\pi a}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}}$. **6.38.** $\pi\sqrt{2}$. **6.39.** $\frac{\pi}{2^{2n-2}}\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{(n-1)!}$. **6.40.** $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$. **6.41.** $\frac{\pi}{4a}$. **6.42.**

$\frac{\pi e^{-4}}{2}$ (sen 2 + 2 cos 2). **6.43.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{3}\,\text{sen}\,\frac{1}{2} - \cos\frac{1}{2}\right)$. **6.44.** $\frac{\pi}{2} e^{-ab}$. **6.45.** $\frac{\pi}{6} e^{-3}$. **6.46.** $\pi \frac{2e-1}{12e^2}$. **6.47.** Dos raíces. ● $p(it)$, al variar t desde $+\infty$ hasta $-\infty$, no recibe incremento. **6.48.** Dos raíces. **6.49.** Tres raíces. **6.50.** ● Utilícese el hecho de que arg $fg = \arg f + \arg g$ y $\arg\left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)$ no adquiere incremento cuando el punto z recorre el contorno L, ya que $\left|\frac{\varphi(\eta)}{f(\eta)}\right|_{\eta \in L} < 1$. **6.51.** ● Analícense las funciones $f(z) = a_0 z^n$ y $\varphi(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ en la circunferencia $|z| = R$ de un radio bastante grande R. **6.52.** a) en el círculo $|z| < 1$ hay un cero; b) en el anillo $1 \leqslant |z| < 2$ hay cuatro ceros. ● Póngase $f(z) = 8z$ en el caso a) y $f(z)$ en el caso b). **6.53.** a) en el círculo $|z| < 1$ hay un cero; b) en el anillo $1 \leqslant |z| < 2$ no hay ceros; c) en el anillo $2 \leqslant |z| < 3$ hay dos ceros.

7.2. Para la función par: $\beta_k = 0$, $\alpha_k = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(x) \cos\frac{2\pi k x}{l}\, dx$, para la impar: $\alpha_k = 0$, $\beta_k = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(x)\,\text{sen}\,\frac{2\pi k x}{l}\, dx$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

7.3. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m}^{\infty} \frac{\text{sen}\,(2m-1)\,x}{2m-1}$, $S(\pi) = \frac{1}{2}$ (fig. 103). **7.4.** $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\,kx}{k}$, $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ (fig. 104). **7.5.** $f(x) \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \times \frac{\cos \pi (2m-1)\,x}{(2m-1)^2}$, $S(1) = 1$ (fig. 105). **7.6.** $f(x) = \frac{1}{\ln 2} + 2 \ln 2 \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cos k\pi - 1}{\ln^2 2 + k^2 \pi^2} \cos \frac{\pi k x}{\ln 2}$. **7.7.** $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}^3 \frac{k\pi}{4}}{k}\,\text{sen}\,kx$. **7.8.** $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos \pi k x$. **7.9.** $f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \times \text{sen}\,\frac{\pi (2m+1)\,x}{2}$. **7.10.** $f(x) = \frac{\pi}{2}\,\text{sen}\,x - \frac{16}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(4m^2-1)^2}\,\text{sen}\,2mx$.

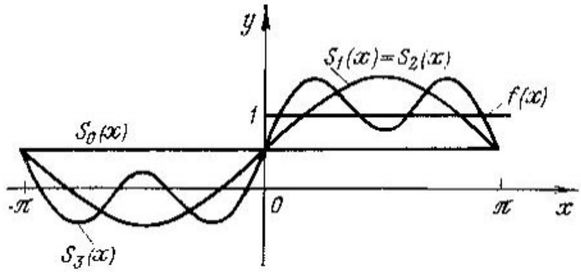


Fig. 103

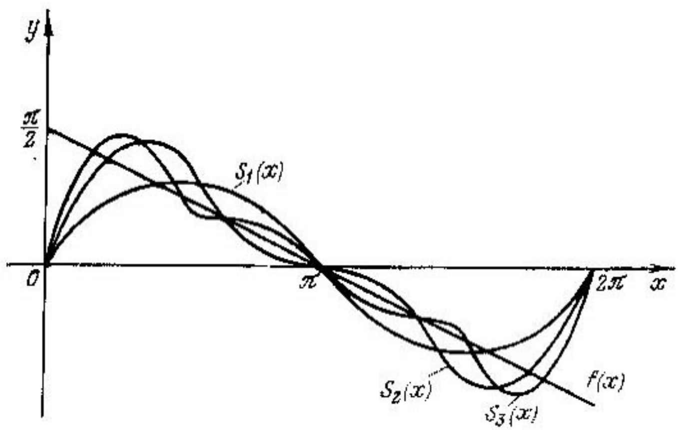


Fig. 104

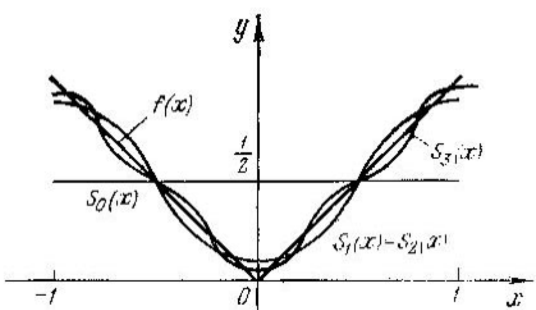


Fig 105.

7.11. a) $\frac{\pi^2}{8}$; b) $\frac{\pi^2}{32\sqrt{2}}$. ● Examínese la serie en el punto $x_0 = 1/4$. **7.12.** $\pi^2/12$. **7.13.** $\pi^2/6$. **7.14.** ● Multiplicando y dividiendo $\mathscr{D}_n(x)$ entre $2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}$, obtenemos $\mathscr{F}_n(x) = \frac{1}{2(n+1)\,\text{sen}\,\frac{x}{2}} \times$
$$\times \sum_{k=0}^{n} \frac{2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}\,\text{sen}\,\frac{2k+1}{2}\,x}{2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}} = \frac{1}{4(n+1)\,\text{sen}^2\,\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n} (\cos kx -$$
$$-\cos(k+1)x) = \frac{1-\cos(n+1)\,x}{4(n+1)\,\text{sen}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{1}{n+1}\,\frac{\text{sen}^2\,\frac{n+1}{2}}{2\,\text{sen}^2\,\frac{x}{2}}.$$
7.15. $f(x, y) = \pi^2 - 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\,mx}{m} - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\,ny}{n} + 4 \sum_{m,\,n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\,mx\,\text{sen}\,ny}{mn}$.

7.16. $f(x, y) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\,\text{sen}\,mx + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\,\text{sen}\,ny + \sum_{m,\,n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{mn}\,\text{sen}\,mx\,\text{sen}\,ny$. **7.17.** $f(x, y) = \frac{4}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \times$
$$\times\,\text{sen}\,\frac{\pi n y}{2} + \frac{16}{\pi^3} \sum_{m,\,n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+1}}{m^2 n}\,\cos \pi m x\,\text{sen}\,\frac{\pi n y}{2}.$$
7.18. $f(x, y) = \frac{2\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}\,\text{sen}\,\pi m x + \frac{2}{\pi} \sum_{m,\,n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+1}}{mn^2}\,\text{sen}\,\pi m x \times \cos ny$. **7.19.** $\mathfrak{F}[\text{sign}(t-a) - \text{sign}(t-b)] = \frac{2\,\text{sen}\,\pi\nu(b-a)}{\pi\nu} \times e^{-\pi i\nu(a+b)}$. **7.20.** $\mathfrak{F}[f] = h\,\frac{\text{sen}^2\,\pi\nu a}{\pi^2\nu^2 a}$. **7.21.** $\mathfrak{F}[f] =$
$$= \begin{cases} \frac{4\pi\nu}{a^2 - 4\pi^2\nu^2}\,\text{sen}\,\frac{4\pi^2\nu}{2a} & \text{para } \nu \neq \frac{a}{2\pi}, \\ \frac{\pi}{a} & \text{para } \nu = \frac{a}{2\pi}. \end{cases}$$
7.22. $\mathfrak{F}[f] = \frac{2\,\text{sen}^2\,\pi\nu}{\pi i \nu}$.

7.23. $\mathfrak{F}_c\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right] = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\,e^{-\omega a}$; $\frac{1}{a^2+t^2} = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\omega a} \cos \omega t\,d\omega$.

● La integral $\mathfrak{F}_c\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right]$ se calcula integrando según el parámetro ω (véase el problema 4.28. del cap. 8). **7.24.** $\mathfrak{F}_s\left[\frac{t}{a^2+t^2}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\omega a}$, $\frac{t}{a^2+t^2}=\int_0^{+\infty} e^{-\omega a}\operatorname{sen}\omega t\,d\omega$. ● Utilícese la relación $\mathfrak{F}_s\left[\frac{t}{a^2+t^2}\right]=-\frac{d}{d\omega}\mathfrak{F}_c\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right]$, donde la integral $\mathfrak{F}_c\times\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right]$ está calculada en el problema 7.23. **7.25.** $\mathfrak{F}_s[te^{-t^2}]=\frac{\omega}{2\sqrt{2}}e^{-\omega^2/4}$, $te^{-t^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\omega}{2\sqrt{2}}e^{-\omega^2/4}\operatorname{sen}\omega t\,d\omega$. **7.26.** $\mathfrak{F}_c[e^{-\alpha|t|}\cos\beta t]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2+\omega^2)}{(\alpha^2+(\beta+\omega)^2)(\alpha^2+(\beta-\omega)^2)}$, $e^{-\alpha|t|}\cos\beta t=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{(\alpha^2+(\beta+\omega)^2)(\alpha^2+(\beta-\omega)^2)}\cos\omega t\,d\omega$. **7.28.** $S(\nu_k)=-\frac{2i}{\pi\nu_k}\operatorname{sen}^2\pi\nu_k T$, $\nu_k=\frac{k}{4T}$, $\rho(\nu_k)=\frac{2}{\pi|\nu_k|}\operatorname{sen}^2\pi\nu_k T$, $\Phi(\omega_k)=\begin{cases}0 & \text{para } k=4n,\\ \frac{\pi}{2} & \text{para } k\neq 4n,\end{cases}$ $n\in\mathbb{N}$ (fig. 106). **7.29.** $S(\nu_k)=\frac{\operatorname{sen}2\pi\nu_k-i(1-\cos 2\pi\nu_k)}{\pi\nu_k}$, $\nu_k=\frac{k}{3}$, $\rho(\nu_k)=\frac{2|\operatorname{sen}\pi\nu_k|}{\pi|\nu_k|}$, $\Phi(\nu_k)=\begin{cases}\pi\nu_k & \text{para } k=1,\ 2,\\ 0 & \text{para } k=3,\end{cases}$ $\Phi(\nu_{k+2})=\Phi(\nu_k)$ (fig. 107). **7.30.** $S(\nu)=\frac{\operatorname{sen}2\pi a\nu}{\pi\nu}$, $\rho(\nu)=\frac{|\operatorname{sen}2\pi a\nu|}{\pi|\nu|}$, $\Phi(\nu)=\begin{cases}0, & \text{si } S(\nu)\geqslant 0,\\ -\pi, & \text{si } S(\nu)<0\end{cases}$ (fig. 108). **7.31.** $S(\nu)=\frac{2\cos\pi\nu}{\pi(1-4\nu^2)}$, $\rho(\nu)=\frac{2}{\pi}\left|\frac{\cos\pi\nu}{1-4\nu^2}\right|$, $\Phi(\nu)=\begin{cases}0, & \text{si } S(\nu)\geqslant 0,\\ -\pi, & \text{si } S(\nu)<0\end{cases}$ (fig. 109). ● Para calcular la integral $\int_{-1/2}^{1/2}\cos\pi t e^{-2\pi i\nu t}\,dt$ la función $\cos\pi t$ debe representarse según la fórmula de Euler. **7.32.** $S(\nu)=\frac{\operatorname{sen}^2\pi\nu}{\pi\nu^2}$, $\rho(\nu)=\frac{\operatorname{sen}^2\pi\nu}{\pi\nu^2}$, $\Phi(\nu)=0$ (fig. 110). **7.33.** $S(\nu)=\frac{\operatorname{sen}4\pi\nu+i(\cos 4\pi\nu-1)}{\pi\nu}$, $\rho(\nu)=$

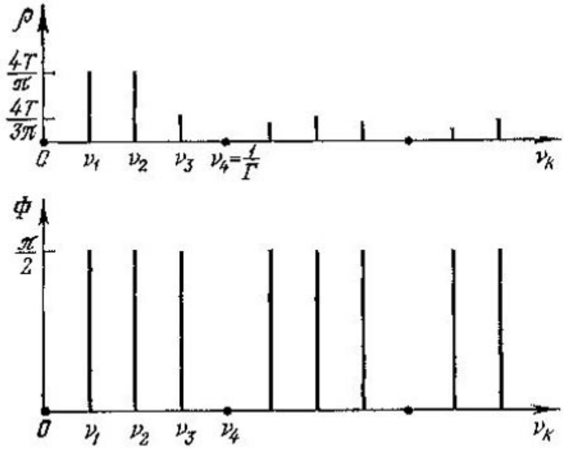


Fig. 106

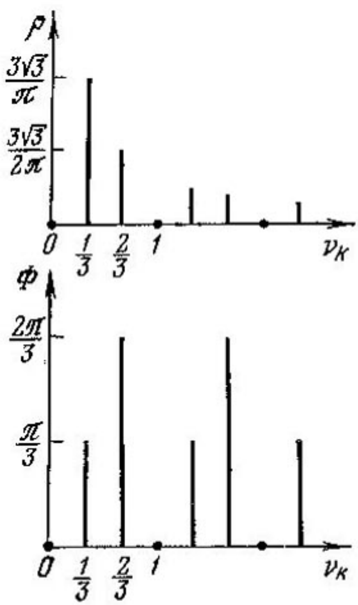


Fig. 107

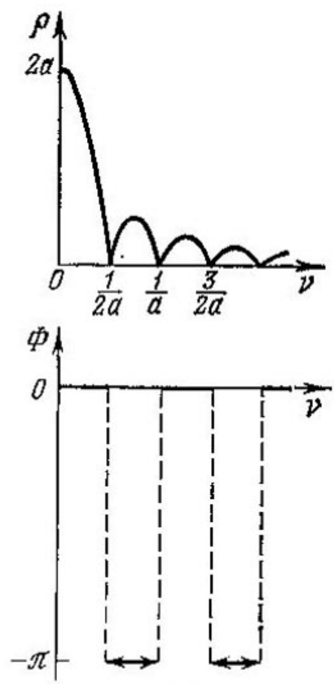


Fig. 108

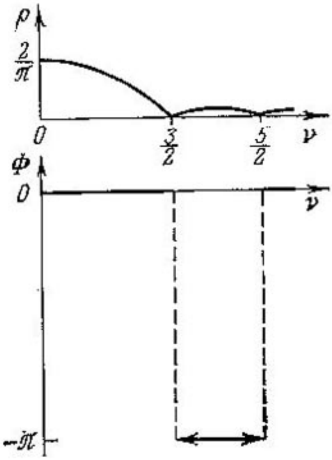


Fig. 109

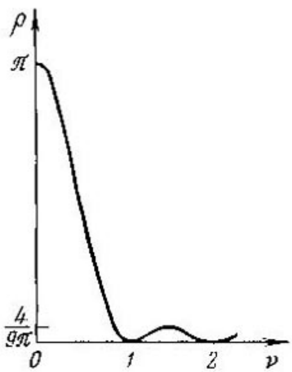


Fig. 110

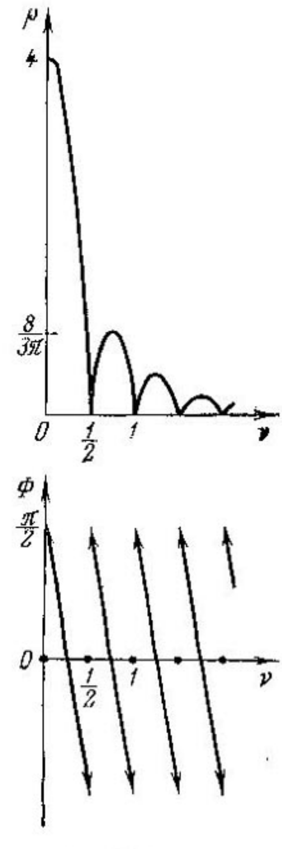


Fig. 111

$$=\frac{2}{\pi|\nu|}\,|\mathrm{sen}\,2\pi\nu|,\quad \Phi(\nu)=-\arg S(\nu)=\begin{cases} 0, & \text{si } \nu=0 \text{ y } \omega=1/2,\\ -2\pi\nu, & \text{si } 0<\nu<1/2,\end{cases}$$

$\Phi\left(\nu+\frac{1}{2}\right)=\Phi(\nu)$ (fig. 111).

7.34. $$W_1=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&-1 \end{pmatrix},$$

$$W_2=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&q^2&0&0\\ 1&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&-q^2&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&q^2\\ 0&0&1&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&-q^2 \end{pmatrix},$$

$$W_3=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&q&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&q^2&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&q^3\\ 1&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&-q&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&-q^2&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&-q^3 \end{pmatrix}.$$

7.35. $$Z^{(1)}=\begin{pmatrix} x_0+x_4\\ x_0-x_4\\ x_1+x_5\\ x_1-x_5\\ x_2+x_6\\ x_2-x_6\\ x_3+x_7\\ x_3-x_7 \end{pmatrix},\quad Z^{(2)}=\begin{pmatrix} (x_0+x_4)+(x_2+x_6)\\ (x_0-x_4)+q^2(x_2-x_6)\\ (x_0+x_4)-(x_2+x_6)\\ (x_0-x_4)-q^2(x_2-x_6)\\ (x_1+x_5)+(x_3+x_7)\\ (x_1-x_5)+q^2(x_3-x_7)\\ (x_1+x_5)-(x_3+x_7)\\ (x_1-x_5)-q^2(x_3-x_7) \end{pmatrix},$$

$$
Z^{(3)}=\begin{pmatrix}
(x_0+x_4+x_2+x_6)+(x_1+x_5+x_3+x_7)\\
(x_0-x_4+q^2x_2-q^2x_6)+(qx_1-qx_5+q^3x_3-q^3x_7)\\
(x_0+x_4-x_2-x_6)+(q^2x_1+q^2x_5-q^2x_3-q^2x_7)\\
(x_0-x_4-q^2x_2+q^2x_6)+(q^3x_1-q^3x_5-qx_3+qx_7)\\
(x_0+x_4+x_2+x_6)-(x_1+x_5+x_3+x_7)\\
(x_0-x_4+x_2-x_6)-(qx_1-qx_5+q^3x_3-q^3x_7)\\
(x_0+x_4-x_2-x_6)-(q^2x_1+q^2x_5-q^2x_3-q^2x_7)\\
(x_0-x_4-q^2x_2+q^2x_6)-(q^3x_1-q^3x_5-qx_3+qx_7)
\end{pmatrix}.
$$

7.36.
```
      SUBROUTINE FASTFT(N,N1,KIND,A,B,AA,BB)
      DIMENSION A(N1),B(N1),AA(N1),BB(N1)
      INTEGER V
      M = 1
    1 K = 0
    2 V = 0
    3 J = (2**M)*K + V + 1
      I = (2**(M - 1))*K + V + 1
      C = 3.141593*FLOAT(V)/(2**(M - 1))
      IF(KIND) 7,7,8
    7 SI = SIN(C)
      GO TO 9
    8 SI = -SEN(C)
    9 CO = COS(C)
      NI = 2**(N - 1) + I
      JM = J + 2**(M - 1)
      AO = A(NI)
      BO = B(NI)
      AA(J) = A(I) + AO*CO + BO*SI
      BB(J) = B(I) - AO*SI + BO*CO
      AA(JM) = A(I) - AO*CO - BO*SI
      BB(JM) = B(I) + AO*SI - BO*CO
      V = V + 1
      IF(V - 2**(M - 1)) 3,4,4
    4 K = K + 1
      IF(K - 2**(N - M)) 2,5,5,
    5 M = M + 1
```

```
      DO 13 I = 1,N1
      A(I) = AA(I)
   13 B(I) = BB(I)
      IF(M - N) 1,1,6
    6 IF(KIND) 10,10,12
   10 DO 11 I = 1,N1
      AA(I) = AA(I)/N1
   11 BB(I) = BB(I)/N1
   12 RETURN
      END
```

7.37.
```
      SUBROUTINE F730(A,B)
      DIMENSION A(128),B(128)
      DO 1 I = 1,128
      A(I) = 25
    1 B(I) = 0.
      RETURN
      END
```

7.38.
```
      SUBROUTINE F731(A,B)
      DIMENSION A(128),B(128)
      DO 1 I = 1,32
      A(I) = 0.
      A(I + 96) = 0.
    1 B(I) = 0
      DO 2 I = 33,96
      A(I) = 20.
    2 B(I) = 0
      RETURN
      END
```

7.39.
```
      SUBROUTINE F732(A,B)
      DIMENSION A(128), B(128)
      DO 1 I = 1,128
      T = I
      A(I) = T*(128. - T)/32.
    1 B(I) = 0.
      RETURN
      END
```

```
7.40. SUBROUTINE F733(A,B)
      DIMENSION A(128),B(128)
      DO 1 I = 1,64
      T = I
      A(I) = T
      A(I + 64) = 64. - T
      B(I) = 0.
    1 B(I + 64) = 0.
      RETURN
      END
7.41. SUBROUTINE F734(A,B)
      DIMENSION
      DO I I = 1,128
      A(I) = I
    1 B(I) = 0.
      RETURN
      END
7.42. DIMENSION A(128),B(128),AT(128),BT(128),A1(128),B1(128),
     *A2(128),B2(128)
      CALL F734(A,B)
      WRITE (3,10)
   10 FORMAT (30H0 SUCESION INICIAL)
      WRITE (3,1) A,B
    1 FORMAT ('', 16F7.2)
      DO 2 I = 1,128
      A1(I) = A(I)
    2 B1(I) = B(I)
      CALL FASTFT (7,128,0,A1,B1,AT,BT)
      WRITE (3,11)
      FORMAT (6H0 TDF)
   11 WRITE (3,1) AT,BT
      M = 24
      DO 6 I = 1,M
      AT(64 - I) = 0.
```

```
      BT(64 - I) = 0.
      AT(64 + I) = 0.
    6 BT(64 + I) = 0.
      DO 4 I = 1,128
      A1(I) = AT(I)
    4 B1(I) = BT(I)
      CALL FASTFT (7,128,1,A1,B1,A2,B2)
      WRITE (3,12) M
   12 FORMAT ( 'M = ',I6)
      DO 7 I = 1,128
      A1(I) = A(I) - A2(I)
    7 B1(I) = B(I) - B2(I)
      WRITE (3,1) A1,B1
      M = M + 8
      IF(M - 40) 5,5,8
    8 STOP
      END
```

CAPÍTULO 13

CALCULO OPERACIONAL

§ 1. Transformación de Laplace

1. Definición y propiedades de la transformación de Laplace. Se llama *transformación de Laplace* de la función $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (que, en general, puede tomar los valores complejos) la función $F(p)$ de la variable compleja p, determinada por la igualdad siguiente:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt. \qquad (1)$$

Si la función $f(t)$ satisface las siguientes condiciones:
1) $f(t) = 0$ para $t < 0$,
2) existen tales constantes σ y M que

$$|f(t)| < Me^{\sigma t} \quad \text{para} \quad t > 0 \qquad (2)$$

(la magnitud $\sigma_0 = \inf \sigma$ se llama *índice de crecimiento* de la función $f(t)$),

3) en cualquier segmento finito $[0, T]$ la función $f(t)$ tiene no más puntos que el número finito de puntos de discontinuidad de primer género, además consideramos que $f(0) = f(+0)$,

entonces la función $f(t)$ se llama *original* y *la integral de Laplace* que figura en el segundo miembro de la igualdad (1) converge absoluta y uniformemente en todo el semiplano $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma > \sigma_0$.

Señalemos que la desigualdad (2) se cumple para cualquier $\sigma = \sigma_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, y para $\sigma = \sigma_0$ puede no verificarse como, por ejemplo, en el caso en que $f(t)$ es un polinomio ($\sigma_0 = 0$).

La función $F(p)$ se llama *representación para* $f(t)$. La representación $F(p)$ es una función analítica en el semiplano $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

La correspondencia entre el original $f(t)$ y su representación $F(p)$ se denota simbólicamente $F(p) \risingdotseq f(t)$ o $F(p) = L[f(t)]$. Utilizaremos el primer símbolo.

Hállense las representaciones de las funciones siguientes:

1.1. *De la función unitaria de Heaviside*

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{para} \quad t < 0. \end{cases}$$

1.2. $e^{\alpha t}\eta(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

En adelante, por función $f(t)$ dada con ayuda de la fórmula analítica se comprenderá el producto de esta función por la función unitaria de Heaviside, es decir, consideraremos $f(t) = 0$ para $t < 0$.

Supongamos que las funciones que se estudian más abajo $f(t)$, $f_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, son originales, además $f_\nu(t) \risingdotseq F_\nu(p)$ para $\operatorname{Re} p > \sigma_\nu$. Tienen lugar las siguientes propiedades:

1. PROPIEDAD DE LINEALIDAD. Para cualesquiera constantes C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$\sum_{k=1}^{n} C_k f_k(t) \risingdotseq \sum_{k=1}^{n} C_k F_k(p), \ \operatorname{Re} p > \text{más}\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}.$$

2. TEOREMA DE SEMEJANZA. Para cualquier constante $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \ \operatorname{Re} p > \alpha\sigma_0.$$

3. TEOREMA DE RETARDO. Al retardo de inclusión del original en τ le corresponde la multiplicación de la representación por $e^{-p\tau}$, es decir,

$$f(t - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p), \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0$$

(para $t < \tau$ en virtud de la condición 1) impuesta sobre el original, $f(t - \tau) \equiv 0$).

4. TEOREMA DE DESPLAZAMIENTO. A la multiplicación del original por $e^{\alpha t}$ le corresponde el retardo de la representación en α, es decir,

$$e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p - \alpha), \quad \operatorname{Re}(p - \alpha) > \sigma_0.$$

5. DIFERENCIACIÓN DEL ORIGINAL. Si $f(t)$ y sus derivadas $f^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, son originales, entonces para todo $k = 1, 2, \ldots, n$

$$f^{(k)}(t) \risingdotseq p^k F(p) - (p^{k-1} f(0) + p^{k-2} f'(0) + \ldots + f^{(k-1)}(0)).$$

En particular,

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

6. INTEGRACIÓN DEL ORIGINAL:

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}, \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

7. DIFERENCIACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN. A la multiplicación del original por el factor t le corresponde la multiplicación de la representación por -1 y su diferenciación según el argumento p:

$$t^n f(t) \risingdotseq (-1)^n F^{(n)}(p), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

8. INTEGRACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN. Si $\frac{f(t)}{t}$ es original, entonces

$$\frac{1}{t} f(t) \risingdotseq \int_p^\infty F(q)\, dq.$$

9. DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN SEGÚN EL PARÁMETRO. Si $f(t, \alpha) \risingdotseq F(p, \alpha)$ y las funciones $\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha}$ y $\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha)\, d\alpha$, consideradas como funciones de la variable t, son originales, entonces

$$\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha} \risingdotseq \frac{\partial F(p, \alpha)}{\partial \alpha} \quad \text{y} \quad \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha)\, d\alpha \risingdotseq \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(p, \alpha)\, d\alpha.$$

10. TEOREMA DE BOREL (multiplicación de representaciones). A la convolución de los originales

$$f_1 * f_2 = \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau$$

le corresponde el producto de las representaciones, es decir,

$$f_1 * f_2 \risingdotseq F_1(p) F_2(p).$$

11. INTEGRAL DE DUHAMEL. Si $f(t) \risingdotseq F(p)$ y $g(t) \risingdotseq G(p)$, entonces

$$pF(p)\, G(p) \risingdotseq f(0)\, g(t) + (f' * g)(t) = g(0)\, f(t) + (g' * f)(t).$$

12. TEOREMAS DE CONEXIÓN de los valores «iniciales» y «finales» del original y de la representación. Si $f(t) \risingdotseq F(p)$, entonces

a) $f(0) = \lim\limits_{p \to \infty} pF(p)$

y (si existe el límite finito $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = f(+\infty)$)

b) $f(+\infty) = \lim\limits_{p \to 0} pF(p)$.

EJEMPLO 1. Hállese la representación de la función sen βt y cos βt.

◀ Aplicando la fórmula de Euler, la propiedad de linealidad y tomando en consideración la solución del problema 1.2, hallamos

$$\operatorname{sen} \beta t = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\beta} - \frac{1}{p + i\beta}\right) = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$$

$$(\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \beta|).$$

Análogamente

$$\cos \beta t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} \risingdotseq \frac{p}{p^2 + \beta^2} \quad (\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \beta|). \ ▶$$

Para calcular las representaciones, además de las propiedades indicadas, se debe emplear *la tabla de representaciones*.

EJEMPLO 2. Hállese la representación de la función sen$^3 t$.

◀ Según la fórmula de Euler tenemos

$$\operatorname{sen}^3 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{3(e^{it} - e^{-it})}{2i} - \frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{3}{4} \operatorname{sen} t - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3t.$$

No	$f(t)$	$F(p)$	No	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	7	$\operatorname{ch}\beta t$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$
2	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	8	$\operatorname{sh}\beta t$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	9	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
4	$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$	10	$e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
5	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	11	$\frac{t^n}{n!}\cos\beta t$	$\frac{\operatorname{Re}((p+\beta i)^{n+1})}{(p^2+\beta^2)^{n+1}}$
6	$\operatorname{sen}\beta t$	$\frac{\;}{p^2+\beta^2}$	12	$\frac{t^n}{n!}\operatorname{sen}\beta t$	$\frac{\operatorname{Im}((p+\beta i)^{n+1})}{(p^2+\beta^2)^{n+1}}$

Aplicando la propiedad de linealidad y la fórmula 6 de la tabla, hallamos:

$$\operatorname{sen}^3 t \doteq \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{p^2+9}=\frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 3. Hállese la representación de las funciones $te^{\alpha t}\times$ $\times\cos\beta t$ y $te^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$.

◀ Empleando las fórmulas 11 y 12 de la tabla para $n=1$ y el teorema de desplazamiento hallamos

$$te^{\alpha t}\cos\beta t \doteq \frac{\operatorname{Re}(((p-\alpha)+\beta i)^2)}{((p-\alpha)^2+\beta^2)^2}=\frac{(p-\alpha)^2-\beta^2}{((p-\alpha)^2+\beta^2)^2},$$

$$te^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \doteq \frac{\operatorname{Im}(((p-\alpha)+\beta i)^2)}{((p-\alpha)^2+\beta^2)^2}=\frac{2\beta(p-\alpha)}{((p-\alpha)^2+\beta^2)^2}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 4. Hállese la representación de la función $\operatorname{Si} t=$ $=\int_0^t \frac{\operatorname{sen}\tau}{\tau}\,d\tau$ (esta función se llama *seno integral*).

◀ Valiéndose del teorema de integración de la representación hallamos

$$\frac{\operatorname{sen} t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{dq}{q^2+1}=\operatorname{arctg} q\Big|_p^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p.$$

e aquí, según el teorema de integración del original obtenemos

$$\text{Si } t = \int_0^t \frac{\operatorname{sen}\tau}{\tau}\, d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p\right). \blacktriangleright$$

EJEMPLO 5. Hállese el original para la función $F(p) = \frac{p}{p^4+4}$.

◀ Primer procedimiento. Descomponemos el denominador en factores:

$$p^4 + 4 = (p^4 + 4p^2 + 4) - 4p^2 = (p^2 + 2p + 2)(p^2 - 2p + 2) = \\ = ((p+1)^2 + 1)((p-1)^2 + 1).$$

Utilizamos el teorema de Borel y la fórmula 10 de la tabla:

$$\frac{1}{(p+1)^2+1} \cdot \frac{1}{(p-1)^2+1} \doteqdot \int_0^t e^{\tau} \operatorname{sen}\tau e^{-(t-\tau)} \operatorname{sen}(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-t} \int_0^t e^{2\tau} (\cos(2\tau - t) - \cos t)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-t} \left(\frac{e^{2\tau}}{2^2+2^2} (2\cos(2\tau - t) + 2\operatorname{sen}(2\tau - t)) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} e^{2\tau} \cos t \right) \Bigg|_{\tau=0}^{t} =$$

$$= \frac{e^t}{8} (\operatorname{sen} t - \cos t) + \frac{e^{-t}}{8} (\operatorname{sen} t + \cos t) = \frac{1}{4} (\operatorname{sen} t \operatorname{ch} t - \cos t \operatorname{sh} t)$$

(en la integración fue empleada dos veces la regla de integración por partes). Apliquemos ahora el teorema de diferenciación del original. En nuestro caso $f(0) = 0$, por eso

$$F(p) = \frac{p}{p^4+4} \doteqdot f'(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \operatorname{sh} t.$$

Segundo procedimiento. Descompongamos el denominador en factores lineales (lo que siempre es posible, si no se tiende a anotar la descomposición en la forma real):

$$p^4 + 4 = ((p+1)^2 + 1)((p-1)^2 + 1) = \\ = (p + 1 + i)(p + 1 - i)(p - 1 + i)(p - 1 - i).$$

Desarrollemos ahora la función dada en fracciones elementales:

$$F(p) = \frac{1}{8} \left(-\frac{i}{p+1+i} + \frac{i}{p+1-i} + \frac{i}{p-1+i} - \frac{i}{p-1-i} \right)$$

y, empleando la fórmula 3 de la tabla, obtenemos

$$f(t) = \frac{i}{8} (-e^{-(1+i)t} + e^{-(1-i)t} + e^{(1-i)t} - e^{(1+i)t} =$$

$$=\frac{i}{8}\left(e^{it}\left(e^{-t}-e^{t}\right)+e^{-it}\left(e^{t}-e^{-t}\right)\right)=-\frac{i}{8}\left(e^{t}-e^{-t}\right)\left(e^{it}-e^{-it}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{1}{2}\operatorname{sh} t \operatorname{sen} t. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 6. Hállese la representación del original $f(t)$, si

$$f(t)=\begin{cases}\operatorname{sen} t & \text{para } 0 \leqslant t<\pi, \\ 0 & \text{para } \quad t \geqslant \pi.\end{cases}$$

◀ Empleando la función de Heaviside y tomando en consideración que $\eta(t-\pi)=1$ para $t \geqslant \pi$, podemos anotar la función $f(t)$ en la forma

$$f(t)=\operatorname{sen} t+\eta(t-\pi) \operatorname{sen}(t-\pi).$$

Utilizando la fórmula 6 de la tabla y aplicando el teorema de retardo obtendremos

$$F(p)=\frac{1}{p^{2}+1}+\frac{e^{-\pi p}}{p^{2}+1}=\frac{1+e^{-\pi p}}{p^{2}+1}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 7. Hállese el original para la función $F(p)=\frac{p}{p^{2}+4}-$
$-\frac{e^{-p}}{p^{2}}-\frac{e^{-2p}}{p^{2}-1}$.

◀ De la tabla de representaciones hallamos $\frac{p}{p^{2}+4} \risingdotseq \cos 2t$, $\frac{1}{p^{2}} \risingdotseq t$, $\frac{1}{p^{2}-1} \risingdotseq \operatorname{sh} t$, y con ayuda del teorema de retardo obtenemos

$$F(p) \risingdotseq f(t)=\cos 2t-\eta(t-1)(t-1)+\eta(t-2) \operatorname{sh}(t-2),$$

es decir,

$$f(t)=\begin{cases}\cos 2t & \text{para } 0 \leqslant t<1, \\ \cos 2t-t+1 & \text{para } 1 \leqslant t<2, \\ \cos 2t-t+1+\operatorname{sh}(t-2) & \text{para } 2 \leqslant t+\infty. \blacktriangleright\end{cases}$$

Hállense las representaciones de las funciones

1.3. $\operatorname{sh}^{3} t$. **1.4.** $\operatorname{ch} t \operatorname{sen} t$.

Hállense las representaciones de las funciones $f(t)$ y $f'(t)$ (hállese la representación de $f'(t)$ aplicando el teorema de diferenciación del original y verifíquese el resultado valiéndose de la tabla de representaciones):

1.5. $f(t)=\operatorname{sen} t-t \cos t$. **1.6.** $f(t)=i \operatorname{sen} t+\cos t$.

1.7. $f(t)=e^{-t} \operatorname{sen}^{2} t$.

1.8. $f(t)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t \operatorname{sen} t+\operatorname{sh} t \cos t)$.

Empleando el teorema de integración de la representación y luego el teorema de integración del original, hállense las representaciones de las funciones:

1.9. $\int\limits_0^t \frac{\operatorname{ch}\tau-1}{\tau}\,d\tau$. **1.10.** $\int\limits_0^t \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,d\tau$. **1.11.** $\int\limits_0^t \frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}\,d\tau$.

Empleando el teorema de integración según el parámetro y luego el teorema de integración del original, hállense las representaciones de las funciones:

1.12. $\int\limits_0^t \frac{\cos\beta\tau-\cos\alpha\tau}{\tau}\,d\tau$. **1.13.** $\int\limits_0^t \frac{e^{\beta\tau}-e^{\alpha\tau}}{\tau}\,d\tau$.

Con ayuda del teorema de Borel y luego los teoremas de diferenciación e integración del original, hállense los originales para las funciones $F(p)$, $pF(p)$ y $\frac{F(p)}{p}$. Verifíquese el resultado empleando el desarrollo en fracciones elementales y la tabla de representaciones.

1.14. $F(p)=\frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)}$. **1.15.** $F(p)=\frac{p}{(p^2+\beta^2)^2}$,

1.16. $F(p)=\frac{p}{(p^2-\alpha^2)(p^2+\beta^2)}$.

1.17. $F(p)=\frac{1}{(p-\alpha)((p+\alpha)^2+\beta^2)}$.

1.18. $F(p)=\frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+2)}$.

Empleando el teorema de retardo, hállense las representaciones de las funciones siguientes:

1.19. $f(t)=\begin{cases} 1 \text{ para } 0\leqslant t<\tau, \\ 0 \text{ para } t\geqslant\tau \end{cases}$

(impulso unitario que actúa en el intervalo de tiempo de $t=0$ a $t=\tau$).

1.20. $f(t)=\begin{cases} 0 \text{ para } t<T, \\ 1 \text{ para } T\leqslant t<T+\tau, \\ 0 \text{ para } t\geqslant T+\tau \end{cases}$

(impulso unitario retardado).

1.21. $f(t)=\begin{cases} \frac{h}{\tau}t & \text{para } 0\leqslant t<\tau, \\ h & \text{para } \tau\leqslant t<2\tau, \\ -\frac{h}{\tau}(t-3\tau) & \text{para } 2\tau\leqslant t<3\tau, \\ 0 & \text{para } t\geqslant 3\tau. \end{cases}$

1.22. $f(t)=\begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{para } 0\leqslant t<\pi/2, \\ \cos t & \text{para } \pi/2\leqslant t<\pi, \\ 0 & \text{para } t\geqslant\pi. \end{cases}$

1.23. $f(t)=\begin{cases} h & \text{para } 0\leqslant t<1, \\ h^{-(t-1)} & \text{para } t\geqslant 1. \end{cases}$

1.24. $f(t)=\begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{para } 0\leqslant t<\pi, \\ \operatorname{sh}(t-\pi) & \text{para } t\geqslant\pi. \end{cases}$

1.25**. Demuéstrese que si $F_0(p) \risingdotseq f_0(t)$, donde

$$f_0(t)=\begin{cases} 0 & \text{para } t<0, \\ f(t) & \text{para } 0\leqslant t<l, \\ 0 & \text{para } t\geqslant l \end{cases}$$

y la función $f(t)$ para $t>l$ es periódica con el período l (es decir, $f(t+l)=f(t)$), entonces

$$f(t) \risingdotseq \frac{F_0(p)}{1-e^{-lp}}.$$

Utilizando el resultado del problema 1.25. y las designaciones adoptadas en este problema, conociendo la función $f_0(t)$ y el período l, hállense las representaciones de las siguientes funciones periódicas $f(t)$:

1.26. $f_0(t)=\begin{cases} 1 & \text{para } 0\leqslant t<\tau \\ 0 & \text{para } \tau\leqslant t<T; \end{cases}$ $l=T$

(sucesión periódica de impulsos unitarios).

1.27*. $f_0(t)=\operatorname{sen}\beta t$ para $0<t<\frac{\pi}{\beta}$; $l=\frac{\pi}{\beta}$ (es decir, $f(t)=|\operatorname{sen}\beta t|$).

1.28. $f_0(t)=\begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{para } 0\leqslant t<\pi \\ 0 & \text{para } \pi\leqslant t<T; \end{cases}$ $l=T$.

1.29. $f_0(t)=\begin{cases} h & \text{para } 0\leqslant t<c, \\ -h & \text{para } c\leqslant t<2c; \end{cases} \quad l=2c$

1.30. $f_0(t)=\frac{h}{c}\,t$ para $0\leqslant t<c;\ l=c.$

1.31. $f_0(t)=\begin{cases} \frac{h}{c}t & \text{para } 0\leqslant t<c. \\ -\frac{h}{c}t & \text{para } c\leqslant t<2c; \end{cases} \quad l=2c.$

1.32. $f_0(t)=\cos\beta t$ para $0\leqslant t<\frac{\pi}{2\beta},\quad l=\frac{\pi}{2\beta}$.

Empleando la tabla de representaciones y el teorema de retardo hállense los originales de $f(t)$ para las representaciones:

1.33. $F(p)=\frac{e^{-2p}}{(p+1)^3}$.

1.34. $F(p)=\frac{1}{p-2}+\frac{e^{-p}}{p}+\frac{3e^{-4p}}{p^2+9}$.

1.35. $F(p)=\frac{p}{p^2+4}-\frac{2pe^{-p}}{p^2-4}+\frac{e^{-3p}}{p^2-16}$.

2. Ampliación de la clase de originales. Se puede ampliar la clase de originales incluyendo las funciones, que pueden ser no acotadas en el entorno del conjunto finito de puntos, pero tales funciones, que la integral de Laplace de ellas converge, sin embargo, absolutamente en cierto semiplano $\operatorname{Re} p>\sigma_0$. Entre tales originales generalizados figuran la función potencial $f(t)=t^{\mu}$ para $\mu>-1$, la función $\ln t$ y otros. En particular, a esta clase pertenece toda función $f(t)$ que en ciertos puntos $t=t_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ es infinitamente grande de orden menor que uno, es decir, tal que $\lim\limits_{t\to t_k}(t-t_k)^{r_k}f(t)=0$ para cierto $r_k<1$ y si fuera de algunos entornos de puntos t_k satisface las condiciones, para las cuales se puede considerar la función como original.

EJEMPLO 8. Hállese la representación $F(p)$ de la función $f(t)=t^{\mu}$, $\mu>-1$.

◀ Tenemos $F(p)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}t^{\mu}\,dt$ o, después de la sustitución $pt=\tau$,

$$F(p)=\frac{1}{p^{\mu+1}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\tau}\tau^{\mu}\,d\tau=\frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}.$$

Así pues

$$\frac{t^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \risingdotseq \frac{1}{p^{\mu+1}}. \blacktriangleright$$

OBSERVACIÓN. Si μ es un número positivo entero, entonces $\Gamma(\mu+1) = \mu!$ y llegamos a la fórmula 2 de la tabla de representaciones.

EJEMPLO 9. Hállese la representación de la función $f(t) = t^{\mu} \ln t$, $\mu > -1$.

◀ De la correspondencia $t^{\mu} \risingdotseq \frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}$ con ayuda de la diferenciación por el parámetro μ obtenemos

$$t^{\mu} \ln t \risingdotseq \frac{\Gamma'(\mu+1)}{p^{\mu+1}} - \frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}} \ln p = \frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}} \left(\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)} - \ln p \right).$$

En particular, poniendo $\mu=0$ y tomando en consideración que $\Gamma(1)=1$, $\Gamma'(1)=-\gamma$ ($\gamma=0{,}577215\ldots$ es la *constante de Euler*) obtenemos

$$\ln t \risingdotseq -\frac{\gamma+\ln p}{p}. \blacktriangleright$$

Háliense las representaciones de las funciones:

1.36. $f(t) = \frac{t^{\mu} e^{\alpha t}}{\Gamma(\mu+1)}$, $\mu > -1$.

1.37. $f(t) = \frac{t^{\mu} e^{\alpha t} \ln t}{\Gamma(\mu+1)}$, $\mu > -1$.

1.38. $f(t) = e^{\alpha t} \ln t$.

1.39. $f(t) = \frac{t^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \cos \beta t$, $\mu > -c$.

1.40. $f(t) = \frac{t^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \operatorname{sen} \beta t$, $\mu > -1$.

1.41. $f(t) = \cos \beta t \cdot \ln t$. **1.42.** $f(t) = \operatorname{sen} \beta t \cdot \ln t$.

1.43. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leqslant t < a, \\ \frac{1}{\sqrt{t-a}} & \text{para } t > a. \end{cases}$

§ 2. Fórmula de inversión. Teoremas del desarrollo

Si la función de la variable real $f(t)$ es original, es decir, $|f(t)| < Me^{(\sigma_0+\varepsilon)t}$ y $f(t)$ es suave a trozos en cada segmento finito del eje real, entonces la relación entre ella y su representación es biunívoca: de la igualdad

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$$

se deduce la fórmula de inversión

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp \quad (\textit{fórmula de Mellin}).$$

En esta fórmula el camino de integración es cualquier recta $\operatorname{Re} p = \sigma$, paralela al eje imaginario y situada más a la derecha que la recta $\operatorname{Re} p = \sigma_0$.

OBSERVACION. En todo punto t_0 que sea un punto de descontinuidad de la función $f(t)$, el segundo miembro de la fórmula de Mellin es igual a $\frac{1}{2}(f(t_0-0)+f(t_0+0))$.

Si la función $F(p)$, analítica en el semiplano $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, satisface las condiciones:

a) $|F(p)| \to 0$ para $|p| \to \infty$ uniformemente respecto a $\arg p \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

b) para todos los $\sigma > \sigma_0$

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} |F(x+iy)|\, dy \leqslant M,$$

entonces $F(p)$ es la representación del original que se determina por la fórmula de Mellin.

La aplicación directa de la fórmula de inversión resulta a menudo dificultosa y por lo general se emplean los teoremas del desarrollo que son corolarios de ella:

PRIMER TEOREMA DEL DESARROLLO. *Si la función $F(p)$ es analítica en cierto entorno de un punto infinitamente alejado y su desarrollo en serie de potencias de $\frac{1}{p}$ tiene la forma*

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}},$$

entonces la función

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, \quad t \geqslant 0 \quad (f(t)=0 \text{ para } t<0)$$

es un original que tiene la representación $F(p)$.

SEGUNDO TEOREMA DEL DESARROLLO. *Si la representación $F(p)$ es una función uniforme y tiene sólo un número finito de puntos singulares $p_1, p_2, \ldots, p_n$ situados en la parte finita del plano, entonces*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\,[e^{pt}F(p);\ p_k].$$

Si, en particular, $F(p)=\dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, donde $P_m(p)$ y $Q_n(p)$ son polinomios de potencias m y n, respectivamente $(n>m)$, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son raíces del polinomio $Q_n(p)$ con multiplicidades iguales a $l_1, l_2, \ldots, l_r$ $(l_1+l_2+\ldots+l_r=n)$, respectivamente, entonces

$$f(t)=\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{(l_k-1)!} \lim_{p\to p_k} \frac{d^{l_k-1}}{dp^{l_k-1}}\left((p-p_k)^{l_k} F(p)\, e^{pt}\right). \tag{1}$$

Si todos los coeficientes de los polinomios $P_m(p)$ y $Q_n(p)$ son números reales, entonces en el segundo miembro de (1) es útil reunir los sumandos pertenecientes a las raíces complejas conjugadas recíprocamente; la suma de cada par de tales términos es igual a la parte real duplicada de uno de ellos.

En el caso particular, cuando todas las raíces $p_1, p_2, \ldots, p_n$ del polinomio $Q_n(p)$ son simples, empleando la fórmula para calcular el residuo respecto al polo de primer orden (véase la pág. 000), obtendremos

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} \frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)}\, e^{p_k t}. \tag{2}$$

EJEMPLO 1. **Hállese el original de la función** $F(p)=\dfrac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}$,

◀ Primer procedimiento. El desarrollo de la función $F(p)$ en el entorno del punto $p=\infty$ tiene la forma

$$F(p)=\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!\,p^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!\,p^{n+1}}.$$

Por eso, en correspondencia con el primer teorema del desarrollo, el original para $F(p)$ es la función $f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^n}{(n!)^2}=I_0(2\sqrt{t})$

(I_0 es la función de Besel de primer género con índice nulo).

Segundo procedimiento. Empleemos el segundo teorema del desarrollo. Con este fin hay que hallar el residuo de la función $\frac{1}{p}e^{pt}e^{-\frac{1}{p}}$ respecto a su único punto singular $p=0$ (éste es un punto esencialmente singular), es decir, el coeficiente de $1/p$ del desarrollo de esta función en serie de Laurent en el entorno del punto $p=0$. Tenemos

$$\frac{1}{p}e^{pt}e^{-\frac{1}{p}}=\left(1+pt+\frac{p^2t^2}{2!}+\ldots+\frac{p^nt^n}{n!}+\ldots\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2!p^3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!p^{n+1}}+\ldots\right).$$

Separando en el producto de las series los términos que contienen $1/p$, hallamos:

$$f(t)=\operatorname{res}\left[\frac{1}{p}e^{pt}e^{-\frac{1}{p}};\,0\right]=1-t+\frac{t^2}{(2!)^2}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n\frac{t^n}{(n!)^2}+\ldots=I_0(2\sqrt{t}).\ \blacktriangleright$$

En este ejemplo, la solución que utiliza el primer teorema del desarrollo resultó ser más simple, que la solución con ayuda del segundo teorema del desarrollo.

EJEMPLO 2. Hállese el original para la función $F(p)=\frac{1}{(p^2+\beta^2)^3}$.

◀ Empleemos el segundo teorema del desarrollo. La función $F(p)$ tiene dos polos de tercer orden $p=\pm\beta i$ y su original se determina por la igualdad

$$f(t)=\operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3};\,\beta i\right]+\operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3};\,-\beta i\right]=$$
$$=2\operatorname{Re}\left(\operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3};\,\beta i\right]\right).$$

Tenemos:

$$\operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^2};\,\beta i\right]=\frac{1}{2!}\lim_{p\to\beta i}\frac{d^2}{dp^2}\left((p-\beta i)^3\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to\beta i}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{(p+\beta i)^3}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to\beta i}\left(\frac{t^2e^{pt}}{(t+\beta i)^3}-\frac{6te^{\beta t}}{(p+\beta i)^4}+\frac{12e^{pt}}{(t+\beta i)^5}\right)=$$
$$=-\frac{t^2e^{\beta it}}{16\beta^3 i}-\frac{3te^{\beta it}}{16\beta^4}+\frac{3e^{\beta it}}{16\beta^5 i}$$

(al diferenciar hicimos uso de la fórmula de Leibniz para la derivada del producto). Separando la parte real de esta expresión y duplicándola, obtendremos

$$f(t)=-\frac{t^2\,\text{sen}\,\beta t}{8\beta^3}-\frac{3t\cos\beta t}{8\beta^4}+\frac{3\,\text{sen}\,\beta t}{8\beta^5}.\ ▶$$

EJEMPLO 3. Hállese el original para la función $F(p)=\frac{1}{p^4-1}$.

◀ Aquí el denominador de la fracción tiene sólo raíces simples $p_{1,2}=\pm 1$, $p_{3,4}=\pm i$. Por eso, en correspondencia con la fórmula (2) obtenemos

$$f(t)=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{4p_k^3}e^{p_k t}=\frac{1}{4}\left(e^t-e^{-t}+\frac{e^{it}}{i^3}+\frac{e^{-it}}{(-i)^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{e^t-e^{-t}}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{1}{2}(\text{sh}\,t-\text{sen}\,t).\ ▶$$

Pudimos resolver este ejemplo partiendo del desarrollo

$$\frac{1}{p^4-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2-1}-\frac{1}{p^2+1}\right).$$

Empleando el primer teorema del desarrollo hállense los originales para las funciones dadas:

2.1. $F(p)=\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}$. **2.2.** $F(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}\,\text{sen}\,\frac{1}{\sqrt{p}}$.

2.3. $F(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}\,\text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{p}}$. **2.4.** $F(p)=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$.

2.5. $F(p)=\frac{1}{2p}\ln\frac{p+1}{p-1}$.

2.6. $F(p)=\frac{1}{p}e^{\frac{1}{p^2}}$. **2.7*.** $F(p)=\frac{1}{p-1}e^{-\frac{1}{p-1}}$.

2.8. ¿Para qué funciones dadas en los problemas 2.1—2.7 se puede aplicar, en la determinación del original, el segundo teorema del desarrollo y para qué funciones no se puede?

Empleando el segundo teorema del desarrollo o desarrollando en fracciones elementales, hállense los originales para las funciones dadas:

2.9. $F(p)=\frac{p}{p^2+4p+5}$.

2.10. $F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

2.11. $F(p)=\frac{Q'(p)}{Q(p)}$ donde $Q(p)=(p-p_1)(p-p_2)\ldots$ $\ldots(p-p_n)$ y todos los números p_k son distintos dos a dos.

2.12. $F(p)=\dfrac{1}{(p^4-1)^2}$. **2.13.** $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2(p^2-4)}$.

2.14. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^4-1)^2}$. **2.15.** $F(p)=\dfrac{p^3}{p^6-1}$.

2.16. $F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2+1)^3}$. **2.17.** $F(p)=\dfrac{1}{p^2-4p+3}$.

2.18. $F(p)=\dfrac{p^2+1}{p^2(p^2-1)^2}$. **2.19.** $F(p)=\dfrac{p}{p^4-5p^2+4}$.

2.20. $F(p)=\dfrac{p^3}{(p^4-1)(p^4+4)}$.

§ 3. Aplicación del cálculo operacional para resolver las ecuaciones diferenciales

1. Resolución de las ecuaciones diferenciales lineales y de los sistemas de ecuaciones con coeficientes constantes. Para hallar la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=f(t) \qquad (1)$$

(donde $f(t)$ es el original) que satisface las condiciones iniciales

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x_0',\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}, \qquad (2)$$

es conveniente aplicar a ambos miembros de esta ecuación la transformación de Laplace, es decir, pasar de la ecuación (1) con las condiciones (2) a la igualdad operacional

$$(p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n)\,X(p)+Q(p)=F(p),$$

donde $X(p)$ es la representación de la solución buscada, $F(p)$ es la representación de la función $f(t)$ y $Q(p)$ es cierto polinomio cuyos coeficientes dependen de los datos iniciales $x_0,\ x_0',\ \ldots,\ x_0^{(n-1)}$ y que es idénticamente igual a cero, si $x_0=x_0'=\ldots=x_0^{(n-1)}=0$. Resolviendo la ecuación operacional respecto a $X(p)$:

$$X(p)=\frac{F(p)-Q(p)}{L(p)}$$

($L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n$ es un polinomio característico de la ecuación dada) y hallando el original para $X(p)$, obtendremos la solución buscada $x(t)$. Si consideramos $x_0,\ x_0',\ \ldots,\ x_0^{(n-1)}$ constantes arbitrarias, la solución encontrada será la solución general de la ecuación (1). De modo análogo se resuelven los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. La diferencia consiste en que en vez de una ecuación operacional obtendremos un sistema de tales ecuaciones, que serán lineales respecto a las representaciones de las funciones buscadas.

EJEMPLO 1. Hállese la solución general de la ecuación $x''+2x'+x=te^{-t}$, así como su solución particular que satisface las condiciones iniciales $x_0=1$, $x_0'=2$.

◀ Sea $x(t)\risingdotseq X(p)$, entonces

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x_0,\quad x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px_0-x_0'.$$

Por la tabla de representaciones hallamos $te^{-t} \risingdotseq \frac{1}{(p+1)^2}$ y la ecuación operacional tiene la forma

$$(p^2+2p+1)\,X(p)-(p+2)\,x_0-x_0'=\frac{1}{(p+1)^2}.$$

De aquí hallamos

$$X(p)=\frac{p+2}{(p+1)^2}\,x_0+\frac{1}{(p+1)^2}\,x_0'+\frac{1}{(p+1)^4}.$$

Para determinar el original en el caso dado lo más fácil es representar $X(p)$ en la forma siguiente:

$$X(p)=\frac{(p+1)+1}{(p+1)^2}\,x_0+\frac{1}{(p+1)^2}\,x_0'+\frac{1}{(p+1)^4}=$$

$$=\frac{1}{(p+1)^4}+\frac{x_0+x_0'}{(p+1)^2}+\frac{x_0}{p+1}.$$

Utilizando la tabla de representaciones, hallamos la solución general

$$x(t)=\frac{1}{3!}\,t^3e^{-t}+(x_0+x_0')\,te^{-t}+x_0e^{-t}.$$

Designando $x_0=C_1$, $x_0+x_0'=C_2$ podemos escribirla así:

$$x(t)=\frac{1}{3}\,t^3e^{-t}+(C_1+C_2t)\,e^{-t}.$$

La solución particular que satisface las condiciones iniciales dadas es:

$$x(t)=\frac{1}{3}\,t^3e^{-t}+(1+3t)\,e^{-t}.\ \blacktriangleright$$

EJEMPLO 2. Intégrese la ecuación $x''+x=f(t)$ para las condiciones iniciales nulas, si

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\,t & \text{para } 0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2},\\[2mm] \dfrac{2}{\pi}(\pi-t) & \text{para } \dfrac{\pi}{2}\leqslant t<\pi,\\[2mm] 0 & \text{para } t\geqslant\pi.\end{cases}$$

◀ Anotemos $f(t)$ con ayuda de la función unitaria de Heaviside:

$$f(t)=\left(1-\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)\frac{2}{\pi}\,t-\left(\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\eta(t-\pi)\right)\times$$

$$\times\frac{2}{\pi}(t-\pi)=\frac{2}{\pi}\left(t-2\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\eta(t-\pi)(t-\pi)\right).$$

Valiéndose del teorema de retardo, de aquí hallamos

$$f(t)\risingdotseq F(p)=\frac{2}{\pi}\,\frac{1-2e^{-\frac{\pi}{2}p}+e^{-\pi p}}{p^2}.$$

Ya que las condiciones iniciales son nulas, entonces, suponiendo $x(t) \risingdotseq X(p)$, llegamos a la ecuación operacional

$$(p^2+1)\,X(p)=\frac{2}{\pi}\,\frac{1-2e^{-\frac{\pi}{2}p}+e^{-\pi p}}{p^2},$$

a partir de la cual, después de las transformaciones elementales, hallamos

$$X(p)=\frac{2}{\pi}\left(1-2e^{-\frac{\pi}{2}p}+e^{-\pi p}\right)\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+1}\right).$$

Puesto que $\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+1} \risingdotseq t-\operatorname{sen} t$, entonces, aplicando de nuevo el teorema de retardo, hallamos

$$x(t)=\frac{2}{\pi}\left((t-\operatorname{sen} t)-2\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\eta(t-\pi)\left((t-\pi)-\operatorname{sen}(t-\pi)\right)\right),$$

es decir,

$$x(t)=\begin{cases} \frac{2}{\pi}(t-\operatorname{sen} t) & \text{para } 0\leqslant t<\frac{\pi}{2}, \\ \frac{2}{\pi}(-\operatorname{sen} t-2\cos t-t+\pi) & \text{para } \frac{\pi}{2}\leqslant t<\pi, \\ -\frac{4}{\pi}\cos t & \text{para } t\geqslant\pi. \blacktriangleright \end{cases}$$

EJEMPLO 3. Hállese la solución del sistema

$$x'+y=e^t,$$
$$x+y'=e^{-t}$$

para las condiciones iniciales $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$.

◀ Sean $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$, entonces $x'(t) \risingdotseq pX(p)-x_0$, $y'(t) \risingdotseq pY(p)-y_0$ y obtenemos el sistema operacional

$$pX(p)-x_0+Y(p)=\frac{1}{p-1},$$

$$pY(p)-y_0+X(p)=\frac{1}{p+1}.$$

Resolviendo el sistema, hallamos

$$X(p)=\frac{p}{p^2-1}x_0-\frac{1}{p^2-1}y_0+\frac{p^2+1}{(p^2-1)^2},$$

$$Y(p)=\frac{p}{p^2-1}y_0+\frac{1-x_0}{p^2-1}-\frac{2p}{(p^2-1)^2}$$

y, por consiguiente,

$$\begin{cases} x(t)=x_0\operatorname{ch} t-y_0\operatorname{sh} t+t\operatorname{ch} t, \\ y(t)=y_0\operatorname{ch} t+(1-x_0)\operatorname{sh} t-t\operatorname{sh} t. \blacktriangleright \end{cases}$$

Hállense las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales:

3.1. $x'' + 9x = \cos 3t$. **3.2.** $x'' - 4x' + 4x = e^{2t}$.
3.3. $x'' + 2x' = te^{2t}$. **3.4.** $x'' + x' - 2x = e^{t}$.
3.5. $x'' + x' = e^{-t} \operatorname{sen} t$.

Hállense las soluciones de las ecuaciones diferenciales para las condiciones iniciales dadas:

3.6. $x''' + x = 0$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 2$.
3.7. $x'' + 2x' + x = e^{-t}$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
3.8. $x'' + 3x' = e^{-3t}$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.
3.9. $x'' - 2x' + 2x = \operatorname{sen} t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
3.10. $x'' + 4x = \operatorname{sen} 2t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$.
3.11. $x'' - 9x = \operatorname{sh} t$; $x(0) = -1$, $x'(0) = 3$.
3.12. $x''' - x'' = e^{t}$; $x(0) = 1$, $x'(0) = x''(0) = 0$.
3.13. $x^{\mathrm{IV}} - x = \operatorname{sh} t$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, $x'''(0) = 1$.

3.14. $x''' + 3x'' + 3x' + x = te^{-t}$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Hállense para las condiciones iniciales nulas las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

3.15. $x' + x = f(t)$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leqslant t < 2, \\ 0 & \text{para } t \geqslant 2. \end{cases}$$

3.16. $x'' + x = f(t)$, donde

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{para } 0 \leqslant t < \pi, \\ 0 & \text{para } t \geqslant \pi. \end{cases}$$

3.17. $x'' - x' = f(t)$, donde

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{para } 0 \leqslant t < 1, \\ 0 & \text{para } t \geqslant 1. \end{cases}$$

3.18. $x'' + x = f(t)$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leqslant t < 1, \\ -1 & \text{para } 1 \leqslant t < 2, \\ 0 & \text{para } t \geqslant 2. \end{cases}$$

3.19*. Resuélvase la ecuación integral $\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau + x(t) = f(t)$, donde

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \leqslant t < 1, \\ 2 - t & \text{para } 1 \leqslant t < 2, \\ 0 & \text{para } \quad t \geqslant 2. \end{cases}$$

3.20*. Con ayuda de la integral de Duhamel demuéstrese la siguiente afirmación: si $x_1(t)$ es la solución de la ecuación $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 1$ para las condiciones iniciales nulas ($x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0$), entonces la solución de la ecuación $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(t)$ para las mismas condiciones iniciales es la función

$$x(t) = \int\limits_0^t x'(\tau) f(t-\tau)\,d\tau = x_1(t) f(0) + \int\limits_0^t f'(\tau) x_1(t-\tau)\,d\tau$$

($f(t)$ es un original arbitrario).

OBSERVACION. El resultado del problema 3.20 permite determinar la solución de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes para las condiciones iniciales nulas, sin hallar la representación del segundo miembro de esta ecuación.

Empleando el resultado del problema 3.20, hállense las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

3.21. $x' - x = \dfrac{1}{e^t + 3}$. **3.22.** $x'' + x = \dfrac{1}{1 + e^t}$.

3.23. $x'' - x' = \dfrac{1}{1 + e^t}$. **3.24.** $x'' + x = \dfrac{1}{2 + \cos t}$.

3.25. $x'' + x = e^{-t^2}$.

Hállense las soluciones generales de los sistemas de ecuaciones diferenciales:

3.26. $\begin{aligned} x'' + y' &= t, \\ y'' - x' &= 0. \end{aligned}$ **3.27.** $\begin{aligned} x'' + y' &= \operatorname{sh} t - \operatorname{sen} t, \\ y'' + x' &= \operatorname{ch} t - \cos t. \end{aligned}$

Hállense las soluciones de los sistemas de las ecuaciones diferenciales para las condiciones iniciales dadas.

3.28. $\begin{aligned} x' + y &= 0, \\ + y' &= 0; \end{aligned}$ $\quad x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

3.29. $2x'' + x - y' = -3 \operatorname{sen} t,$

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 1,$$

$x + y' = -\operatorname{sen} t;\quad y(0) = 0.$

3.30. $x'' - y' = 0,$

$x - y'' = 2 \operatorname{sen} t;$

$$x(0) = -1,\ x'(0) - y(0) = y'(0) = 1.$$

3.31. $x'' - y' = 0,$

$$x(0) = y'(0) = 0,\quad x'(0) =$$

$x' - y'' = 2 \cos t;\ = y(0) = 2.$

3.32. $x'' - y' = e^t,$

$$x(0) = 1,\ y(0) = -1,$$

$x' + y'' - y = 0;\quad x'(0) = y'(0) = 0.$

3.33. $x'' + y' = 2 \operatorname{sen} t,$

$y'' + z' = 2 \cos t,$

$z'' - x = 0;$

$$x(0) = z(0) = y'(0) = 0,\ x'(0) = y(0) = -1,\ z'(0) = 1.$$

Intégrense para las condiciones iniciales nulas los sistemas de ecuaciones diferenciales:

3.34. $x'' - y' = f_1(t),$

$y' + x = f_2(t),$

donde $f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leqslant t < \pi, \\ 0 & \text{para } t \geqslant \pi, \end{cases}$

$$f_2(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \leqslant t < \pi/2, \\ \pi - t & \text{para } \pi/2 \leqslant t < \pi, \\ 0 & \text{para } t \geqslant \pi. \end{cases}$$

3.35. $x'' - y = 0,$

$y'' - x = f(t),$

donde $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leqslant t < \pi, \\ -1 & \text{para } \pi \leqslant t < 2\pi, \\ 0 & \text{para } t \geqslant 2\pi. \end{cases}$

2. Cálculo de los circuitos eléctricos. Aplicando los métodos del cálculo operacional es cómodo resolver los problemas referentes al cálculo de los circuitos eléctricos.

EJEMPLO 4. Al circuito eléctrico en el cual están conectadas en serie la autoinducción L y la resistencia R, está aplicada una fuerza electromotriz periódica de período T: $u(t) = at$ $(0 \leqslant t < T)$ (fig. 112). Determínese la condición inicial $i(0) = i_0$ de tal modo, que en el circuito surja la corriente periódica.

◀ Según la segunda ley de Kirchhoff hallamos:

$$Li'(t)+Ri(t)=u(t) \quad \text{ó} \quad i'(t)+ki(t)=\frac{1}{L}u(t), \quad k=\frac{R}{L}.$$

Con ayuda de la función unitaria de Heaviside escribamos $u_0(t)$ (el valor de $u(t)$ en el período inicial $[0, T)$):
$u_0(t)=(1-\eta(t-T))\,at=at-a\eta(t-T)(t-T)-aT\eta(t-T)$
De aquí por el teorema de retardo tenemos $u_0(t) \risingdotseq U_0(p)=$

$=\dfrac{a(1-e^{-pT})}{p^2}-\dfrac{aT}{p}e^{-pT}$. Aplicando la fórmula de la representación de la función periódica (véase el problema 1.25), hallamos

$$u(t) \risingdotseq U(p)=\frac{U_0(p)}{1-e^{-pT}}=$$

$$=\frac{a}{p^2}-\frac{aT}{p}\,\frac{e^{-pT}}{1-e^{-pT}}.$$

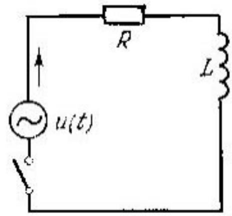


Fig. 112

Pasamos a la ecuación operacional poniendo $i(t) \risingdotseq I(p)$, $i'(t) \risingdotseq pI(p)-i_0$:

$$(p+k)\,I(p)=i_0+\frac{a}{Lp^2}-\frac{aT}{Lp}\,\frac{e^{-pT}}{1-e^{-pT}},$$

de donde

$$I(p)=\frac{i_0}{p+k}+\frac{a}{Lp^2(a+k)}-\frac{aT}{Lp(p+k)}\,\frac{e^{-pT}}{1-e^{-pT}}.$$

Anotemos $I(p)$ en la forma siguiente:

$$I(p)=\frac{F(p)}{1-e^{-pT}}, \text{ donde } F(p)=\frac{i_0(1-e^{-pT})}{p+k}+$$

$$+\frac{a(1-e^{-pT})}{Lp^2(p+k)}-\frac{aTe^{-pT}}{Lp(p+k)}.$$

Para que la corriente en el circuito sea periódica, con un período T, es necesario que el original de la función $F(p) \risingdotseq f(t)$ tenga la forma

$$f(t)=\begin{cases} f_0(t) & \text{para } 0 \leqslant t < T, \\ 0 & \text{para } \quad t \geqslant T. \end{cases}$$

Pero para $0 \leqslant t < T$

$$f_0(t) \risingdotseq \frac{i_0}{p+k}+\frac{a}{Lp^2(p+k)}.$$

Ya que

$$\frac{1}{p^2(p+k)}=\frac{1}{kp^2}+\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{p+k}-\frac{1}{p}\right) \risingdotseq \frac{t}{k}+\frac{1}{k^2}(e^{-kt}-1),$$

entonces

$$f_0(t) = i_0 e^{-kt} + \frac{at}{Lk} + \frac{a}{Lk^2}(e^{-kt}-1).$$

Para $t \geqslant T$, valiéndose del teorema de retardo, hallamos:

$$f(t) = i_0 (e^{-kt} - e^{-k(t-T)}) + \frac{a(t-(t-T))}{Lk} +$$

$$+ \frac{a}{Lk^2}((e^{-kt}-1)-(e^{-k(t-T)}-1)) - \frac{aT}{Lk}(1-e^{-k(t-T)}) =$$

$$= e^{-kt}\left(i_0(1-e^{kT}) + \frac{a}{Lk^2}(1-e^{kT}) + \frac{aT}{Lk}e^{kT}\right).$$

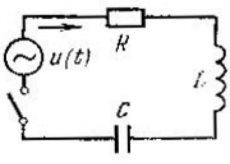


Fig. 113

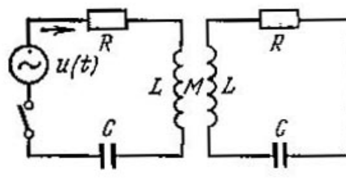


Fig. 114

Pero aquí $f(t) = 0$, por eso

$$i_0 = -\frac{a}{Lk^2}\,\frac{kTe^{kT}+1-e^{kT}}{1-e^{kT}} = -\frac{a}{kL^2} + \frac{1}{Lk}\,\frac{aT}{1-e^{-kT}}.$$

De este modo, sustituyendo el valor de i_0 en $f_0(t)$, hallamos:

$$f_0(t) = \frac{a}{Lk^2}\left(\frac{kTe^{-kt}}{1-e^{-kT}} - e^{-kt} + kt + e^{-kt} - 1\right) =$$

$$= \frac{aT}{Lk}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{kT} + \frac{e^{-kt}}{1-e^{-kT}}\right).$$

Este es el valor buscado de la corriente periódica (del período T) en el intervalo $0 \leqslant t < T$. ▶

3.36. Al circuito eléctrico en el cual están conectadas en serie la autoinducción L, la resistencia R y la capacidad C con corriente inicial y carga iguales a cero, está aplicada la fuerza electromotriz $u(t)$ igual a E_1 para $0 \leqslant t \leqslant T$ y E_2 para $t > T$ (E_1, E_2, T son constantes). Hállese la corriente en el circuito (fig. 113).

3.37. Dos circuitos eléctricos iguales que constan de una autoinducción L, una resistencia R y una capacidad C, conectadas en serie, están acoplados por la inducción mutua M. Las corrientes y cargas iniciales son nulas. A uno de los circuitos en el momento de tiempo $t=0$ se aplica la f.e.m. constante E_0. Hállense las corrientes en ambos circuitos (fig. 114).

3. Integración de las ecuaciones lineales en derivadas parciales. Analicemos la aplicación de los métodos operacionales para integrar las ecuaciones lineales en derivadas parciales a base de un ejemplo.

EJEMPLO 5. Hállese la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+z=$ $=\operatorname{sen} x\cos y$ que satisface las condiciones $z(0, y)=\operatorname{sen} y$, $z(x, 0)=$ $=0$ $(x\in[0, +\infty),\ y\in[0, +\infty))$.

◀ Pasemos a la ecuación operacional respecto al argumento y, poniendo $z(x, y)\risingdotseq Z(x, p)$. De aquí

$$\frac{\partial z}{\partial y}\risingdotseq pZ(x, p)-z(x, 0)=pZ(x, p),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\risingdotseq\frac{\partial}{\partial x}(pZ(x, p))=pZ'_x(x, p)$$

(según el teorema sobre la diferenciación de las relaciones operacionales por el parámetro). Obtenemos la ecuación operacional:

$$pZ'_x(x, p)+Z(x, p)=\frac{p\operatorname{sen} x}{p^2+1}\left(\text{ya que }\cos y\risingdotseq\frac{p}{p^2+1}\right).$$

Integrando la ecuación diferencial obtenida respecto al argumento x, hallamos

$$Z(x, p)=C_1(p)\,e^{-\frac{x}{p}}+\frac{p}{(p^2+1)^2}\operatorname{sen} x-\frac{p^2}{(p^2+1)^2}\cos x.$$

En virtud de la condición inicial $Z(x, 0)=0$ y del teorema de conexión del valor inicial del original con el valor final de la representación, debemos tener $\lim\limits_{p\to\infty} pZ(x, p)=Z(x, 0)=0$, de donde hallamos $\lim\limits_{p\to\infty} pC_1(p)=0$, además, si $C_1(p)\risingdotseq\varphi(y)$, entonces $\varphi(0)=0$ (en virtud del mismo teorema). Anotemos ahora $Z(x, p)$ en la forma siguiente:

$$Z(x, p)=pC_1(p)\frac{1}{p}e^{-\frac{x}{p}}+\frac{p}{(p^2+1)^2}\operatorname{sen} x-\frac{1}{2}\times$$
$$\times\frac{(p^2+1)(p^2-1)}{(p^2+1)^2}\cos x.$$

Pero, como

$$pC_1(p)\risingdotseq\varphi'(y),\ \frac{1}{p}e^{-\frac{x}{p}}\risingdotseq I_0(2\sqrt{xy})$$

(véase la solución del ejemplo 1 del § 2).

$$\frac{p}{(p^2+1)^2} \fallingdotseq \frac{1}{2}\, y \text{ sen } y, \quad \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} \fallingdotseq y \text{ sen } y,$$

entonces hallamos:

$$z(x,\ y) = \int_0^y \varphi'(t)\, I_0\left(2\sqrt{x(y-t)}\right) dt + \frac{1}{2}\, y \text{ sen } y \text{ sen } x -$$

$$-\frac{1}{2}(\text{sen } y + y \cos y)\cos x = \int_0^y \varphi'(t)\, I_0\left(2\sqrt{x(y-t)}\right) dt -$$

$$-\frac{1}{2}\text{ sen } y \cos x - \frac{1}{2}\, y \cos(x+y)$$

(el primer sumando se obtuvo por el teorema de convolución de los originales). Ya que $I_0(0) = 1$, entonces, poniendo $x = 0$, hallamos:

$$z(0,\ y) = \int_0^y \varphi'(t)\, dt - \frac{1}{2}\text{ sen } y - \frac{1}{2}\, y \cos y =$$

$$= \varphi(y) - \frac{1}{2}\text{ sen } y - \frac{1}{2}\, y \cos y = \text{sen } y$$

(según las condiciones iniciales); por eso $\varphi(y) = \frac{3}{2}\text{ sen } y + \frac{1}{2}\, y \cos y$, $\varphi'(t) = 2\cos y - \frac{1}{2}\, y \text{ sen } y$, y hallamos definitivamente

$$z(x,\ y) = \int_0^y \left(2\cos t - \frac{1}{2}\, t \text{ sen } t\right) I_0\left(2\sqrt{x(y-t)}\right) dt -$$

$$-\frac{1}{2}\text{ sen } y \cos x - \frac{1}{2}\, y \cos(x+y). \blacktriangleright$$

Intégrense las siguientes ecuaciones lineales en derivadas parciales:

3.38. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = \cos x;\ z(0,\ y) = y,\ z'_x(0,\ y) = 0.$

3.39. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} - a^2 z = f(x);\ z(0,\ y) = -y,\ z'_x(0,\ y) = 0.$

§ 4. Funciones impulsivas

1. Función impulsiva de primer orden $\delta(t)$. Definamos la *δ-función de Dirac* como límite para $h \to 0$ de la función

$$\delta_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant h, \\ 0 & \text{para } -\infty < t < 0 \text{ y } h < t < +\infty \end{cases} \tag{1}$$

(fig. 115). El efecto sumario de la acción de esta función, llamado tam-

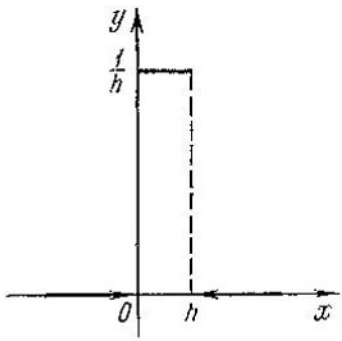


Fig. 115

bién su *intensidad*, es igual a la unidad, es decir,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(t)\,dt = 1.$$

Ponemos

$$\delta(t) = \lim_{h \to \infty} \delta_h(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \neq 0, \\ +\infty & \text{para } t = 0, \end{cases}$$

además

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1.$$

Se puede determinar la δ-función también con ayuda del límite para $h \to 0$ de la función

$$\delta_h^*(t) = \begin{cases} -\frac{1}{h^2}(t-h) & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant h, \\ 0 & \text{para } h < t < +\infty, \\ \delta_h^*(-t) & \text{para } -\infty < t < 0 \end{cases} \tag{2}$$

(fig. 116) para la cual se verifica también

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h^*(t)\,dt = 1.$$

Las propiedades de la función impulsiva $\delta(t)$ son:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-\tau)\,dt = f(\tau).$

2. $\int_{a}^{T} \delta(t)\,dt = \eta(T) - \eta(a).$

Aquí $\eta(t)$ es la función unitaria de Heaviside, considerada como el

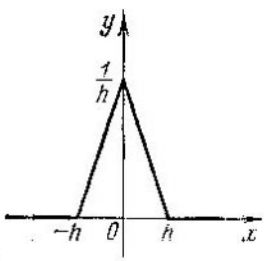


Fig. 116

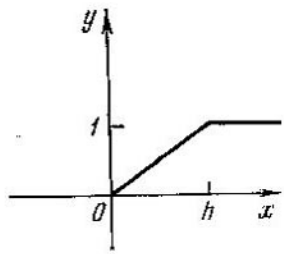


Fig. 117

límite para $h \to 0$ de la función $\eta_h(t)$, donde

$$\eta_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}t & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant h, \\ 1 & \text{para } h < t < +\infty, \\ 0 & \text{para } -\infty < t < 0 \end{cases}$$

(fig. 117). En este sentido podemos considerar, que $\delta(t) = \eta'(t)$.

3. $\delta(-t) = \delta(t)$.

4. $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t)$.

5. Si $f(t) = 0$ para $t = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ y $f'(a_k) \neq 0$ (todas las raíces de $f(t)$ son simples), entonces

$$\delta(f(t)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta(t - a_k)}{|f'(a_k)|}.$$

2. Función impulsiva de segundo orden $\delta_1(t)$. La función $\delta_1(t)$ puede ser determinada como límite para $h \to 0$ de la derivada de la función $\delta_h^*(t-h)$ determinada en (2), es decir,

$$\delta_{1,h}^*(t) = (\delta_h^*(t-h))' = \begin{cases} \dfrac{1}{h^2} & \text{para } 0 \leqslant t < h, \\ -\dfrac{1}{h^2} & \text{para } h \leqslant t < 2h, \\ 0 & \text{para} -\infty < t < 0 \text{ y } 2h \leqslant t < +\infty; \end{cases}$$

$\delta_1(t)$ satisface las condiciones:

1. $\delta_1(t) = 0$ para $t \neq 0$.
2. $\delta_1(-0) = +\infty$, $\delta_1(+0) = -\infty$.
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \delta_1(\tau)\,d\tau = \delta(t), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_1(t)\,dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{t} \delta_1(\tau)\,d\tau = 1.$

3. Representaciones de las funciones impulsivas y sus aplicaciones. Por representación de la función $\delta(t)$ se comprenderá el límite de la representación bien de la función $\delta_h(t)$, o bien de la función $\delta_h^*(t-h)$ para $h \to 0$. En el primer caso la representación para $\delta_h'(t)$ se halla directamente, en el segundo caso la representación para $\delta_h^*(t-h)$ se halla a partir de la representación de su derivada $(\delta_h^*(t-h))_t' = \delta_{1,h}(t)$ De hecho tenemos

$$\delta_h(t) = \frac{\eta(t) - \eta(t-h)}{h}$$

y

$$\delta_{1,h}(t) = (\delta_h^*(t-h))_t' = \frac{\eta(t) - 2\eta(t-h) + \eta(t-2h)}{h^2}.$$

Por eso,

$$\delta_h(t) \risingdotseq \frac{1}{h}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-ph}\right) = \frac{1-e^{-ph}}{ph}$$

y

$$\delta_{1,h}(t) \risingdotseq \frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{p} - \frac{2e^{-ph}}{p} + \frac{e^{-2ph}}{p}\right) = \frac{(1-e^{-ph})^2}{ph^2}.$$

De estas expresiones hallamos que

$$\delta(t) \risingdotseq \lim_{h \to 0} \frac{1-e^{-ph}}{ph} = 1$$

y

$$\delta_1(t) \risingdotseq \lim_{h \to 0} \frac{(1-e^{-ph})^2}{ph^2} = p.$$

Citemos ejemplos de aplicación de las funciones impulsivas.

EJEMPLO 1 Intégrese la ecuación $x''(t)=\delta(t)$ para las condiciones iniciales nulas. Explíquese el resultado.

◀ Formamos la ecuación operacional $p^2X(p)=1$, de donde $X(p)=\frac{1}{p^2}$ y $x(t)=t$. Así pues, la función impulsiva de primer orden comunica al punto material de la masa unidad el movimiento rectilíneo uniforme con velocidad unitaria. ▶

EJEMPLO 2 Intégrese la ecuación $x''(t)=\delta_1(t)$ para las condiciones iniciales nulas.

◀ Formamos la ecuación operacional $p^2X(p)=p$, de donde $X(p)=\frac{1}{p}$ y $x(t)=1$ $(t>0)$. De este modo, la función impulsiva de segundo orden comunica al punto material de la masa unidad un desplazamiento instantáneo en una unidad de longitud sin movimiento posterior. ▶

Intégrense las siguientes ecuaciones diferenciales:

4.1. $x''+\omega^2x=v_0\delta(t)$ para las condiciones iniciales nulas.

4.2. $x''+\omega^2x=v_1\delta(t-\tau)+h\delta_1(t-\tau_1)$; $x(0)=x_0$, $x'(0)=x_0'$.

4.3. $x''+\omega^2x=A$ sen $\omega t+B\cos\omega t\cdot\delta(t-\tau)$ para las condiciones iniciales arbitrarias.

4.4.** $x''=v_0\delta(\text{sen}\,\omega t)$ para las condiciones iniciales nulas.

§ 5. Aplicaciones del cálculo operacional a la resolución de las ecuaciones integrales e integrales diferenciales, al cálculo de las integrales impropias y a la sumación de las series

1. Resolución de las ecuaciones integrales e integrales diferenciales. Aplicando el teorema de convolución es fácil hallar las representaciones de las soluciones de las ecuaciones integrales de Volterra de primera y segunda especie (y en los casos más simples, con ayuda de la representación encontrada, también se puede hallar la propia solución), cuando de núcleo en la ecuación correspondiente sirve la función de tipo $K(t-\tau)$, donde $K(t)$ es el original. Este método es aplicable también a las ecuaciones integrales diferenciales con el mismo núcleo.

EJEMPLO 1. Hállese la solución de *la ecuación de Volterra* de primera especie

$$\int_0^t \cos(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau=t\cos t.$$

◀ Sea $x(t) \risingdotseq X(p)$; ya que

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}, \quad t\cos t \risingdotseq \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2},$$

$$\int_0^t \cos(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{pX(p)}{p^2+1}$$

(según el teorema de convolución), entonces llegamos a la ecuación operacional

$$\frac{pX(p)}{p^2+1} = \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2},$$

de donde

$$X(p)\,\frac{p^2-1}{p(p^2+1)} = \frac{2p}{p^2+1} - \frac{1}{p}.$$

De este modo, $x(t) = 2\cos t - 1$. ▶

EJEMPLO 2. Hállese la solución de la ecuación $x'' + x = \operatorname{sen} t + \int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau$ para las condiciones iniciales $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

◀ Suponiendo $x(t) \risingdotseq X(p)$, tenemos

$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - 1, \quad \operatorname{sen} t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1},$$

$$\int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{X(p)}{p^2+1}.$$

Obtenemos la ecuación operacional

$$(p^2+1)\,X(p) - 1 = \frac{1}{p^2+1} + \frac{X(p)}{p^2+1}$$

ó

$$((p^2+1)^2-1)\,X(p) = p^2+2.$$

De aquí hallamos $X(p) = \dfrac{1}{p^2}$ y $x(t) = t$. ▶

Resuélvanse las siguientes ecuaciones integrales e integrales diferenciales:

5.1. $\displaystyle\int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = \operatorname{ch} t - \cos t.$

5.2. $\displaystyle 3\int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = x(t) - e^{-t}.$

5.3. $\int\limits_0^t e^{t-\tau} \operatorname{sen}(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = x'' - x' + e^t (1 - \cos t);$

$x(0) = x'(0) = 1.$

5.4. $\int\limits_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = x'' - x' + \frac{1}{2} t \operatorname{sh} t; \quad x(0) = 1,$

$x'(0) = 0.$

Intégrense *las ecuaciones de Abel*:

5.5. $\int\limits_0^t \frac{x(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \pi.$

5.6. $\int\limits_0^t \frac{x(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = t^{\beta},\ 0 \leqslant \alpha < 1,\ \beta > -1.$

2. Cálculo de las integrales impropias. Uno de los procedimientos para calcular las integrales impropias del tipo $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\, dt$ está basado en la aplicación del teorema del cálculo operacional sobre la conexión del valor «final» del original y el valor «inicial» de la representación: si $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$ y existe el límite finito $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = \varphi(+\infty)$, entonces $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = \varphi(+\infty) = \lim\limits_{p \to 0} p\Phi(p)$ (véase el § 1, la propiedad 12, b)).

A partir de este teorema y de la relación

$$\int\limits_0^t f(t)\, dt = \frac{1}{p} F(p) \qquad (f(t) \risingdotseq F(p)),$$

si la integral $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, se deduce la relación

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t)\, dt = F(0). \tag{1}$$

EJEMPLO 3. Calcúlese la integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt.$

◀ Ya que sen $t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$, entonces según el teorema de la integración de la representación tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} t}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty} \frac{dq}{q^2+1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p,$$

por eso, según la fórmula (1), hallamos

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t\, dt}{t} = \frac{\pi}{2}. \ ▶$$

Sean las funciones $f(t, u)$ y $\psi(t) = \int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u)\, du$ los originales y $f(t, u) \risingdotseq F(p, u)$. Entonces, aplicando el teorema sobre la integración según el parámetro tendremos

$$\psi(t) \risingdotseq \Psi(p) = \int_0^{+\infty} \varphi(u) F(p, u)\, du.$$

Por eso, si se puede calcular la integral que determina $\Psi(p)$, entonces para determinar la integral $\int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u)\, du$ es suficiente hallar el original para $\Psi(p)$, es decir,

$$\int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u)\, du \risingdotseq \int_0^{+\infty} \varphi(u) F(p, u)\, du. \qquad (2)$$

EJEMPLO 4. Calcúlese la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu\, du}{\alpha^2+u^2}$.

◀ Tenemos $\cos tu \risingdotseq \frac{p}{p^2+u^2}$. Por eso (por la fórmula (2))

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu\, du}{\alpha^2+u^2} \risingdotseq \int_0^{+\infty} \frac{p\, du}{(p^2+u^2)(\alpha^2+u^2)} = \frac{p}{p^2-\alpha^2} \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} \left(\frac{du}{\alpha^2+u^2} - \frac{du}{p^2+u^2}\right) = \frac{p}{p^2-\alpha^2} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}\right) = \frac{\pi}{2\alpha} \frac{1}{p+\alpha}.$$

Pero $\frac{1}{p+\alpha} \doteqdot e^{-\alpha t}$. De aquí

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu\, du}{\alpha^2+u^2} = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha t}. \blacktriangleright$$

Un procedimiento más de cálculo de las integrales impropias mediante el cálculo operacional nos da el

TEOREMA DE PARSEVAL. *Si $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$ y las funciones $F_1(p)$ $F_2(p)$ son analíticas para $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, entonces*

$$\int_0^{+\infty} f_1(u) F_2(u)\, du = \int_0^{+\infty} F_1(v) f_2(v)\, dv. \tag{3}$$

En este caso de la convergencia de una de estas integrales se desprende la convergencia de la otra [1].

EJEMPLO 5. Calcúlese $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u}\operatorname{sen}\beta u}{u}\, du$, $\alpha > 0$.

◀ Tenemos $e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \doteqdot \frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$, $\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p}$. Poniendo $f_1(u) = e^{-\alpha u}\operatorname{sen}\beta u$, $F_2(u) = \frac{1}{u}$, tenemos

$$F_1(v) = \frac{\beta}{(v+\alpha)^2+\beta^2}, \quad f_2(v) = \eta(v).$$

Por eso según la fórmula (3)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u}\operatorname{sen}\beta u\, du}{u} = \int_0^{+\infty} \frac{\beta\eta(v)\, dv}{(v+\alpha)^2+\beta^2} = \beta \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(v+\alpha)^2+\beta^2}$$

($\eta(v) = 1$, ya que $v > 0$). Pero

$$\beta \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(v+\alpha)^2+\beta^2} = \operatorname{arctg} \frac{v+\alpha}{\beta}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}.$$

De este modo

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u}\operatorname{sen}\beta u\, du}{u} = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0. \blacktriangleright$$

---

[1] Si para una de las funciones $F_1(p)$ o $F_2(p)$ la condición de la analiticidad se cumple sólo para $\operatorname{Re} p > 0$, entonces la convergencia de una de las integrales puede no tener lugar.

Calcúlense las integrales impropias empleando la fórmula (1):

$$5.7.\quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}\cos\gamma t}{t}\,dt,\ \alpha,\ \beta>0.$$

$$5.8^*.\quad \int_0^{+\infty} t^{\mu}e^{-\alpha t}\ln t\,dt,\ \alpha>0,\ \mu>-1.$$

Calcúlense las integrales impropias, empleando la fórmula (2):

$$5.9.\quad \int_0^{+\infty} \frac{u\,\operatorname{sen} tu\,du}{u^2+\alpha^2}.\qquad 5.10.\quad \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\,du.$$

Calcúlense las integrales impropias empleando el teorema de Parseval (fórmula (3)):

$$5.11.\quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u}-e^{-\beta u}}{\sqrt{u}}\,du,\ \alpha,\ \beta>0.$$

$$5.12.\quad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha u-\operatorname{sen}\beta u}{u\sqrt{u}}\,du,\ \alpha,\ \beta>0.$$

$$5.13^*.\quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx,\ \alpha,\ \beta>0.$$

3. Sumación de las series. Los métodos de cálculo operacional pueden ser aplicados sumando las series numéricas y funcionales.

EJEMPLO 6. Sea $f(t) \risingdotseq F(p)$ (la región de analiticidad $F(p)$ es $\operatorname{Re} p \geqslant k$). Demuéstrese que la suma S de la serie $\sum\limits_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n F(n)$ puede ser hallada según la fórmula

$$S=(\pm 1)^k \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}f(t)\,dt}{1\pm e^{-t}}. \tag{4}$$

◀ Según la condición $F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,dt$. Tenemos:

$$\frac{(\pm 1)^k e^{-kt}}{1\pm e^{-t}}=\sum_{n=k}^{\infty}(\pm 1)^n e^{-nt}.$$ Por eso

$$(\pm 1)^k \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt} f(t)\,dt}{1 \pm e^{-t}} = \int_0^{+\infty} f(t) \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt}\,dt =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\,dt = \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n F(n). \blacktriangleright$$

Empleando la fórmula (4) hállense las sumas de las siguientes series numéricas:

5.14.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)^2}$.

5.15.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}$.

5.16*. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$.

5.17*. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{3}{n^2+3n+1}$.

EJEMPLO 7. Sea $f(t) \doteqdot F(p)$ (la región de analiticidad de $F(p)$ es $\operatorname{Re} p > 0$). Sea, además, $\Phi(t, x)$ la función generadora de la sucesión infinita de las funciones $\varphi_n(x)$, es decir,

$$\Phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) t^n.$$

Demuéstrese que la suma $S(x)$ de la serie funcional $\sum_{n=0}^{\infty} F(n) \times$ $\times \varphi_n(x)$ convergente en $[a, b]$, puede ser hallada según la fórmula

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \Phi(e^{-t}, x) f(t)\,dt. \qquad (5)$$

◀ Tenemos

$$\int_0^{+\infty} \Phi(e^{-t}, x) f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) e^{-nt}\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) F(n) = S(x). \blacktriangleright$$

Empleando la fórmula (5), con ayuda de la función generadora adecuada súmense las siguientes series:

5.18*. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

5.19*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

5.20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $x\in(0,\ \pi)$.

5.21*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}$, $x\in(0,\ \pi)$

§ 6. Transformación discreta de Laplace y su aplicación

1. Transformación Z y transformación discreta de Laplace. Se llama *transformación Z* de la sucesión infinita numérica (real o compleja) $\{a_n\}$, la función de la variable compleja $F(z)$ que se determina del modo siguiente:

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}. \tag{1}$$

Si la sucesión $\{a_n\}$ satisface la condición $|a_n| \leqslant Me^{\alpha n}$ ($M>0$, α son constantes), la función $F(z)$ será analítica en la región $|z|>e^{\alpha}$, es decir, fuera del círculo con el centro en el punto nulo y de radio $R=e^{\alpha}$.

La fórmula (1) nos da el desarrollo de $F(z)$ en serie de Laurent en el entorno del punto infinitamente alejado (que es un punto regular de $F(z)$), por eso, para restablecer la sucesión $\{a_n\}$ a partir de su transformación Z, hay que desarrollar de cualquier modo $F(z)$, en serie de Laurent, en el entorno del punto infinitamente alejado; en particular, se puede emplear la fórmula para determinar los coeficientes de este desarrollo (véase la fórmula (2) del § 5 del cap. 12)

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\, z^{n-1}\, dz \tag{2}$$

(C es el contorno dentro del cual se encuentran todos los puntos singulares de la función $F(z)$ [1]).

[1] La fórmula (2) es de hecho la fórmula de inversión de la transformación Z.

EJEMPLO 1. Restablézcase (a_n) a partir de su transformación Z, $F(z)=\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$.

◀ Tenemos $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}=\dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{1}{z-a}-\dfrac{1}{z-b}\right)=$

$$=\frac{1}{(a-b)z}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{z}}-\frac{1}{1-\frac{b}{z}}\right)=\frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n-b^n}{z^{n+1}}.$$ Así pues, $(a_n)=\left(\dfrac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}\right)$ para, $n\geqslant 1$, $a_0=0$. ▶

Introduzcamos en vez de la sucesión (a_n) la función reticular $f(n)$, suponiendo que $a_n=f(n)$. Como antes, $f(n)$ satisface la condición $|f(n)|<Me^{\alpha n}$ y pongamos adicionalmente que $f(n)=0$ para $n<0$: a tales funciones reticulares las llamaremos *originales discretos*. *La transformación discreta de Laplace* de la función $f(n)$ la obtendremos, si en la transformación Z ponemos $z=e^q$:

$$F^*(q)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,e^{-nq}. \tag{3}$$

La conexión entre el original discreto $f(n)$ y su representación $F^*(q)$ se denota por el símbolo $f(n)\doteqdot F^*(q)$ (a veces se escribe $F^*(q)=$ $=D[f(n)]$. La representación $F^*(q)$ es la función de la variable compleja con período 2π, además en la franja principal, $\pi<\operatorname{Im} q\leqslant\pi$, es analítica para $\operatorname{Re} q>\alpha$. Así pues, todos sus puntos singulares están situados en esta franja a la izquierda de la recta $\operatorname{Re} q=\alpha$.

De la fórmula (3) se deduce la siguiente fórmula de inversión de la transformación discreta de Laplace:

$$f(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-\pi i}^{\gamma+\pi i} F^*(q)\,e^{nq}\,dq. \tag{4}$$

EJEMPLO 2. $f(n)=a^n$, hállese $F^*(q)$.

◀ Tenemos $F^*(q)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n e^{-nq}=\dfrac{1}{1-ae^{-q}}=\dfrac{e^q}{e^q-a}$ y por eso $a^n\doteqdot$ $\doteqdot\dfrac{e^q}{e^q-a}$. Poniendo $a=1$, obtendremos $1^n=\eta(n)\doteqdot\dfrac{e^q}{e^q-1}$. ▶

Las propiedades de la transformación discreta de Laplace (en todos los casos que siguen se supone $f_j(n)\doteqdot F_j^*(q)$) son:

1. Linealidad:

$$\sum_{j=1}^{r} C_j f_j(n) \doteq \sum_{j=1}^{r} C_j F_j^*(q).$$

2. Fórmula de desplazamiento:

$$e^{\alpha n} f(n) \doteq F^*(q-\alpha).$$

3. Fórmula de retardo y de adelanto:

a) $f(n-k) \doteq e^{-kq} F^*(q)$,

b) $f(n+k) \doteq e^{kq} \left(F^*(q) - \sum_{r=0}^{k-1} f(r) e^{-rq} \right).$

4. Diferenciación por el parámetro:

si $f(n, x) \doteq F^*(q, x)$, entonces $\dfrac{\partial f(n, x)}{\partial x} \doteq \dfrac{\partial F^*(q, x)}{\partial x}$.

5. Diferenciación e integración de la representación:

a) $n^k f(n) \doteq (-1)^k \dfrac{d^k}{dq^k} F^*(q).$

b) $\dfrac{f(n)}{n} \doteq \int_q^{\infty} (F^*(s) - f(0))\, dx \quad (n \geqslant 1).$

6. Representación de las diferencias finitas del original:

$$\Delta^k f(n) \doteq (e^q - 1)^k F^*(q) - e^q \sum_{r=0}^{k-1} (e^q - 1)^{k-r-1} \Delta^r f(0).$$

7. Representación de las sumas finitas del original:

si $g(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$, entonces $g(n) \doteq \dfrac{F^*(q)}{e^q - 1}$.

8. Multiplicación de las representaciones: si

$$f_1(n) * f_2(n) = \sum_{r=0}^{n} f_1(r) f_2(n-r)$$

(ésta es la así llamada «convolución» de los originales), entonces

$$f_1(n) * f_2(n) \doteq F_1^*(q) F_2^*(q).$$

Damos, a continuación *la tabla de representaciones* de las funciones de reticulares principales:

N	$f(n)$	$F^*(q)$
1	$f(n)=\begin{cases} C, & n=0,\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$	C
2	$\eta(n)=\begin{cases} 1, & n\geqslant 0,\\ 0, & n<0\end{cases}$	$\dfrac{e^q}{e^q-1}$
3	a^n	$\dfrac{e^q}{e^q-a}$
4	$e^{\alpha n}$	$\dfrac{e^q}{e^q-e^{\alpha}}$
5	n	$\dfrac{e^q}{(e^q-1)^2}$
6	n^2	$\dfrac{e^q(e^q+1)}{(e^q-1)^3}$
7	$\dfrac{n^{[2]}}{2!}=\dfrac{n(n-1)}{2}=C_n^2$	$\dfrac{e^q}{(e^q-1)^3}$
8	$\dfrac{n^{[k]}}{k!}=\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}=C_n^k$	$\dfrac{e^q}{(e^q-1)^{k+1}}$
9	$\operatorname{sen}\beta n$	$\dfrac{e^q\operatorname{sen}\beta}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}$
10	$\cos\beta n$	$\dfrac{e^q(e^q-\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}$
11	$\operatorname{sh}\beta n$	$\dfrac{e^q\operatorname{sh}\beta}{e^{2q}-2e^q\operatorname{ch}\beta+1}$
12	$\operatorname{ch}\beta n$	$\dfrac{e^q(e^q-\operatorname{ch}\beta)}{e^{2q}-2e^q\operatorname{ch}\beta+1}$
13	$\dfrac{n^{[k]}}{k!}e^{\alpha n}=C_n^k e^{\alpha n}$	$\dfrac{e^{q+k\alpha}}{(e^q-e^{\alpha})^{k+1}}$
13′	$\dfrac{n^{[k]}}{k!}a^n=C_n^k a^n$	$\dfrac{a^k e^q}{(e^q-a)^{k+1}}$

EJEMPLO 3. Hállese la representación de la función $f(n)=e^{\alpha n}\operatorname{sen}\beta n$.

◀ Aplicando el teorema de desplazamiento (propiedad 2) y empleando la fórmula 9 de la tabla de representaciones hallamos

$$e^{\alpha n}\operatorname{sen}\beta n \doteq F(q-\alpha)=\frac{e^{q-\alpha}\operatorname{sen}\beta}{e^{2(q-\alpha)}-2e^{q-\alpha}\cos\beta+1}=$$

$$=\frac{e^{q+\alpha}\operatorname{sen}\beta}{e^{2q}-2e^{q+\alpha}\cos\beta+e^{2\alpha}}.$$ En particular,

$$a^n \operatorname{sen} \beta n = e^{n \ln a} \operatorname{sen} \beta n \doteqdot \frac{a e^q \operatorname{sen} \beta}{e^{2q} - 2a e^q \cos \beta + a^2}. \blacktriangleright$$

Hállense las representaciones de las siguientes funciones reticulares:

6.1. $f(n) = e^{\alpha n} \cos \beta n$. **6.2.** $f(n) = a^n \cos \beta n$.

6.3. $f(n) = n^2 e^{\alpha n}$. **6.4.** $f(n) = n^2 a^n$.

6.5*. $f(n) = \dfrac{(n-1)^{[k]}}{k!} = C_{n-1}^k$.

6.6*. $f(n) = \dfrac{(n+m)^{[k]}}{k!} = C_{n+m}^k$.

6.7.** $f(n) = \dfrac{\operatorname{sen} \beta n}{n}$.

EJEMPLO 4. Hállese la función reticular $f(n)$ a partir de su representación $F^*(q) = \dfrac{e^q}{(e^{2q}-9)^2}$.

◀ Primer procedimiento. Desarrollemos $\dfrac{F^*(q)}{e^q} = \dfrac{1}{(e^{2q}-9)^2}$ en fracciones elementales, poniendo $e^q = z$:

$$\frac{1}{(z^2-9)^2} = \frac{1}{36}\left(\frac{1}{(z-3)^2} + \frac{1}{(z+3)^2}\right) - \frac{1}{108}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+3}\right).$$

De este modo,

$$\frac{e^{2q}}{(e^{2q}-9)^2} = \frac{1}{108}\left(\frac{3e^q}{(e^q-3)^2} + \frac{3e^q}{(e^q+3)^2} - \frac{e^q}{e^q-3} + \frac{e^q}{e^q+3}\right).$$

Pero según las fórmulas 3 y 13' de la tabla de representaciones tenemos:

$$\frac{e^q}{e^q-3} \doteqdot 3^n, \qquad \frac{e^q}{e^q+3} \doteqdot (-3)^n,$$

$$\frac{3e^q}{(e^q-3)^2} \doteqdot n3^n, \quad \frac{3e^q}{(e^q+3)^2} \doteqdot -n(-3)^n.$$

De aquí, después de las transformaciones elementales hallamos:

$$\frac{e^q}{(e^{2q}-9)^2} \doteqdot \frac{3^{n-3}(n-1)(1-(-1)^n)}{4}.$$

Segundo procedimiento. Pasamos a la transformación Z (poniendo $e^q = z$): $\dfrac{e^q}{(e^{2q}-9)^2} = \dfrac{z}{(z^2-9)^2}$. Empleando la fórmula de inversión (2) y aplicando el teorema sobre los residuos, obtenemos

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{z}{(z^2-9)^2} z^{n-1}\, dz = \operatorname{res}\left[\frac{z^n}{(z^2-9)^2}; 3\right] +$$

$$+ \operatorname{res}\left[\frac{z^n}{(z^2-9)^2}; -3\right];$$

pero

$$\operatorname{res}\left[\frac{z^n}{z^2-9}\,;\,3\right]=\lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^n}{(z+3)^2}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 3}\left(\frac{nz^{n-1}}{(z+3)^2}-\frac{2z^n}{(z+3)^3}\right)=\frac{(n-1)\cdot 3^{n-3}}{4}\,.$$

Análogamente

$$\operatorname{res}\left[\frac{z^n}{(z^2-9)^2}\,;\,-3\right]=-(-1)^n\,\frac{(n-1)\,3^{n-3}}{4}\,.$$

Sumando estos residuos llegamos al resultado anterior. ▶

Hállense las funciones reticulares a partir de sus representaciones

6.8. $F^*(q)=\dfrac{e^q}{(e^q-1)(e^{2q}-4)}\,.$

6.9. $F^*(q)=\dfrac{e^q}{e^{4q}+1}\,.$

6.10. $F^*(q)=\dfrac{e^{2q}}{e^{2q}+2e^q+2}\,.$

EJEMPLO 5. Hállese la suma $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos k\beta$.

◀ Empleamos la propiedad 7 de la transformación discreta de Laplace:

$$f(n)\doteqdot\frac{e^q(e^2-\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}=F^*(q),$$

por eso

$$S_n\doteqdot\frac{F^*(q)}{e^q-1}=\frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{(e^q-1)(e^{2q}-2e^q\cos\beta+1)}\,.$$

Descomponiendo en factores elementales la fracción

$$(e^q-\cos\beta)/(e^q-1)/(e^{2q}-2e^q\cos\beta+1)$$

y añadiendo el factor e^q hallamos

$$\frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{(e^q-1)(e^{2q}-2e^q\cos\beta+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^q}{e^q-1}-\frac{e^q(e^q-2\cos\beta-1)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}\right)\,.$$

Pero $\dfrac{e^q}{e^q-1}\doteqdot\eta(n)$ (fórmula 2 de la tabla de las representaciones). Por consiguiente,

$$\frac{e^q(e^q-2\cos\beta-1)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}=\frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}-$$

$$-\frac{e^q(1+\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}\doteqdot\cos\beta n-\frac{1+\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\operatorname{sen}\beta n.$$

Así pues,

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\eta(n)-\cos\beta n+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\beta n\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}+\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\beta}{2\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n-1}{2}\beta}{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}\ (n\geqslant 1).\ \blacktriangleright$$

Hállense las sumas siguientes:

6.11. $\sum\limits_{k=r}^{n-1}\frac{k^{[r]}}{r!}=\sum\limits_{k=r}^{n-1}C_k^r.$

6.12. $\sum\limits_{k=0}^{n-1}2^k\operatorname{sen}k\beta.$

6.13*. $\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2(n-k)^2.$

EJEMPLO 6. Hállese la suma de la serie potencial

$$S(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)t^n=1+\sqrt{2}\,t+t^2-$$

$$-t^4-\sqrt{2}\,t^5-t^6+\dots$$

◀ La serie dada converge para $|t|<1$, ya que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1$. Sustituyendo t por e^{-q} llegamos a la representación discreta de la función $f(n)=\cos\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}$:

$$F^*(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)e^{-nq}.$$

Pero

$$\cos\frac{n\pi}{4}\doteq\frac{e^q\left(e^q-\cos\frac{\pi}{4}\right)}{e^{2q}-2e^q\cos\frac{\pi}{4}+1};\quad \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\doteq\frac{e^q\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{e^{2q}-2e^q\cos\frac{\pi}{4}+1}$$

(véanse las fórmulas 9 y 10 de la tabla de representaciones). Por eso

$$f(n)=\cos\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\doteq\frac{e^q\left(e^q-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+e^q\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^q-\sqrt{2}\,e^q+1}=$$

$$=\frac{e^{2q}}{e^{2q}-\sqrt{2}\,e^{q}+1}.$$

De aquí, volviéndose al argumento t, hallamos

$$S(t)=\frac{t^{-2}}{t^{-2}-\sqrt{2}\,t^{-1}+1}=\frac{1}{1-t\sqrt{2}+t^2}. \blacktriangleright$$

Hállense las sumas de las siguientes series potenciales:

6.14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\,t^n$. **6.15.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right)t^n$.

2. Resolución de las ecuaciones en diferencias. Sea dada la ecuación

$$a_0x(n+k)+a_1x(n+k-1)+\ldots+a_kx(n)=\varphi(n) \tag{5}$$

(a_0, a_1, ..., a_k son constantes) con las condiciones iniciales dadas (o arbitarias): $x(0)=x_0$, $x(1)=x_1$, ..., $x(k-1)=x_{k-1}$. Se supone que el segundo miembro de la ecuación (5), que es la función reticular $\varphi(n)$, es original.

Poniendo $x(n) \risingdotseq X^*(q)$ y empleando la fórmula de adelanto (propiedad 3, b)) formamos la ecuación operacional (es lineal respecto a $X^*(q)$) y determinamos a partir de ésta $X^*(q)$. Luego, por uno de los procedimientos expuestos en el p. 1, mediante la representación hallamos la solución buscada $x(n)$.

Si la ecuación inicial fue dada no mediante los valores sucesivos de la función incógnita, sino mediante sus diferencias finitas, es decir, tiene la forma

$$b_0\Delta^k x(n)+b_1\Delta^{k-1}x(n)+\ldots+b_kx(n)=\varphi(n), \tag{6}$$

entonces a consecuencia de que las fórmulas para determinar las representaciones de las diferencias finitas de las funciones reticulares (p. 1, propiedad 6) son voluminosas, es conveniente transformar previamente esta ecuación a la forma (5) con ayuda de las fórmulas conocidas que enlacen las diferencias finitas de la función con sus valores consecutivos:

$$\Delta^r x(n)=x(n+r)-C_r^1x(n+r-1)+\\ +C_r^2x(n+r-2)+\ldots+(-1)^r x(n). \tag{7}$$

De modo análogo se resuelven los sistemas de ecuaciones en diferencias.

EJEMPLO 7. Resuélvase la ecuación $x_{n+2}-x_{n+1}+x_n=0$, $x_0=1$, $x_1=2$.

◀ Ponemos $x_n \doteqdot X^*(q)$. Por la fórmula de adelanto hallamos:

$$x_{n+1} \doteqdot e^q(X^*(q)-x_0)=e^q(X^*(q)-1)=e^qX^*(q)-e^q,$$
$$x_{n+2} \doteqdot e^{2q}(X^*(q)-x_0-x_1e^{-q})=e^{2q}(X^*(q)-1-2e^{-q})=$$
$$=e^{2q}X^*(q)-e^{2q}-2e^q.$$

Introduciendo estas expresiones en la ecuación inicial llegamos a la ecuación operacional

$$(e^{2q}-e^q+1)X^*(q)=e^{2q}+e^q.$$

De este modo,

$$X^*(q)=\frac{e^{2q}+e^q}{e^{2q}-e^q+1}.$$

Ya que $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces anotemos $X^*(q)$ en la forma siguiente

$$X^*(q)=\frac{e^q\left(e^q-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}e^q}{e^{2q}-2e^q\cdot\frac{1}{2}+1}=\frac{e^q\left(e^q-\cos\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\,e^q\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{e^{2q}-2e^q\cos\frac{\pi}{3}+1}.$$

De aquí, por las fórmulas 10 y 11 de la tabla de representaciones del p. 1, hallamos

$$x_n=\cos\frac{n\pi}{3}+\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}=2\operatorname{sen}\frac{2n+1}{6}\pi. \ ▶$$

OBSERVACIÓN. Es imposible anotar la respuesta en la forma $x_n=2\cos\frac{n-1}{3}\pi$, ya que en este caso obtendremos $x_0=0\neq 1$ (por la condición de que la función reticular respecto al argumento negativo es igual a cero).

EJEMPLO 8. Resuélvase la ecuación $x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=3^n$ para las condiciones iniciales arbitrarias x_0, x_1.

◀ Poniendo $x_n \doteqdot X^*(q)$ y valiéndose de las representaciones dadas en la resolución del ejemplo 1

$$x_{n+1} \doteqdot e^qX^*(q)-x_0e^q,\quad x_{n+2}\doteqdot e^{2q}X^*(q)-x_0e^{2q}-x_1e^q$$

llegamos a la ecuación operacional

$$(e^{2q}-4e^q+4)X^*(q)-x_0e^{2q}-(x_1-4x_0)e^q=\frac{e^q}{e^q-3}$$

$\left(\text{puesto que por la fórmula 3 de la tabla del p. 1 } 3^n \doteqdot \frac{e^q}{e^q-3}\right)$.

De aquí hallamos

$$X^*(q)=\frac{x_0e^{2q}}{(e^q-2)^2}+(x_1-4x_0)\frac{e^q}{(e^q-2)^2}+\frac{e^q}{(e^q-3)(e^q-2)^2}.$$

Descomponiendo la fracción $\frac{1}{(e^q-3)(e^q-2)^2}$ en fracciones simples tenemos

$$X^*(q)=x_0\frac{e^{2q}}{(e^q-2)^2}+(x_1-4x_0-1)\frac{e^q}{(e^q-2)^2}-\frac{e^q}{e^q-2}+\frac{e^q}{e^q-3}.$$

Pero

$$\frac{e^q}{e^q-3}\doteqdot 3^n,\qquad \frac{e^q}{e^q-2}\doteqdot 2^n,$$

$$\frac{2e^q}{(e^q-2)^2}\doteqdot n\cdot 2^n,\qquad \frac{2e^{2q}}{(e^q-2)^2}\doteqdot (n+1)\,2^{n+1}$$

(la última relación se deduce de la anterior por la fórmula de adelanto). Pasando de $X^*(q)$ al original, hallamos:

$$x_n=x_0\frac{n+1}{2}\,2^{n+1}+\frac{x_1-4x_0-1}{2}\,n\cdot 2^n-2^n+3^n=$$

$$=\frac{x_1-2x_0-1}{2}\,n\cdot 2^n+(x_0-1)\,2^n+3^n=(C_1+C_2n)\,2^n+3^n. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 9. Resuélvase el sistema de las ecuaciones en diferencias

$$x_{n+2}-y_n=0,$$
$$y_{n+2}+x_n=0$$

para las condiciones iniciales $x_0=y_0=1$, $x_1=\sqrt{2}$, $y_1=0$.

◀ Ponemos $x_n\doteqdot X^*(q)$, $y_n\doteqdot Y^*(q)$ y por la fórmula de adelanto tenemos:

$$x_{n+2}\doteqdot e^{2q}(X^*(q)-x_0-x_1e^{-q})=e^{2q}X^*(q)-e^{2q}-\sqrt{2}e^q,$$
$$y_{n+2}\doteqdot e^{2q}(Y^*(q)-y_0-y_1e^{-q})=e^{2q}Y^*(q)-e^{2q}.$$

Obtenemos el sistema de las ecuaciones operacionales

$$e^{2q}X^*(q)-Y^*(q)=e^{2q}+\sqrt{2}e^q,$$
$$e^{2q}Y^*(q)+X^*(q)=e^{2q}.$$

Como $e^{4q}+1=(e^{2q}+\sqrt{2}e^q+1)(e^{2q}-\sqrt{2}e^q+1)$, entonces la solución de este sistema se escribirá en la forma siguiente

$$X^*(q)=\frac{e^{4q}+\sqrt{2}\,e^{3q}+e^{2q}}{e^{4q}+1}=\frac{e^{2q}}{e^{2q}-\sqrt{2}\,e^q+1},$$

$$Y^*(q)=\frac{e^{4q}-e^{2q}-\sqrt{2}\,e^q}{e^{4q}+1}=\frac{e^{2q}-\sqrt{2}\,e^q}{e^{2q}-\sqrt{2}\,e^q+1}.$$

Empleando la fórmula de adelanto tenemos:

$$\frac{e^{2q}}{e^{2q}-\sqrt{2}\,e^q+1}=\sqrt{2}\,\frac{e^q\cdot e^q\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{e^{2q}-2e^q\cos\frac{\pi}{4}+1}\doteqdot\sqrt{2}\operatorname{sen}(n+1)\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{e^{2q}-\sqrt{2}\,e^q}{e^{2q}-\sqrt{2}\,e^q+1}=\frac{e^q\left(e^q-\cos\frac{\pi}{4}\right)-e^q\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{e^{2q}-2e^q\cos\frac{\pi}{4}+1}\doteqdot$$

$$\doteqdot\cos\frac{n\pi}{4}-\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}=\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}.$$

Por consiguiente,

$$x_n=\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{(n+1)\pi}{4}, \quad y_n=\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}. \ ▶$$

Resuélvanse las siguientes ecuaciones lineales en diferencias:

6.16. $x_{n+2}-3x_{n+1}-10x_n=0$; $x_0=3$, $x_1=-1$.

6.17. $x_{n+2}+x_{n+1}+x_n=0$; $x_0=1$, $x_1=-1$.

6.18. $x_{n+2}-\sqrt{3}\,x_{n+1}+x_n=0$; $x_0=\frac{1}{2}$, $x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.19. $x_{n+2}-3x_{n+1}+2x_n=0$; las condiciones iniciales son arbitrarias.

6.20. $x_{n+3}-3x_{n+2}+3x_{n+1}-x_n=2^n$; $x_0=x_1=0$, $x_2=1$.

6.21. $x_{n+2}-5x_{n+1}+6x_n=2\cdot 4^n$; las condiciones iniciales son arbitrarias.

Resuélvanse los sistemas de las ecuaciones lineales en diferencias:

6.22. $\begin{aligned} x_{n+1}-x_n+y_n&=3^n,\\ y_{n+1}+2x_n&=-3^n; \end{aligned}$ $\quad x_0=3,\ y_0=0.$

6.23. $\begin{aligned} 5x_{n+1}-12x_n-y_n&=0;\\ 5y_{n+1}-6x_n-13y_n&=0; \end{aligned}$

las condiciones iniciales son arbitrarias.

RESPUESTAS

1.1. $\frac{1}{p}$. **1.2.** $\frac{1}{p-\alpha}$. **1.3.** $\frac{6}{(p^2-1)(p^2-9)}$. **1.4.** $\frac{p^2+2}{p^4+4}$. **1.5.** $\frac{2}{(p^2+1)^2}$, $\frac{2p}{(p^2+1)^2}$. **1.6.** $\frac{p(p^2+3)}{(p^2+1)^2}$, $\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$. **1.7.** $\frac{2}{(p+1)(p^2+2p+5)}$, $\frac{2p}{(p+1)(p^2+2p+5)}$. **1.8.** $\frac{p^2}{p^4+4}$, $\frac{p^3}{p^4+4}$. **1.9.** $-\frac{1}{2p}\ln\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$. **1.10.** $\frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$. **1.11.** $\frac{1}{2p}\times\ln\frac{p+1}{p-1}$. **1.12.** $\frac{1}{2p}\ln\frac{p^2+\alpha^2}{p^2+\beta^2}$. **1.13.** $\frac{1}{p}\ln\frac{p-\alpha}{p-\beta}$. **1.14.** $\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{\alpha-\beta}$, $\frac{\alpha e^{\alpha t}-\beta e^{\beta t}}{\alpha-\beta}$, $\frac{\beta e^{\alpha t}-\alpha e^{\beta t}}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}+\frac{1}{\alpha\beta}$. **1.15.** $\frac{t}{2\beta}\operatorname{sen}\beta t$, $\frac{1}{2}\left(t\cos\beta t+\frac{1}{\beta}\operatorname{sen}\beta t\right)$, $\frac{1}{2\beta^3}(\operatorname{sen}\beta t-\beta t\cos\beta t)$. **1.16.** $\frac{\operatorname{ch}\alpha t-\cos\beta t}{\alpha^2+\beta^2}$,

$\frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha t+\beta \operatorname{sen} \beta t}{\alpha^2+\beta^2}$, $\frac{\beta \operatorname{sh} \alpha t-\alpha \operatorname{sen} \beta t}{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}$. **1.17.** $\frac{e^{-\alpha t}(1-\cos\beta t)}{\beta^2}$, $\frac{e^{-\alpha t}(\beta \operatorname{sen}\beta t-\alpha(1-\cos\beta t))}{\beta^2}$, $\frac{1}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha\beta^2}+$ $+\frac{e^{-\alpha t}(\alpha\cos\beta t-\beta\operatorname{sen}\beta t)}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}$. **1.18.** $\frac{1}{5}(\operatorname{sen} t-2\cos t)+\frac{1}{5}e^{-t}\times$ $\times(\operatorname{sen} t+2\cos t)$, $\frac{1}{5}(\cos t+2\operatorname{sen} t)-\frac{1}{5}e^{-t}(3\operatorname{sen} t+\cos t)$, $\frac{1}{2}-$ $-\frac{1}{5}(\cos t+2\operatorname{sen} t)+\frac{1}{10}e^{-t}(\operatorname{sen} t-3\cos t)$. **1.19.** $\frac{1}{p}(1-e^{-p\tau})$. **1.20.** $\frac{1}{p}(1-e^{-p\tau})e^{-pT}$. **1.21.** $\frac{h}{\tau p^2}(1-e^{-p\tau}-e^{-2p\tau}+e^{-3p\tau})$. **1.22.** $\frac{1}{p^2+1}\left(1-e^{-\frac{p\pi}{2}}\right)\left(1-pe^{-\frac{p\pi}{2}}\right)$. **1.23.** $h\left(\frac{1}{p}-\frac{e^{-p}}{p(p-1)}\right)$. **1.24.** $\frac{1}{p^2+1}+\frac{2p^2e^{-p\pi}}{p^4-1}$. **1.25.** ◀ La función $f_0(t)$ puede anotarse en la forma $f_0(t)=(1-\eta(t-l))f(t)=f(t)-\eta(t-l)f(t-l)$ (ya que $f(t)=f(t-l)$ para $t>l$ en virtud de la periodicidad). De aquí $F_0(p)=F(p)-e^{-pl}F(p)$, o $F(p)=\frac{F_0(p)}{1-e^{-pl}}$. ▶ **1.26.** $\frac{1-e^{-p\tau}}{p(1-e^{-pT})}$. **1.27.** $\frac{\beta \operatorname{cth}\frac{p\pi}{2\beta}}{p^2+\beta^2}$. ● $f_0(t)=\left(1-\eta\left(t-\frac{\pi}{\beta}\right)\right)\operatorname{sen}\beta t=\operatorname{sen}\beta t-$ $-\eta\left(t-\frac{\pi}{\beta}\right)\operatorname{sen}\left(\beta\left(t-\frac{\pi}{\beta}\right)+\pi\right)=\operatorname{sen}\beta t+\eta\left(t-\frac{\pi}{\beta}\right)\operatorname{sen}\beta\times$ $\times\left(t-\frac{\pi}{\beta}\right)$. **1.28.** $\frac{1+e^{-p\pi}}{(p^2+1)(1-e^{-pT})}$. **1.29.** $\frac{h}{p}\operatorname{th}\frac{cp}{2}$. **1.30.** $\frac{h}{cp^2}-\frac{he^{-pc}}{p(1-e^{-pc})}$. **1.31.** $\frac{h}{cp^2}\operatorname{th}\frac{cp}{2}-\frac{2h}{p(1-e^{cp})}$. **1.32.** $\frac{p+\beta e^{-\frac{p\pi}{2\beta}}}{(p^2+\beta^2)\left(1-e^{-\frac{p\pi}{2\beta}}\right)}$. **1.33.** $f(t)=\frac{1}{2}\eta(t-2)(t-2)^2e^{-(t-2)}$, es decir, $f(t)=\begin{cases}0 & \text{para } t<2,\\ \frac{1}{2}(t-2)^2e^{-(t-2)} & \text{para } t\geqslant 2.\end{cases}$ **1.34.** $f(t)=e^{2t}+\eta\times$ $\times(t-4)+\eta(t-4)\operatorname{sen}3(t-4)$, es decir, $f(t)=$

$$=\begin{cases} e^{2t} & \text{para } 0\leqslant t<1,\\ e^{2t}+1 & \text{para } 1\leqslant t<4,\\ e^{2t}+1\,\mathrm{sen}\,3(t-4) & \text{para } \quad t\geqslant 4.\end{cases}$$ **1.35.** $f(t)=\cos 2t-2\eta(t-$ $-1)\,\mathrm{ch}\,2(t-1)+\frac{1}{4}\eta(t-3)\,\mathrm{sh}\,4(t-3)$, es decir, $f(t)=$

$$=\begin{cases} \cos 2t & \text{para } 0\leqslant t<1,\\ \cos 2t-2\,\mathrm{ch}\,2(t-1) & \text{para } 1\leqslant t<3,\\ \cos 2t-2\,\mathrm{ch}\,2(t-1)+\frac{1}{4}\,\mathrm{sh}\,4(t-3) & \text{para } \quad t\geqslant 3.\end{cases}$$

1.36. $\frac{1}{(p-\alpha)^{\mu+1}}$. **1.37.** $\frac{1}{(p-\alpha)^{\mu+1}}\left(\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)}-\ln(p-\alpha)\right)$.

1.38. $-\frac{\gamma+\ln(p-\alpha)}{p-\alpha}$ (γ es la constante de Euler). **1.39.** $\frac{1}{2}\times$ $\times\frac{(p+\beta i)^{\mu+1}+(p-\beta i)^{\mu+1}}{(p^2+\beta^2)^{\mu+1}}$. **1.40.** $\frac{1}{2i}\,\frac{(p+\beta i)^{\mu+1}-(p-\beta i)^{\mu+1}}{(p^2+\beta^2)^{\mu+1}}$.

1.41. $-\frac{\gamma p+\frac{p}{2}\ln(p^2+\beta^2)+\beta\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{p}}{p^2+\beta^2}$. **1.42.**

$\frac{p\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{p}-\beta\gamma-\frac{\beta}{2}\ln(p^2+\beta^2)}{p^2+\beta^2}$. **1.43.** $\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-ap}$. **2.1.**

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{((2n)!)^2}$. **2.2.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!\,(2n+1)!}$. **2.3.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times$

$\times\frac{t^n}{n!\,(2n+1)}$. **2.4.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}=I_0(t)$. **2.5.**

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}=\int\limits_0^t\frac{\mathrm{sh}\,\tau}{\tau}\,d\tau$. **2.6.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n!\,(2n)!}$. **2.7.** $e^tI_0\times$ $\times(2\sqrt{t})$. ● Aplíquese el teorema de desplazamiento al original obtenido en el ejemplo 1 del § 2. **2.8.** No se puede sólo para las funciones de los problemas 2.4 y 2.5 (para los puntos singulares de estas funciones no tiene sentido la noción de residuo). **2.9.** $e^{-2t}(\cos t-2\,\mathrm{sen}\,t)$. **2.10.** $\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{15}e^{-t}-\frac{1}{10}\cos 2t-\frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,2t$.

2.11. $\sum\limits_{k=1}^{n}e^{p_kt}$. **2.12.** $\frac{t}{8}(\mathrm{ch}\,t-\cos t)-\frac{3}{8}(\mathrm{sh}\,t-\mathrm{sen}\,t)$. **2.13.**

$\frac{1}{10}t\cos t-\frac{7}{50}\,\mathrm{sen}\,t+\frac{1}{50}\,\mathrm{sh}\,2t$. **2.14.** $\frac{1}{8}t(\mathrm{sh}\,t-\mathrm{sen}\,t)$.

2.15. $\frac{1}{3}\operatorname{ch} t+\frac{2}{3}\operatorname{ch}\frac{t}{2}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}$. 2.16. $\frac{1}{8}t^2\cos t+\frac{3}{8}t\operatorname{sen} t$.

2.17. $\frac{1}{2}(e^{3t}-e^t)$. 2.18. $t-2\operatorname{sh} t+t\operatorname{ch} t$. 2.19. $\frac{1}{3}(\operatorname{ch} 2t-\operatorname{ch} t)$.

2.20. $\frac{1}{10}(\operatorname{ch} t+\cos t)-\frac{1}{5}\operatorname{ch} t\cos t$.

3.1. $x(t)=C_1\cos 3t+C_2\operatorname{sen} 3t+\frac{1}{6}\operatorname{sen} 3t$. 3.2. $x(t)=\left(C_1+C_2t+\frac{t^2}{2}\right)e^{2t}$. 3.3. $x(t)=C_1+\left(C_2-\frac{t^2+t}{4}\right)e^{-2t}$. 3.4. $x(t)=\left(C_1+\frac{t}{3}\right)e^t+C_2e^{-2t}$. 3.5. $x(t)=C_1+C_2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}(\cos t-\operatorname{sen} t)$.

3.6. $x(t)=e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{t\sqrt{3}}{2}-\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)+e^{-t}$. 3.7. $x(t)=\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)e^{-t}$. 3.8. $x(t)=\frac{2}{9}(e^{-3t}-1)-\frac{t}{3}e^{-3t}$. 3.9. $x(t)=\frac{2}{5}(1-e^t)\cos t+\frac{1}{5}(1+6e^t)\operatorname{sen} t$. 3.10. $x(t)=\cos 2t-\frac{7}{8}\operatorname{sen} 2t-\frac{t}{4}\cos 2t$. 3.11. $x(t)=\frac{25}{24}\operatorname{sh} 3t-\operatorname{ch} 3t-\frac{1}{8}\operatorname{sh} t$. 3.12. $x(t)=3+t+(t-2)e^t$. 3.13. $x(t)=\frac{t}{4}\operatorname{ch} t-\frac{1}{4}\operatorname{sen} t$. 3.14. $x(t)=\frac{t^4}{24}e^{-t}$.

3.15. $x(t)=1-e^{-t}-\eta(t-2)(1-e^{-(t-2)})$. 3.16. $x(t)=\frac{t}{2}\operatorname{sen} t+\frac{1}{2}\eta(t-\pi)(t-\pi)\operatorname{sen}(t-\pi)$. 3.17. $x(t)=\operatorname{ch} t-1-\frac{1}{e}\eta(t-1)\times(\operatorname{ch}(t-1)-1)$. 3.18. $x(t)=2\left(\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}-2\eta(t-1)\operatorname{sen}^2\frac{t-1}{2}+\eta(t-2)\operatorname{sen}^2\frac{t-2}{2}\right)$. 3.19. $x(t)=1-e^{-t}-2\eta(t-1)(1-e^{-(t-1)})+\eta(t-2)(1-e^{-(t-2)})$. ● Para construir la ecuación operacional empléese el teorema de integración del original. 3.20. ◀ A la ecuación $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x'+a_nx=1$ para las condiciones iniciales nulas corresponde la ecuación operacional $L(p)X_1(p)=\frac{1}{p}$, donde $X_1(p)\doteqdot x_1(t)$ y $L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n$ es un polinomio característico de la ecuación. De aquí $L(p)=\frac{1}{pX_1(p)}$. A la ecuación $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)$ para las condiciones iniciales nulas corresponde la ecuación operacional $L(p)X(p)=F(p)$, donde $X(p)\doteqdot x(t)$ y $F(p)\doteqdot f(t)$. De aquí $X(p)=$

$= \frac{F(p)}{L(p)} = pX_1(p)\,F(p)$. Con ayuda de la integral de Duhamele (véase el § 1, propiedad 11), obtenemos $x(t) = x_1(0)\,f(t) + \int_0^t x_1'(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t x_1'(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau$ (ya que $x_1(0)=0$) o $x(t) = f(0)\,x_1(t) + \int_0^t f'(\tau)\,x_1(t-\tau)\,d\tau$. ▶ 3.21. $x(t) = \frac{1}{3}(e^t-1) - \frac{1}{9}e^t + \frac{1}{9}e^t \ln\frac{e^t+3}{4}$. 3.22. $x(t) = \frac{1}{2}(e^t-1-te^t) + \operatorname{sh} t \ln\frac{1+e^t}{2}$.
3.23. $x(t) = e^t - 1 - (t+\ln 2)(e^t+1) + (e^t+1)\ln(e^t+1)$. 3.24. $x(t) = \operatorname{sen} t\left(t - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\right)\right) + \cos t \ln\frac{2+\cos t}{3}$. 3.25. $x(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)^2}\operatorname{sen}\tau\,d\tau$ (esta integral no se expresa mediante las funciones elementales). 3.26. $x(t) = C_1 + C_2\operatorname{sen} t + C_3\cos t$, $y(t) = C_4 + C_3\operatorname{sen} t - C_2\cos t + \frac{t^2}{2}$. 3.27. $x = C_1 + C_2\operatorname{sh} t + C_3\operatorname{ch} t$, $y = C_4 - C_3\operatorname{sh} t - C_2\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} t + \cos t$. 3.28. $x(t) = e^t$, $y(t) = -e^t$.
3.29. $x(t) = t\cos t$, $y(t) = -t\operatorname{sen} t$. 3.30. $x(t) = \operatorname{sen} t - \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t + \cos t$. 3.31. $x(t) = \operatorname{sen} t + \operatorname{sh} t$, $y(t) = \cos t + \operatorname{ch} t$. 3.32. $x(t) = 1 + \frac{t^2}{2}$, $y(t) = t - e^t$. 3.33. $x(t) = -\operatorname{sen} t$, $y(t) = -\cos t$, $z(t) = \operatorname{sen} t$. 3.34. $x(t) = (1+t-\operatorname{sen} t-\cos t) - 2\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \eta(t-\pi)(-1+(t-\pi)+\cos(t-\pi)-\operatorname{sen}(t-\pi))$,
$y(t) = (1-t+\operatorname{sen} t-\cos t) - 2\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(1-\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \eta(t-\pi)\times$
$\times(1+(t-\pi)-\operatorname{sen}(t-\pi)-\cos(t-\pi))$. 3.35. $x(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t - 2) - \eta(t-\pi)(\operatorname{ch}(t-\pi)+\cos(t-\pi)-2) + \frac{1}{2}\eta(t-2\pi)(\operatorname{ch}(t-2\pi) + \cos(t-2\pi)-2)$, $y(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t) - \eta(t-\pi)(\operatorname{ch}(t-\pi) - \cos(t-\pi)) + \frac{1}{2}\eta(t-2\pi)(\operatorname{ch}(t-2\pi)-\cos(t-2\pi))$. 3.36. Si $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = n^2 > 0$, entonces $i(t) = \frac{E_1}{Ln}e^{-kt}\operatorname{sen} nt + \frac{E_2-E_1}{L}\eta(t-T)\times$

$\times e^{-k(t-T)}\,\text{sen}\,n(t-T)$; si $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}=0$, entonces $i(t)=\frac{E_1}{L}te^{-kt}+$ $+\frac{E_2-E_1}{L}\eta(t-T)(t-T)e^{-k(t-T)}$; si $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}=-n^2<0$, entonces $i(t)=\frac{E_1}{Ln}e^{-kt}\,\text{sh}\,nt+\frac{E_2-E_1}{Ln}\eta(t-T)e^{-k(t-T)}\,\text{sh}\,n(t-T)$; $k=$ $=\frac{R}{2L}$. **3.37.** Si $M\neq L$, entonces $i_{1,2}(t)=\pm\frac{E_0}{2(L-M)\sqrt{n_1}}\times$ $\times e^{-k_1t}\,\text{sen}\sqrt{n_1}\,t+\frac{E_0}{2(L+M)\sqrt{n_2}}e^{-k_2t}\,\text{sen}\sqrt{n_2}\,t$, donde $\frac{R}{2(L-M)}=k_1$, $\frac{R}{2(L+M)}=k_2$, $\frac{1}{(L-M)C}-\frac{R^2}{4(L-M)^2}=n_1$, $\frac{1}{(L+M)C}-\frac{R^2}{4(L+M)^2}=n_2$ (cuando $n_1n_2>0$ el signo más delante del primer sumando para i_1, es signo menos para i_2, para $n_1n_2<0$ hay que sustituir $\frac{\text{sen}\sqrt{n}\,t}{\sqrt{n}}$ por $\frac{\text{sh}\sqrt{|n|}\,t}{\sqrt{|n|}}$, cuando $n_1n_2=0$ esta relación debe ser sustituida por su límite para $n\to 0$, es decir, por t); si $M=L$ (conexión "ideal"), entonces $i_{1,2}(t)=\pm\frac{E_0}{2R}e^{-k_1t}+$ $+\frac{E_0}{4L\sqrt{n}}e^{-k_2t}\,\text{sen}\sqrt{n}\,t$, donde $\frac{1}{RC}=k_1$, $\frac{R}{4L}=k_2$, $\frac{1}{2LC}-$ $-\frac{R^2}{16L^2}=n$ (para $n>0$ la regla de signos es la misma que en el caso de $M\neq L$, para $n<0$ se debe sustituir $\frac{\text{sen}\sqrt{n}\,t}{\sqrt{n}}$ por $\frac{\text{sh}\sqrt{|n|}\,t}{\sqrt{|n|}}$, para $n=0$ esta relación se sustituye por t).

3.38. $z(x, y)=y\cos x+x\,\text{sen}\,x$. **3.39.** $z(x, y)=\frac{1}{a}\int\limits_0^x \text{sh}\,a(x-t)f(t)\,dt$.

4.1. $x(t)=\frac{v_0}{\omega}\,\text{sen}\,\omega t$. **4.2.** $x(t)=x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\,\text{sen}\,\omega t+$ $+\frac{v_1}{\omega}\eta(t-\tau)\,\text{sen}\,\omega(t-\tau)+h\eta(t-\tau_1)\cos\omega(t-\tau_1)$. **4.3.** $x(t)=$ $=\frac{A}{2\omega^2}\,\text{sen}\,\omega t-\frac{A}{2\omega}t\cos\omega t+\frac{B\cos\omega t}{\omega}\eta(t-\tau)\,\text{sen}\,\omega(t-\tau)$. **4.4.** $x(t)=$ $=\frac{v_0}{\omega}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\eta\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)$. ◀ Hallemos la representación

$\delta(\operatorname{sen}\omega t)$. Ya que $\operatorname{sen}\omega t$ para $t \geqslant 0$ se reduce a cero en los puntos $t=\frac{k\pi}{\omega}$ $(k=0, 1, \ldots)$, además todas las raíces son simples, entonces según la propiedad 5 de la función impulsiva tenemos: $\delta_1(\operatorname{sen}\omega t)=$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)}{|\omega\cos k\pi|}=\frac{1}{\omega}\sum_{k=0}^{\infty}\delta\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right).$$ Por eso $v_0\delta(\operatorname{sen}\omega t)\risingdotseq$

$$=\frac{v_0}{\omega}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{pk\pi}{\omega}}.$$ De aquí, la ecuación operacional para la ecuación $x''=v_0\delta(\operatorname{sen}\omega t)$ cuando las condiciones iniciales son nulas será

$$p^2X(p)=\frac{v_0}{\omega}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{pk\pi}{\omega}},\quad \text{o}\quad X(p)=\frac{v_0}{\omega}\cdot\frac{1}{p^2}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{pk\pi}{\omega}},$$ de donde

$$x(t)=\frac{v_0}{\omega}\sum_{k=0}^{\infty}\eta\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right).$$ ▶

5.1. $2\operatorname{sen}t$. **5.2.** $\operatorname{ch}2t-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2t$. **5.3.** e^t. **5.4.** $\operatorname{ch}t$. **5.5.** $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

5.6. $\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1+\beta)}\frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. **5.7.** $\ln\frac{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}{\alpha}$. **5.8.** $\frac{1}{\alpha^{\mu+1}}\times$ $\times\left(\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)}-\ln\alpha\right)$. ● Empléese la solución del problema 1.37.

5.9. $\frac{\pi}{2}e^{-\alpha t}$. **5.10.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$. **5.11.** $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\beta}}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$.

5.12. $\sqrt{2\pi}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})$. **5.13.** $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$ ● En la integral prefijada póngase previamente $x^2=u$. **5.14.** 2. ◀ Tenemos $\frac{p}{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)^2}\risingdotseq t\operatorname{sh}\frac{t}{2}$; $k=1$. Por eso, según la fórmula (4) $S=$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}t\operatorname{sh}\frac{t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}te^{-\frac{t}{2}}\,dt=-\left(te^{-\frac{t}{2}}+2e^{-\frac{t}{2}}\right)\Big|_0^{+\infty}=2,$$

▶ **5.15.** $\frac{3}{4}\pi$. ◀ $\operatorname{arctg}\frac{9}{n^2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{n-1}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$. Pero $\operatorname{arctg}\frac{1}{p}\risingdotseq\frac{\operatorname{sen}t}{t}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{p+1}\risingdotseq e^{-t}\frac{\operatorname{sen}t}{t}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{p-1}\risingdotseq e^{t}\frac{\operatorname{sen}t}{t}$

(según el teorema de desplazamiento). Por consiguiente, $\operatorname{arctg}\frac{2}{p^2} \doteqdot$ $\doteqdot f(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{t}\operatorname{sen} t$; $k=1$. Por eso por la fórmula (4) $S=$ $=\int_0^t \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{t}\operatorname{sen} t\,dt=\int_0^t \frac{1+e^{-t}}{t}\operatorname{sen} t\,dt$. Pero $\frac{1+e^{-t}}{t}\operatorname{sen} t \doteqdot$ $\doteqdot \operatorname{arctg}\frac{1}{p}+\operatorname{arctg}\frac{1}{p+1}=F(p)$; $F(0)=\operatorname{arctg}(+\infty)+\operatorname{arctg} 1=\frac{3}{4}\pi$.

Por consiguiente, según la fórmula (1) $\int_0^{+\infty}\frac{1+e^{-t}}{t}\operatorname{sen} t\,dt=\frac{3}{4}\pi$.

▶ 5.16. $\frac{1}{2}$. ● $\frac{2p+1}{(p^2+1)(p^2+2p+2)}=\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+2p+2}$. 5.17. $\frac{\pi}{2}$. ● $\operatorname{arctg}\frac{3}{n^2+3n+1}=\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+3}$; véase la solución del problema 5.15. 5.18. $\operatorname{arctg} x$. ● Póngase $\Phi(t, x)=\frac{x}{1+x^2t}$. 5.19. $\operatorname{arcsen} x$. ● Póngase $\Phi(t, x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2t}}$. 5.20. $\frac{\pi-x}{2}$.

◀ Empleamos la función generadora $\Phi(t, x)=\frac{t\operatorname{sen} x}{1-2t\cos x+t^2}=$ $=\sum_{n=1}^{\infty} t^n\operatorname{sen} nx$. Tenemos $\Phi(e^{-t}, x)=\frac{e^{-t}\operatorname{sen} x}{1-2e^{-t}\cos x-e^{-2t}}$; $\frac{1}{p}\doteqdot$ $\doteqdot\eta(t)=f(t)$, $\eta(t)=1$ para $t\geqslant 0$. Por la fórmula (5) hallamos

$$T(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\operatorname{sen} x\,dt}{1-2e^{-t}\cos x+e^{-2t}}=\operatorname{sen} x\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\,dt}{(e^{-t}-\cos x)^2+\operatorname{sen}^2 x}=$$

$$=-\operatorname{arctg}\frac{e^{-t}-\cos x}{\operatorname{sen} x}\Big|_0^{+\infty}=-\operatorname{arctg}(-\operatorname{ctg} x)+\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$ y,

puesto que $-\operatorname{arctg}(-\operatorname{ctg} x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x)=\frac{\pi}{2}-x$, $\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}=$ $=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}$, entonces $T(x)=\frac{\pi}{2}-x+\frac{x}{2}=\frac{\pi-x}{2}$. ▶

5.21. $-\ln\left(2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right)$. ● Empléese el desarrollo $\frac{1+t\cos x}{1+2t\cos x+t^2}=$ $=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\cos nx$, poniendo $\Phi(t, x)=1-\frac{1+t\cos x}{1+2t\cos x+t^2}$.

6.1. $\frac{e^q(e^q-e^{\alpha}\cos\beta)}{e^{2q}-2e^{q+\alpha}\cos\beta+e^{2\alpha}}$. 6.2. $\frac{e^q(e^q-a\cos\beta)}{e^{2q}-2ae^q\cos\beta+a^2}$.

6.3. $\dfrac{e^{q+\alpha}(e^q+e^\alpha)}{(e^q-e^\alpha)^3}$. 6.4. $\dfrac{ae^q(e^q+a)}{(e^q-a)^3}$. 6.5. $\dfrac{1}{(e^q-1)^{k+1}}$. ● Según la propiedad 3, a). 6.6. $\dfrac{(n+m)^{[k]}}{k!} \doteq \dfrac{e^{(m+1)q}}{(e^q-1)^{k+1}}$ para $m<k$; $\dfrac{e^{(m+1)q}}{(e^q-1)^{k+1}}-\sum\limits_{r=k}^{m-1} C_r^k e^{(m-r)q}$ para $m \geqslant k$. ● Según la propiedad 3, b).
6.7. $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{e^q-\cos\beta}$. ◀ Aplicamos la fórmula de integración de la representación (propiedad 5,b)): $\dfrac{\operatorname{sen}\beta n}{n} \doteq \displaystyle\int_q^\infty \frac{e^q \operatorname{sen}\beta\, dq}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}=$

$$=\int_q^\infty \frac{e^q \operatorname{sen}\beta\, dq}{q\,(e^q-\cos\beta)^2+\operatorname{sen}^2\beta}=\operatorname{arctg}\frac{e^q-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\Big|_q^\infty=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}\beta}{e^q-\cos\beta}$$

$\left(\text{ya que } \operatorname{arctg}\dfrac{e^q-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\Big|_q^\infty=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{e^q-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}=\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{e^q-\cos\beta}\right)$. ▶
6.8. $f(n)=-\dfrac{1}{3}1^n+\dfrac{1}{4}2^n+\dfrac{1}{12}(-2)^n=\dfrac{2^{n-2}(3+(-1)^{n-2})-1^{n-2}}{3}$.
6.9. $f(n)=\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}\cos\dfrac{n+1}{4}\pi$. 6.10. $f(n)=(\sqrt{2})^{n+1}\cos\dfrac{3n+1}{4}\pi$.
● Empléense las fórmulas para las representaciones de las funciones $a^n\operatorname{sen}\beta n$ y $a^n\cos\beta n$ (ejemplo 3 y problema 6.2). 6.11. $\dfrac{n^{[r+1]}}{(r+1)!}=C_n^{r+1}$.
6.12. $\dfrac{2}{5-4\cos\beta}(\operatorname{sen}\beta-2^{n-1}\operatorname{sen}n\beta+2^n\operatorname{sen}(n-1)\beta$ para $n\geqslant 1$.
6.13. $\dfrac{n(n^4-1)}{30}$. ● Empléese la fórmula de multiplicación de las representaciones. 6.14. $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{t}{t^2-t\sqrt{3}+1}$. 6.15. $\dfrac{1-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}t}{1-t+t^2}$.
6.16. $x_n=\dfrac{1}{7}(5^{n+1}+(-2)^{n+1})$. 6.17. $x_n=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\dfrac{2(n+1)\pi}{3}$.
6.18. $x_n=\operatorname{sen}\dfrac{(n+1)\pi}{6}$. 6.19. $x_n=(2x_0-x_1)1^n+(x_1-x_0)2^n=$ $=C_1+C_2\cdot 2^n$. 6.20. $x_n=2^n-(n+1)$. 6.21. $x_n=(x_1-2x_0-2)3^n+$ $+(1-x_1+3x_0)2^n+4^n=C_1\cdot 3^n+C_2\cdot 2^n+4^n$. 6.22. $x_n=(-1)^n+$ $+2^n+3^n$, $y_n=2(-1)^n-2^n-3^n$. 6.23. $x_n=\dfrac{3x_0-y_0}{5}\cdot 2^n+$ $+\dfrac{2x_0+y_0}{5}\cdot 3^n=C_1\cdot 2^n+C_2\cdot 3^n$, $y_n=\dfrac{2y_0-6x_0}{5}\cdot 2^n+\dfrac{3y_0+6x_0}{5}\cdot 3^n=$ $=-C_1\cdot 2^{n+1}+C_2\cdot 3^{n+1}$.

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, 1-110, GSP, URSS.